Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1937. Heft II

Mai-Dezember-Sitzung

München 1937

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl.

Von Rudolf Steuerwald (München).

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung vom 8. Mai 1937

Unter einer vollkommenen Zahl versteht man eine natürliche Zahl,[1] die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.

Gerade derartige Zahlen sind bekanntlich alle und nur die Zahlen der Form $2^{P-1}(2^P-1)$, bei denen der zweite Faktor eine Primzahl ist.[2]

Ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt, weiß man bis heute nicht; man kennt aber verschiedene Bedingungen, welche eine solche Zahl z, falls sie existieren sollte, erfüllen müßte. Hier werden nur die folgenden benötigt:

Sei, als Produkt verschiedener Primzahlpotenzen dargestellt,

$$(1) \qquad z = p^a \prod_{i=1}^{n} q_i^{\,b_i}.$$

Nach Sylvester[3] muß $n \geqq 4$ sein.

Die Primzahl p ist dadurch ausgezeichnet, daß in der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i^{\,b_i+1}-1}{q_i-1} = 2p^a \prod_{i=1}^{n} q_i^{\,b_i},$$

welche z als vollkommene Zahl kennzeichnet, ein Faktor der linken Seite, und zwar, wie wir annehmen wollen, der erste, $\equiv 2 \pmod{4}$ sein muß, während alle übrigen ungerade sein müssen. Das liefert die weiteren notwendigen Bedingungen:[4]

$$(3) \qquad p \equiv a \equiv 1 \pmod{4}; \qquad \underset{i=1,2\cdots n}{b_i \equiv 0 \pmod{2}}.$$

---

[1] Alle in dieser Arbeit vorkommenden Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen.

[2] Dazu ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß P Primzahl ist.

[3] C. R. 106, 1888, S. 522–26; eine angreifbare Stelle des Beweises (S. 524, Zeile 5 und 6 von oben) läßt sich unschwer verschärfen.

[4] Vgl. z. B. Sylvester a. a. O., S. 404; oder Dickson: History of the Theory of Numbers, Vol. I, S. 19.

Damit wäre vereinbar, daß alle $b_i = 2$ wären.

Hier soll aber gezeigt werden:

Wenigstens einer der Exponenten b_i muß $\geqq 4$ sein.

Dem Beweis werde vorausgeschickt der u. a. auch von Sylvester ständig benützte

Hilfssatz: Unter den q_i müssen sich alle Primfaktoren von $\frac{p+1}{2}$ befinden.

(4) Beweis: $$\frac{p^{a+1}-1}{p-1} = 2\cdot\frac{p^{\frac{a+1}{2}}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\frac{a+1}{2}}+1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{2}.$$

Zufolge (3) sind alle Faktoren der rechten Seite von (4) ganzzahlig. Daraus folgt mittels (2) die Behauptung.

Von jetzt ab nehmen wir an, es seien alle $b_i = 2$, und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt, indem wir der Reihe nach beweisen:

I. Unter den Primzahlen q_i kann sich 3 nicht befinden.

II. Jedes der Trinome $q_i^2 + q_i + 1$ muß eine Potenz von p sein.

III. Mindestens eines dieser Trinome kann nicht durch p teilbar sein.

I. Wäre $q_1 = 3$, so müßte die linke, also auch die rechte Seite von (2) durch $3^2 + 3 + 1 = 13$ teilbar sein. Daraus folgt entweder $p = 13$ oder $q_2 = 13$.

Erstere Annahme führt nach dem Hilfssatz auf $q_2 = 7$. Dann muß die linke Seite von (2) durch $7^2 + 7 + 1 = 3\cdot 19$, also die rechte durch $q_3 = 19$ teilbar sein usw.

Analog führt die Annahme $q_2 = 13$ auf $q_2^2 + q_2 + 1 = 3\cdot 61$; also: entweder $p = 61$ oder $q_3 = 61$ usw.

Setzt man dieses Verfahren für alle möglichen Fälle fort, so ergibt sich, daß z eine der folgenden Primzahlverbindungen enthalten müßte:

p	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
13	3	7	19	127	*
61	3	13	31	331	*
97	3	13	61	7	*
*	3	13	61	97	*

In jedem dieser Fälle wäre aber $\prod_{i=2}^{4}(q_i^2+q_i+1)$, also zufolge (2) auch z durch 3^3 teilbar, was der Annahme $b_1 = 2$ widerspricht.

II. Bekanntlich kann eine Zahl der Form $q_i^2 + q_i + 1$ außer 3, was hier nach dem Vorstehenden nicht in Frage kommt, nur Primfaktoren enthalten, welche $\equiv 1 \pmod 6$ sind. Der einzige Primteiler von z, der möglicherweise diese Bedingung erfüllen kann, ist aber p. Denn wäre eine der Zahlen q_i, etwa q_k, $\equiv 1 \pmod 6$, so wäre $q_k^2 + q_k + 1$, also wegen (2) auch z durch 3 teilbar, was eben als unmöglich erwiesen wurde.

III. Nach dem Hilfssatz befindet sich unter den Zahlen q_i mindestens eine — sie heiße q —, welche in $\frac{p+1}{2}$ enthalten ist; also:

(5) $$p = 2\,x\,q - 1.$$

Wäre nun

(6) $$q^2 + q + 1 = y\,p = y\,(2\,x\,q - 1),$$

so würde folgen:

(7) $$y + 1 \equiv 0 \pmod q;$$

also, da y ungerade sein muß:

(8) $$y = 2\,w\,q - 1.$$

Damit geht (6) über in

(9) $$q^2 + q + 1 = (2\,x\,q - 1)(2\,w\,q - 1) \geqq (2\,q - 1)^2.$$

Daraus folgt aber:

(10) $$q \leqq \frac{5}{3},$$

was unmöglich ist.

Zusatz: Auch die Annahme

$$q_1 = 3;\ b_1 = 4;\ b_i = 2\ (i = 2, 3 \ldots n)$$

erweist sich als unzulässig. Sie führt nämlich mittels des bei I angewandten Verfahrens auf die Primzahlverbindung

p	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
*	3	11	7	19	127	5419	31	*

und damit auf $\prod_{i=3}^{7} (q_i^2 + q_i + 1) \equiv 0 \pmod{3^5}$, was mit $b_1 = 4$ nicht verträglich ist.