Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1936. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1936
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Dreiteilung des Winkels nach Eugen Kopf.

Von Dr. O. Nehring, Mühlhausen i. Thür.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung vom 11. Januar 1936.

In den Sitzungsberichten der math.-naturw. Abteilung der Bayerischen Akademie, Jahrgang 1933, S. 439 hat Herr Perron berechnet, daß der Maximalfehler der zweiten Kopfschen Konstruktion etwas kleiner als 14,″92 ist; die genaue Lage des Maximums wurde nicht angegeben. In der folgenden Ausführung soll diese Lage bestimmt werden.

Der funktionelle Zusammenhang zwischen x und y ist gegeben durch die Beziehung

$$(1)\qquad [(7\sqrt{3}-12)+(2\sqrt{3}-3)\cos x]\operatorname{tg}^2 y-\sin x\cdot\operatorname{tg} y + (4-2\sqrt{3})(1-\cos x)=0.$$

Wir finden die Güte der Näherung, wenn wir den Fehler $z=\frac{x}{3}-y$ bilden. Es ergibt die Differentiation, wenn man (1) zuvor mit $\cos^2 y$ multipliziert:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3}-\frac{dy}{dx}=\frac{Z}{3N},$$

wobei

$$Z=(10-6\sqrt{3})\sin x\operatorname{tg}^2 y+[(18\sqrt{3}-32)-\cos x]\operatorname{tg} y + (11-6\sqrt{3})\sin x,$$

$$N=\sin x\operatorname{tg}^2 y+[(18\sqrt{3}-32)+2\cos x]\operatorname{tg} y-\sin x.$$

Das Maximum findet man durch

$$(2) \qquad Z = 0.$$

Wenn man aus den Gleichungen (1) und (2) die Größe $\operatorname{tg}^2 y$ eliminiert, ergibt sich:

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \dot{y} = \frac{A}{B},$$

wobei

$$A = [(15\sqrt{3} - 22) + \cos x] \sin x,$$

$$B = (34\sqrt{3} - 52) + (11\sqrt{3} - 12) \cos x + \cos^2 x.$$

Wir setzen den Wert von $\operatorname{tg} y$ in die Gleichung (2) ein. Das ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
0 &= \sin x \{(10 - 6\sqrt{3}) A^2 + [(18\sqrt{3} - 32) - \cos x] \\
&\quad \times [(15\sqrt{3} - 22) + \cos x] B + (11 - 6\sqrt{3}) B^2\} \\
&= (10 - 6\sqrt{3}) \sin x (1 - \cos x) \{(1 + \cos x) \\
&\quad \times [15\sqrt{3} - 22) + \cos x]^2 + [(15 - 10\sqrt{3}) - \cos x] B\} \\
&= (10 - 6\sqrt{3}) \sin x (1 - \cos x) [(370\sqrt{3} - 641) \\
&\quad + (657 - 379\sqrt{3}) \cos x + (9\sqrt{3} - 16) \cos^2 x] \\
&= (10 - 6\sqrt{3}) \sin x (1 - \cos x)^2 [(370\sqrt{3} - 641) \\
&\quad - (9\sqrt{3} - 16) \cos x].
\end{aligned}$$

Danach liegt das gesuchte Maximum bei

$$\cos x = \frac{370\sqrt{3} - 641}{9\sqrt{3} - 16} = \frac{266 - 151\sqrt{3}}{13} = \frac{181}{266 + 151\sqrt{3}},$$

$$x = 69^0\ 56'\ 2'',46, \qquad \frac{x}{3} = 23^0\ 18'\ 40'',82.$$

Aus (3) erhält man dann

$$\operatorname{tg} y = \frac{572\sqrt{3} - 260}{24096 - 1292\sqrt{3}} \sin x, \qquad y = 23^0\ 18'\ 25'',96.$$

Der maximale Fehler hat also eine Größe von 14,86 Bogensekunden.