Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 6. Abhandlung

Über
Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche

von

Alfred Pringsheim

Vorgetragen am 1. Mai 1909 u. 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11 2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11 3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14 3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14 2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17 1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 6. Abhandlung

Über
Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche

von

Alfred Pringsheim

Vorgetragen am 1. Mai 1909 u. 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Unter den von einer komplexen Veränderlichen x abhängigen unendlichen Kettenbrüchen des einfachsten Typus, nämlich:

$$\frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_\nu x|}{|1} + \cdots$$

haben sich insbesondere diejenigen einer ausgiebigeren analytischen Behandlung zugänglich erwiesen, deren Teilzähler-Koeffizienten für $\lim \nu = \infty$ einen bestimmten Grenzwert besitzen, wie dies z. B. bei dem Gaußschen und dem Heineschen Kettenbruche für den Quotienten zweier hypergeometrischen bzw. verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen der Fall ist. Während nun hierbei der Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ (wie beim Heineschen Kettenbruche) mit Hilfe eines von mir abgeleiteten Konvergenz-Kriteriums sich außerordentlich einfach erledigen läßt, so ist für den Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, wo $|a| > 0$ (wie beim Gaußschen Kettenbruche) eine merklich umständlichere Untersuchung erforderlich. Beide Fälle sind zunächst unter gewissen, durch die besondere Form des Heineschen und des Gaußschen Kettenbruches suggerierten beschränkenden Voraussetzungen von Herrn E. B. van Vleck[1]) behandelt worden. Dabei zeigt sich

[1]) Nach einer vorausgehenden Untersuchung: „*On the convergence and character of the continued fraction*

$$\frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + \cdots\text{“}$$

(Transact. Americ. Math. Soc. 2 (1901), p. 476) in der Abhandlung: „*On the convergence of the continued fraction of Gauß and other continued fractions*“ (Annals of Math. 3, No. 1 (1901). Ich zitiere späterhin diese beiden Arbeiten in der angegebenen Reihenfolge kurz als van Vleck (1) und (2).

indessen, daß gerade jene dem Wesen der Sache fremden Beschränkungen auch eine ganz unnötige Weitläufigkeit der Untersuchung im Gefolge haben. Herr van Vleck hat daher später das betreffende Problem unter Verzicht auf jene Beschränkungen wieder aufgenommen,[1] wobei er sich auf einen Satz des Herrn Poincaré[2] über das infinitäre Verhalten der Lösungen einer linearen Rekursionsformel (Differenzen-Gleichung) beliebiger Ordnung stützt. Dieser Satz, auf den vorliegenden Fall reduziert, besagt folgendes. Es sei $a_\nu\,(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ eine gegebene Zahlenfolge mit dem Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ und es werde eine andere Folge von Zahlen D_ν bei irgendwie fixierten Anfangswerten D_0, D_1 definiert durch die Rekursionsformel:

$$D_{\nu+1} - D_\nu - a_{\nu+1}\, x\, D_{\nu-1} = 0.$$

Bezeichnet man sodann mit z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - y - a\,x = 0$$

und zwar, bei definitiver Ausschließung des Falles $|z| = |z'|$, mit der Festsetzung $|z| > |z'|$, so ist *im allgemeinen*:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = z$$

und *ausnahmsweise*:

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = z'.$$

Der Satz in dieser Form erweist sich aber — ganz abgesehen von der einigermaßen fragwürdigen Natur des Poincaréschen Beweises,[3] dem Herr van Vleck übrigens einen

[1] *„On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values."* (Transact. Americ. Math. Soc. 4 (1904), p. 253.) Wird von mir als van Vleck (3) zitiert.

[2] Americ. Journ. of Math. 7 (1885), p. 213.

[3] Daß fast alle bei jenem Beweise benützten Formeln verrechnet sind, mag man vielleicht nur als einen Schönheitsfehler ansehen. Aber bei der ziemlich flüchtigen und zugleich überknappen Darstellung des ganzen Beweises ist es mir leider trotz aufrichtiger Bemühung über-

anderen hinzufügt[1]) — als völlig unzureichend zur Lösung der vorliegenden Aufgabe. Denn er bietet keinerlei Hilfsmittel, um zu entscheiden, ob für einen willkürlich angenommenen Wert x der „regelmäßige“ Fall (a) oder der „Ausnahmefall“ (b) eintritt. Ja, man wird durch ihn nicht einmal in den Stand gesetzt, auch nur einen einzigen Wert x anzugeben, für welchen die „Regel“ (a) in die Erscheinung tritt. Im vorliegenden Falle handelt es sich aber darum, geradezu festzustellen, daß die Werte x, für welche die Beziehung (a) stattfindet, einen *zusammenhängenden Bereich* T bilden, daß überdies die Konvergenz von $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ gegen jenen Grenzwert z für jede abgeschlossene Menge solcher Stellen x eine *gleichmäßige* ist und daß andererseits die Stellen x', für welche eventuell der Fall (b) eintreten kann, im Bereiche T, abgesehen von dessen Grenzen, immer nur *isoliert* vorkommen.

Dies alles ist auch Herrn van Vleck keineswegs entgangen. Was er aber in der bezeichneten Richtung zur Ergänzung des Poincaréschen Satzes beibringt,[2]) scheint mir — vorsichtig ausgedrückt — nicht recht verständlich. Noch

haupt nicht gelungen, ihn restlos zu begreifen. Andere Mathematiker scheinen freilich in dieser Beziehung glücklicher organisiert, da der fragliche Satz ziemlich häufig zitiert und benützt wird, ohne daß mir jemals irgendwelche kritische Bemerkung über seinen Beweis begegnet wäre. Übrigens hat in neuester Zeit Herr Perron Fassung und Beweis des fraglichen Satzes vervollständigt und außer dem verbesserten Poincaréschen Beweise noch einen zweiten, zwar komplizierteren, aber auch weiter tragenden geliefert (Journ. f. Math. 136 (1909), p. 17).

[1]) Das Beweisverfahren des Herrn van Vleck ((3), p. 255) beruht auf einem sehr sinnreichen, in der gegebenen Darstellung freilich nicht gerade leicht faßlichen, in geometrische Form gekleideten Grenz-Prozesse. Übrigens kann jene Darstellung doch wohl nur als *Skizze* eines Beweises gelten, die, wie ich mich überzeugt habe, bei gehöriger Ausgestaltung zu einem exakten und vollgültigen Beweise an Kürze und scheinbarer Einfachheit sehr erheblich einbüßt.

[2]) van Vleck (3), p. 257. Ich vermisse die genügende Grundlage für den Satz Zeile 9: „Hence equation (9) takes effect etc.“, auf dem alles weitere beruht.

unverständlicher finde ich freilich die Methode des Herrn Auric,[1]) welcher in einer umfangreichen (übrigens von der Pariser Akademie preisgekrönten) Abhandlung über Kettenbrüche unter etwas problematischer Berufung auf die Stetigkeit der D_ν einfach dekretiert, der Fall (b) habe überhaupt nicht stattzufinden.[2])

Im folgenden wird der Versuch gemacht, das bezeichnete Problem in möglichst elementarer und, wie ich hoffe, einwandfreier Weise zu erledigen. Obschon die hierzu dienlichen Betrachtungen unschwer auf Kettenbrüche von allgemeinerer Form sich übertragen ließen, will ich mich an dieser Stelle ausdrücklich auf den zu Anfang erwähnten Typus $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ beschränken, jene Verallgemeinerungen mir für andere Gelegenheit vorbehaltend. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß eine systematische Behandlung solcher Kettenbrüche in der Literatur gänzlich zu fehlen scheint, hielt ich es für zweckmäßig, deren allgemeine Eigenschaften im § 1 zunächst übersichtlich zusammenzustellen und in § 2 einen wichtigen, im wesentlichen bereits bekannten Konvergenzsatz aufs neue zu beweisen. Im § 3 folgt dann die Behandlung des Falles $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ nebst Anwendung auf den Heineschen Kettenbruch und die Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$, wobei sich in überaus einfacher Weise das bemerkenswerte und, wie ich vermute, wohl kaum allgemein bekannte Resultat ergibt, daß das Funktions-Element $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$, wo $|q| < 1$, eine in der ganzen Ebene *eindeutige* und bis auf *einfache* Pole aus der Reihe der Zahlen $1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots$ *reguläre* analytische Funktion definiert. Ich muß bekennen, daß dieses Ergebnis mir zunächst neu und einigermaßen überraschend erschien, habe jedoch nachträglich bemerkt, daß dasselbe aus einer Formel entnommen werden kann, die sich in einer wegen des komplizierten analytischen Apparates

[1]) Journal de Mathématiques (6), 3 (1907), p. 105—206: „*Recherches sur les fractions continues algébriques.*"

[2]) A. a. O. p. 178.

freilich recht schwer zu übersehenden Abhandlung des Herrn J. Thomae[1]) findet.

Der § 4 bringt dann die eigentliche, auf den Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, wo $|a| > 0$, bezügliche Hauptuntersuchung. Dieselbe basiert nicht auf dem oben erwähnten Poincaréschen Satze, vielmehr auf der Herstellung eines konvergenten Verfahrens zur Auflösung der Rekursionsformel für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche, welches unmittelbar gestattet, das infinitäre Verhalten der Näherungsbrüche festzustellen und überdies als Corollar den Poincaréschen Satz in vervollständigter und präziserer Fassung liefert. Schließlich folgt eine Anwendung auf den Gaußschen Kettenbruch und auf die Beurteilung des analytischen Charakters der durch eine hypergeometrische Reihe definierten analytischen Funktion.

---

§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$.

1. Es sei $a_1, a_2, a_3 \ldots$ eine unbegrenzte Folge beliebiger von Null verschiedener Zahlen, x eine komplexe Veränderliche. Die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruches:

$$(1) \qquad \frac{a_1}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_\nu x|}{|1} + \cdots$$

oder kürzer geschrieben:

$$\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$$

mögen mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ bezeichnet werden, wobei, wie üblich:

[1]) Journ. f. Math. 70 (1869), p. 258—281. Vgl. Fußnote 2) auf p. 32 der vorliegenden Arbeit.

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{0}{1},$$

im übrigen:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{a_0}{1} \\ \dfrac{A_\nu}{B_\nu} = \dfrac{a_0|}{|1} + \dfrac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \dfrac{a_\nu x|}{|1} \quad (\nu = 2, 3 \ldots) \end{cases}$$

zu setzen ist. Da sodann:

$$A_1 = a_1 \qquad B_1 = 1$$
$$A_2 = a_1 \qquad B_2 = 1 + a_2 x$$

und für $\nu \geqq 2$:

$$(3) \quad A_{\nu+1} = A_\nu + a_{\nu+1} A_{\nu-2} \cdot x \quad B_{\nu+1} = B_\nu + a_{\nu+1} B_{\nu-1} \cdot x,$$

so erkennt man, daß $A_{\nu+1}$, $B_{\nu+1}$ ganze rationale Funktionen $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades von x sind (die wir nötigenfalls ausführlicher mit $A_{\nu+1}(x)$, $B_{\nu+1}(x)$ bezeichnen werden), und zwar $A_{\nu+1}$ durchweg mit dem konstanten Gliede a_1, $B_{\nu+1}$ mit dem konstanten Gliede 1 (also: $A_{\nu+1}(0) = a_1$, $B_{\nu+1}(0) = 1$).

2. *Satz I. Konvergiert der Kettenbruch* $\left[\dfrac{a_1}{1}, \dfrac{a_\nu x}{1}\right]^\infty$ *in irgend einem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereiche T gleichmäßig, so stellt daselbst sein Grenzwert $K(x)$ eine eindeutige analytische, im Innern von T reguläre Funktion dar.*

Beweis. Da auf Grund der Voraussetzung zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n gehört, derart, daß für alle x des Bereiches T:

$$\left| K(x) - \frac{A_\nu}{B_\nu} \right| < \varepsilon \text{ für } \nu \geqq n,$$

so folgt zunächst, daß von einem bestimmten Index $\nu \geqq m$ ab keiner der Nenner B_ν innerhalb T verschwindet, da ja, solange sämtliche Kettenbruchzähler von Null verschieden sind, niemals A_ν und B_ν gleichzeitig verschwinden können, während andererseits im Falle $x = 0$, in welchem sämtliche Kettenbruchzähler außer a_1 verschwinden, $B_\nu = B_1 = 1$ für *jedes* ν resultiert.

Man hat daher für $n > m$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{A_n}{B_n} &= \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n} {}^{\nu} \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right) \\ &= \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n} {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1}, \end{aligned}$$

so daß also, da $\frac{A_n}{B_n}$ mit unendlich wachsendem n im Bereiche T *gleichmäßig* gegen $K(x)$ konvergiert, $K(x)$ definiert wird durch die in T *gleichmäßig* konvergierende Reihe rationaler Funktionen:

$$(5)\qquad K(x) = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{\infty} {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1},$$

woraus auf Grund eines bekannten Weierstraßschen Satzes die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

3. Es werde jetzt angenommen, daß der oben mit T bezeichnete Bereich gleichmäßiger Konvergenz die Stelle $x = 0$ in seinem Innern enthalte. Da nach dem oben gesagten höchstens eine *endliche* Anzahl von Näherungsbruch-Nennern $B_n(x)$ *Nullstellen* in T besitzen kann, andererseits $B_n(0) = 1$ für jedes n, so existiert eine gewisse Umgebung $|x| < \varrho$, innerhalb deren kein einziges $B_n(x)$ verschwindet und somit sämtliche Näherungsbrüche $\frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ sich regulär verhalten, etwa:

$$(6)\qquad \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} a_\nu^{(n)} \cdot x^{\nu-1} \quad (n = 2, 3 \ldots),$$

speziell:

$$\frac{A_1}{B_1} = a_1^{(1)} = a_1$$

und offenbar allgemein:

$$(7)\qquad a_1^{(n)} = a_1.$$

Alsdann ergibt sich:

Satz II. Die Potenzreihe für $\frac{A_n}{B_n}$ *hat mit derjenigen für* $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ *die ersten* $(n-1)$ *Glieder, diese letztere dem-*

nach mit derjenigen für $\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}$ *die ersten* $(n-2)$ *Glieder gemein u. s. f., so daß also gesetzt werden kann:*

$$\frac{A_n}{B_n} = \sum_1^{n-1} {}^{\nu}\, a_\nu^{(\nu)} \cdot x^{\nu-1} + \sum_n^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu^{(n)} \cdot x^{\nu-1}. \tag{8}$$

Schließlich hat dann die Potenzreihe für $K(x)$ *mit derjenigen für* $\frac{A_n}{B_n}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ *die ersten n-Glieder gemein, so daß mit Berücksichtigung von Gl. (8) sich ergibt:*

$$K(x) = \sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu^{(\nu)} \cdot x^{\nu-1}. \tag{9}$$

Beweis. Da

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n} \cdot x^{n-1}$$

und $\frac{1}{B_{n-1} B_n}$, wegen $B_{n-1}(0) = B_n(0) = 1$, für $|x| < \varrho$ in eine mit dem konstanten Gliede 1 beginnende Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(x)$ entwickelt werden kann, so folgt mit Benützung von Gl. (6):

$$\sum_1^{\infty} {}^{\nu} (a_\nu^{(n)} - a_\nu^{(n-1)}) \cdot x^{\nu-1} = (-1)^{n-1} \cdot a_1 a_2 \ldots a_n \cdot \mathfrak{P}_n(x) \cdot x^{n-1}$$

und daher:

$$a_\nu^{(n)} = a_\nu^{(n-1)} \quad \text{für } \nu = 1, 2 \ldots (n-1).$$

Ersetzt man hier n durch $n-1$, so findet man weiter:

$$a_\nu^{(n-1)} = a_\nu^{(n-2)} \quad \text{für } \nu = 1, 2 \ldots (n-2),$$

u. s. f. — schließlich:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^{(n)} = a_1^{(n-1)} = \cdots = a_1^{(2)} = a_1^{(1)} \\ a_2^{(n)} = a_2^{(n-1)} = \cdots = a_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^{(n)} = a_{n-1}^{(n-1)}, \end{array} \right. \tag{10}$$

womit die Richtigkeit von Gl. (8) bewiesen ist.

Aus

$$K(x) = \frac{A_n}{B_n} + \sum_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1}$$

folgt sodann, daß die Potenzentwickelung von $K(x)$ mit derjenigen von $\frac{A_n}{B_n}$ bis zu dem Gliede $a_n^{(n)} \cdot x^{n-1}$ einschließlich übereinstimmt, so daß also, wie oben behauptet:

$$K(x) = \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} a_\nu^{(\nu)} \cdot x^{\nu-1}$$

resultiert.

4. Aus der Entwickelbarkeit eines Kettenbruches der vorliegenden Art in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ ergibt sich ferner, daß für derartige Kettenbrüche auch ein analoger Identitäts-Satz gilt, wie für Potenzreihen, nämlich:

Satz III. Stimmen die Werte zweier Kettenbrüche, die in einem zusammenhängenden, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T gleichmäßig konvergieren:

$$K(x) = \left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty, \quad K_1(x) = \left[\frac{b_1}{1}, \frac{b_\nu x}{1}\right]_2^\infty$$

für unendlich viele Stellen x mit einer im Innern von T gelegenen Häufungsstelle überein, so sind sie identisch.[1])

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt zunächst die *Identität* der durch $K(x)$ und $K_1(x)$ im Bereiche T dargestellten

[1]) Ob dieser Satz noch gültig bleibt, wenn das zusammenhängende Stück T des Konvergenzbereiches die Stelle $x = 0$ *nicht* im Innern enthält, scheint mir eine offene Frage. Nicht minder fraglich erscheint es freilich, ob es überhaupt Kettenbrüche der betrachteten Art gibt, deren Konvergenzbereich teilweise oder ausschließlich aus irgend einem von der Umgebung der Stelle $x = 0$ *abgetrennten* Stücke T besteht (wie dies bei anderen Kettenbrüchen sehr einfacher Art tatsächlich der Fall sein kann): mir wenigstens ist ein Beispiel dieser Art nicht bekannt, und es erscheint mir daher nach den vorhandenen Analogien zum mindesten nicht ausgeschlossen, daß der gesamte Konvergenzbereich eines solchen Kettenbruches *allemal* aus einem einzigen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Stücke besteht.

analytischen Funktionen und somit die *Gleichheit* der beiden Kettenbrüche für den gesamten Bereich. Infolge der Identität der für $K(x)$ und $K_1(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ bestehenden Potenzreihen-Entwickelung findet man dann zunächst durch Vergleichung der konstanten Anfangsglieder:

$$a_1 = b_1. \tag{11}$$

Aus der für alle x des Bereiches T erwiesenen Gleichheit:

$$\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty = \left[\frac{b_1}{1}, \frac{b_\nu x}{1}\right]_2^\infty$$

folgt dann weiter, daß auch die Gleichheit bestehen muß:

$$\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty = \left[\frac{b_\nu x}{1}\right]_2^\infty, \tag{12}$$

für alle Stellen von T, an denen diese beiden Kettenbrüche überhaupt *konvergieren*, was im übrigen keineswegs ausnahmslos der Fall zu sein braucht, da ja die ursprünglich vorgelegten Kettenbrüche *nicht* ausdrücklich als *unbedingt* konvergent vorausgesetzt wurden. Sind aber Divergenzstellen überhaupt vorhanden, so können diese, wie aus dem Satze I (Nr. 2 dieses Paragraphen) hervorgeht, nur gewöhnliche Nullstellen von $K(x)$ bzw. $K_1(x)$ sein und daher innerhalb T nur in *endlicher* Anzahl vorkommen. Da andererseits $K(0)$ und $K_1(0)$ nicht verschwinden, so muß für $K(x)$, $K_1(x)$ eine von Nullstellen freie Umgebung von $x = 0$ existieren, innerhalb deren also die Kettenbrüche (12) ausnahmslos konvergieren und wegen

$$\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty = \frac{a_1 - K(x)}{K(x)}, \quad \left[\frac{b_\nu x}{1}\right]_2^\infty = \frac{b_1 - K_1(x)}{K_1(x)}$$

analytische Funktionen regulären Verhaltens darstellen. Dann müssen aber auf Grund von Gl. (12) die Anfangsglieder der betreffenden Potenzreihen-Entwickelungen wieder übereinstimmen, so daß also sich ergibt:

$$a_2 = b_2.$$

Und da diese Schlußweise unbegrenzt fortgesetzt werden kann, so erkennt man die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Zusatz. Hieraus folgt insbesondere, daß ein für eine gewisse Umgebung T der Stelle $x = 0$ gleichmäßig konvergierender unendlicher Kettenbruch der betrachteten Art daselbst nicht einem *endlichen* Kettenbruche der analogen Form gleich sein kann.[1])

5. Der Quotient zweier für $x = 0$ nicht verschwindender konvergierender Reihen nach positiven ganzen Potenzen von x läßt sich nach einem bekannten (schon von Lambert und Legendre benützten) Verfahren formal in einem unbegrenzt fortsetzbaren Kettenbruch von der in Frage stehenden Form entwickeln. Man kann nämlich jeden solchen Quotienten $F(x)$ zunächst stets auf die Form bringen:

$$F(x) = \frac{a_1 \cdot \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ etwa für $|x| < r$ gleichzeitig konvergieren mögen und

$$\mathfrak{P}_0(0) = \mathfrak{P}_1(0) = 1,$$

sodann:

$$F(x) = \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß zwischen den Koeffizienten von $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ keine speziellen Relationen bestehen, beginnt die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)$ mit einem Gliede von der Form $a_2 x$, so daß also gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x) = a_2 x \cdot \mathfrak{P}_2(x),$$

wo $\mathfrak{P}_2(x)$ zum mindesten für $|x| < r$ konvergiert und $\mathfrak{P}_2(0) = 1$ ist. Darnach wird also:

$$F(x) = \cfrac{a_1}{1 + a_2 x \cdot \cfrac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}},$$

[1]) Die Richtigkeit dieser Aussage bleibt wieder fraglich, wenn die Stelle $x = 0$ nicht dem Innern des zusammenhängenden Stückes T angehört.

wobei der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}$ genau denselben Charakter besitzt, wie der ursprünglich betrachtete: $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ und somit auch wieder die analoge Transformation gestattet. Durch n malige Anwendung dieses Verfahrens gelangt man somit zu einer Kettenbruch-Entwickelung von der Form:

$$(15)\quad F(x) = \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_n x|}{|1} + \frac{a_{n+1}\, x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x)|}{\mathfrak{P}_n(x)},$$

wo wiederum $\mathfrak{P}_n(x)$, $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$ zum mindesten für $|x| < r$ konvergieren und $\mathfrak{P}_n(0) = \mathfrak{P}_{n+1}(0) = 1$.[1] Sieht man von dem besonderen Falle ab, daß für irgend ein bestimmtes n:

$$\frac{\mathfrak{P}_{n+1}(x)}{\mathfrak{P}_n(x)} \equiv 1$$

resultiert und somit $F(x)$ sich auf den *endlichen* Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^{n+1}$, also auf eine *rationale* Funktion reduziert, so führt das obige Verfahren zur Entstehung eines *unendlichen* Ketten-

---

[1]) Neben dieser Entwickelung existiert naturgemäß noch eine zweite von ähnlicher Form, jedoch mit dem nennerfreien Gliede a_1 anfangend. Man hat nämlich zunächst:

$$F(x) = a_1\left(1 - \frac{\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}\right) = a_1 - a_1 a_2 \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$$

und kann sodann auf den Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ das im Texte beschriebene Entwickelungsverfahren anwenden.

Ein analoger Zusammenhang besteht z. B. auch zwischen den beiden Entwickelungen:

$$(1+x)^n = \frac{1|}{|1} - \frac{nx|}{|1} + \frac{\frac{n+1}{2}x|}{|1} - \frac{\frac{n-1}{2\cdot 3}x|}{|1} + \frac{\frac{2(n+2)}{3\cdot 4}x|}{|1} - \frac{\frac{2(n-2)}{4\cdot 5}x|}{|1} + \cdots$$

(s. Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136) und:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx|}{|1} - \frac{\frac{n-1}{2}x|}{|1} + \frac{\frac{n+1}{2\cdot 3}x|}{|1} - \frac{\frac{n-2}{2\cdot 3}x|}{|1} + \frac{\frac{n+2}{2\cdot 5}x|}{|1} - \cdots$$

(s. Lagrange, Oeuvres, T. 4, p. 315).

bruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$. Wenn dieser letztere für irgendwelche x des Bereiches $|x| < r$ *konvergiert*, so würde daraus noch keineswegs ohne weiteres folgen, daß sein Wert mit demjenigen von $F(x)$ übereinstimmt: vielmehr müßte, wenn man wiederum seine Näherungsbrüche mit $\frac{A_\nu(x)}{B_\nu(x)}$ bezeichnet, noch ausdrücklich bewiesen werden, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(F(x) - \frac{A_n(x)}{B_n(x)}\right) = 0$$

ist[1]) (woraus dann umgekehrt die *Konvergenz* des Kettenbruches *eo ipso* folgen würde). Diese schon bei verhältnismäßig einfachen und beschränkten Voraussetzungen schon ziemlich umständliche,[2]) bei nur wenig allgemeineren, wie z. B. in dem klassischen Falle des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen[3]) ganz außerordentlich schwierige und mühsame Feststellung wird indessen entbehrlich durch den folgenden Satz, durch welchen tatsächlich die Frage nach der *Entwickelbarkeit* von $F(x)$ in einen konvergenten Kettenbruch der fraglichen Art auf dessen *rein formale* Herstellung und auf die bloße Untersuchung seiner (gleichmäßigen) *Konvergenz* zurückgeführt wird, nämlich:

Satz IV. Wenn der bei dem oben bezeichneten Verfahren aus $F(x)$ hervorgehende unendliche Kettenbruch für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ gleichmäßig konvergiert, so stimmt sein Wert daselbst mit demjenigen von $F(x)$ überein.[4])

---

[1]) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissensch. I, 1, p. 135. — Oscar Perron, Sitz.-Ber. 37 (1907), p. 496.

[2]) Lambert, Histoire de l'Académie de Berlin 1761 (publ. 1768), p. 368 ff. (vgl. hierzu Sitz.-Ber. 28 (1897), p. 331). — Schlömilch, Algebr. Analysis (4. Aufl. 1868), p. 304. 321. — Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie 2 (1905), p. 580 ff.

[3]) W. Thomé, Journ. für Mathematik 66 (1866), p. 322—336; 67 (1867), p. 299—309.

[4]) Diesen Satz scheint im wesentlichen schon Riemann gekannt zu haben, wie ich aus einer Bemerkung am Anfange des Fragmentes:

Beweis. Aus Gl. (15) folgt zunächst:

$$F(x) = \frac{\mathfrak{P}_n(x) \cdot A_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x) \cdot A_{n-1}(x)}{\mathfrak{P}_n(x) \cdot B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)}$$

und daher

$$\text{(16)} \quad \begin{aligned} F(x) - \frac{A_n(x)}{B_n(x)} &= \frac{a_{n+1}x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x) \cdot \{A_{n-1}(x) \cdot B_n(x) - A_n(x) \cdot B_{n-1}(x)\}}{B_n(x) \cdot \{\mathfrak{P}_n(x) B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)\}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1} \cdot x^n \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x)}{B_n(x) \cdot \{\mathfrak{P}_n(x) \cdot B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)\}}. \end{aligned}$$

Da $B_n(0) = \mathfrak{P}_n(0) = \mathfrak{P}_{n+1}(0) = 1$, so folgt, daß die Entwickelung des letzten Ausdruckes nach Potenzen von x mit x^n beginnt, somit die Entwickelung von $F(x)$ bis zu dem Gliede mit x^{n-1} einschließlich mit derjenigen von $\frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ übereinstimmt (bei beliebigem n). Und da andererseits nach dem Satze II (p. 9) das gleiche für die Entwickelung von $\lim_{n=\infty} \frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ stattfindet, so ergibt sich die vollkommene Identität der Potenzreihen für $F(x)$ und $\lim_{n=\infty} \frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ und somit die Existenz der Beziehung:

$$\text{(17)} \qquad F(x) = \left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$$

in dem behaupteten Umfange. —

Zusatz I. Das oben beschriebene Entwickelungsverfahren und der soeben bewiesene Satz behalten selbstverständlich ihre Gültigkeit, wenn eine der beiden mit $\mathfrak{P}_0(x)$ und $\mathfrak{P}_1(x)$ bezeichneten Potenzreihen auf die Einheit, also $F(x)$ auf eine einfache Potenzreihe oder deren reziproken Wert sich reduziert.

Zusatz II. Reduziert sich $F(x)$ auf den Quotienten zweier *Polynome*, so muß bei dem obigen Verfahren die Kettenbruch-

---

„*Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita*“ (Werke, 1. Aufl., p. 400) entnehmen möchte. Er findet sich ohne Angabe des Autors in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften II, 2, p. 91, auch bei van Vleck (2), p. 15, scheint aber nicht allgemein bekannt zu sein.

Entwickelung offenbar bei einem bestimmten Gliede abbrechen, mit anderen Worten, eine *rationale* Funktion liefert stets einen *endlichen* Kettenbruch der betrachteten Form. Hieraus folgt aber in Verbindung mit dem Zusatze am Schlusse von Nr. 4, daß ein *unendlicher*, in der Umgebung T von $x = 0$ gleichmäßig konvergierender Kettenbruch dieser Art, daselbst *niemals* eine *rationale* Funktion darstellen kann.[1])

6. Es werde jetzt angenommen, bezüglich der Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]$ stehe zunächst nur soviel fest, daß in einem gewissen zusammenhängenden und abgeschlossenen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T der „*Rest-Kettenbruch*“ $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{\infty}$ bei einer bestimmten, für den ganzen Bereich gleich bleibenden Wahl von $m > 0$ *gleichmäßig konvergiere*. Wird dann mit $\frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)}$ der n^{te} Näherungsbruch dieses Rest-Kettenbruches bezeichnet, so daß also:

$$\frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)} = \left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{m+n}, \tag{18}$$

und setzt man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)} = K_m(x), \tag{19}$$

so repräsentiert wiederum $K_m(x)$ nach Satz I (p. 8) eine in T reguläre analytische Funktion. Man hat sodann:

$$\frac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)} = \frac{B_{m,n}(x) \cdot A_m(x) + A_{m,n}(x) \cdot A_{m-1}(x)}{B_{m,n}(x) \cdot B_m(x) + A_{m,n}(x) \cdot B_{m-1}(x)} \tag{20}$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)} = \frac{A_m(x) + A_{m-1}(x) \cdot K_m(x)}{B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)}, \tag{21}$$

vorausgesetzt, daß der rechts stehende Ausdruck einen Sinn hat.

---

[1]) Auch hier beruht die Sicherheit der gemachten Aussage wieder wesentlich auf der Zugehörigkeit der Stelle $x = 0$ zum Innern von T.

Das letztere wäre aber nur dann *nicht* der Fall, wenn

$$(22) \qquad B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x) = 0,$$

was offenbar wegen des analytischen Charakters dieses Ausdruckes höchstens für eine *endliche* Anzahl dem Bereiche T angehöriger Stellen möglich ist, die dann nur gewöhnliche Nullstellen der in T regulären analytischen Funktion

$$B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)$$

sein können. Andernfalls müßte nämlich der fragliche Ausdruck in T geradezu *identisch* verschwinden, und man hätte daselbst somit

$$-\frac{B_m(x)}{B_{m-1}(x)} = K_m(x), \text{ d. h. } = \left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{\infty},$$

was nach Zusatz II der vorigen Nummer unmöglich ist.[1]

Da andererseits niemals gleichzeitig mit der Gleichung (22) die folgende

$$A_m(x) + A_{m-1}(x) \cdot K_m(x) = 0$$

bestehen kann, denn in diesem Falle hätte man entweder

$$\frac{A_m(x)}{B_m(x)} = \frac{A_{m-1}(x)}{B_{m-1}(x)}$$

oder, falls $K_m(x) = 0$ wäre: $A_m(x) = B_m(x) = 0$, was beides unmöglich ist,[2] so sind solche Stellen, für welche Gl. (22) besteht, *Pole* für die durch $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)}$ repräsentierte analytische Funktion, also Nullstellen für deren reziproken Wert, mit-

[1]) Diese Schlußweise versagt, wenn die Stelle $x = 0$ nicht dem Innern von T angehört. In diesem Falle wäre es also in der Tat denkbar, daß der Ausdruck $B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)$ in T *identisch* verschwindet. Andererseits erscheint diese Möglichkeit aber ausgeschlossen, wenn nur soviel bekannt ist, daß er *für irgend eine einzelne Stelle* des Bereiches T *von Null verschieden* ausfällt, mit anderen Worten (s. Gl. (21)), wenn die *Konvergenz* des Gesamt-Kettenbruches für eine einzige Stelle von T feststeht.

[2]) S. z. B. Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 298.

hin Stellen *„außerwesentlicher" Divergenz*[1]) für den vorgelegten Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]$. Abgesehen von derartigen (im Bereiche T höchstens in endlicher Anzahl vorkommenden) Stellen ist dann der obige Kettenbruch in T durchweg *konvergent* und zwar, wie aus Gl. (20) und der vorausgesetzten *gleichmäßigen* Konvergenz des Rest-Kettenbruches $K_m(x)$ leicht entnommen werden kann, *gleichmäßig* konvergent in jedem Bereiche T', welcher aus T durch Ausschluß beliebig kleiner Umgebungen jener Divergenzstellen (Pole) entsteht.

Bezeichnet man das eben charakterisierte Verhalten durch den Ausdruck: der betreffende Kettenbruch konvergiere im Bereiche T *„im wesentlichen gleichmäßig"*, so läßt sich das Ergebnis der vorstehenden Betrachtung folgendermaßen aussprechen:

Satz V. Weiß man nur, daß in irgend einem zusammenhängenden und abgeschlossenen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{\infty}$, wo $m > 0$, gleichmäßig konvergiert, so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^{\infty}$ daselbst zum mindesten noch im wesentlichen gleichmäßig, und zwar konvergiert er mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen x'. Er stellt dann eine in T eindeutige analytische Funktion dar, welche jene Stellen x' zu Polen hat, sonst im Innern von T sich regulär verhält.[2])

Anmerkung. Ich nenne einen beliebigen unendlichen Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$, dessen Näherungsbrüche wiederum mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ be-

[1]) Bezüglich dieser Ausdrucksweise s. die Anmerkung am Schlusse dieses Paragraphen.

[2]) Enthält der Bereich T die Stelle $x = 0$ *nicht* im Innern, so bleibt der Satz, wie die Fußnote auf der vorigen Seite lehrt, noch gültig, falls die Konvergenz des Gesamt-Kettenbruches für irgend eine einzelne Stelle von T anderweitig feststeht.

zeichnet werden mögen, *außerwesentlich divergent*, wenn die *reziproken Werte* der letzteren *nach Null konvergieren*, was offenbar nicht nur der Fall ist, wenn $\lim_{\nu=\infty}\left|\frac{A_\nu}{B_\nu}\right| = +\infty$, sondern auch dann, wenn unter den Näherungsbrüchen unendlich viele „sinnlose", d. h. solche von der Form $\frac{A_\nu}{0}$, wo $|A_\nu| > 0$, sich befinden, während die Folge der übrigen[1]) absolut genommen nach $+\infty$ divergiert. Ich habe daher diese Form der Divergenz früher[2]) mit dem Ausdrucke bezeichnet: der Kettenbruch *divergiere schlechthin oder im wesentlichen nach* ∞, späterhin diese etwas umständliche Redewendung gelegentlich durch die kürzere (auch von Herrn Perron[3]) angewendete) ersetzt: *er divergiere eigentlich.* Da aber die Bezeichnung „*eigentliche* Divergenz" sonst von mir in einem anderen Sinne gebraucht wird,[4]) so erscheint es mir zweckmäßiger, in dem vorliegenden Zusammenhange die Bezeichnung „*außerwesentliche* Divergenz" einzuführen. In der Tat ist die fragliche Art von Divergenz, ganz abgesehen von der soeben festgestellten Beziehung zu dem Auftreten *außerwesentlich* singulärer Stellen, schon dadurch als eine „*außerwesentliche*" charakterisiert, daß sie durch Weglassung des ersten Teilbruches $\frac{a_1}{b_1}$ aufgehoben wird: bei außerwesentlicher Divergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *konvergiert* der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ allemal nach dem Werte $-b_1$, eventuell sogar *unbedingt*, derart, daß also unter allen Kettenbrüchen $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ der für $m=0$ resultierende dann als der einzig divergente erscheint.

---

1) Unter der Voraussetzung, daß sämtliche a_ν von Null verschieden, ist die Anzahl der nicht sinnlosen Näherungsbrüche stets unbegrenzt: s. Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 303, Fußnote.

2) A. a. O., p. 304.

3) Sitz.-Ber. 37 (1907), p. 484.

4) Nämlich für ein Unendlichwerden *mit bestimmtem Vorzeichen* — s. Enzyklopädie der math. Wissenschaften I, 1, p. 68, 1122.

§ 2. Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$, deren $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben.

1. Bleiben die $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke, so existiert stets eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$, für welche der Kettenbruch gleichmäßig konvergiert. Denn nach einem bekannten, früher von mir abgeleiteten Konvergenz-Kriterium[1]) ist der Kettenbruch überhaupt (und zwar sogar unbedingt) *konvergent*, falls

$$|a_\nu x| \leq \tfrac{1}{4} \quad (\nu = 2, 3, 4 \ldots),$$

also, wenn a die *obere Grenze* der $|a_\nu|$ bezeichnet, für

$$|x| \leq \frac{1}{4a}.$$

Der Umstand, daß nach jenem Kriterium die Konvergenz noch erhalten bleibt, wenn man sämtliche Teilzähler $a_\nu x$ durch $-\frac{1}{4}$ ersetzt, läßt dann leicht erkennen, daß die Konvergenz eine für $|x| \leq \dfrac{1}{4a}$ *gleichmäßige* ist.[2]) Weiter folgt auf demselben Wege, daß zu diesem Bereiche *gleichmäßiger* Konvergenz noch ein gewisser Bereich zum mindesten *im wesentlichen gleichmäßiger* Konvergenz hinzutritt, falls der *obere Limes* der $|a_\nu|$ *kleiner* ausfällt als die *obere Grenze* a.

Das eben bezeichnete Ergebnis soll indessen der Vollständigkeit zu Liebe an dieser Stelle auch unabhängig von dem oben zitierten Konvergenz-Kriterium abgeleitet werden.

2. Wir beweisen also den folgenden Satz:

Besitzen die $|a_\nu|$ $(\nu = 2, 3 \ldots)$ die obere Grenze a, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ unbedingt und gleich-

---

[1]) Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 322, Formel (78).

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. 35 (1905), p. 380 und die Fußnote auf p. 23 der vorliegenden Abhandlung.

mäßig konvergiert für $|x| < \varrho = \dfrac{1}{4a}$. *Ist der obere Limes* a' *der* $|a_\nu|$ *von* a *verschieden, in welchem Falle dann nur* $a' < a$ *sein kann, so konvergiert der Kettenbruch noch mindestens im wesentlichen gleichmäßig für* $\varrho \leqq |x| < r' = \dfrac{1}{4a' + \delta}$, *unter* δ *jede beliebig kleine positive Zahl verstanden.*[1])

Beweis. Man hat:

$$B_1 = 1 \qquad B_2 = 1 + a_2 x, \tag{1}$$

im übrigen für $\nu \geqq 3$:

$$B_\nu = B_{\nu-1} + a_\nu x \cdot B_{\nu-2}. \tag{2}$$

Wird x auf den Bereich $|x| < \varrho = \dfrac{1}{4a}$ beschränkt, so hat man $|a_\nu x| < \frac{1}{4}$ und daher:

$$|B_2| > 1 - |a_2 x| > \tfrac{3}{4}$$

$$|B_\nu| > |B_{\nu-1}| - \tfrac{1}{4}|B_{\nu-2}| \quad (\nu = 3, 4 \ldots),$$

anders geschrieben:

$$|B_\nu| - \tfrac{1}{2}|B_{\nu-1}| > \tfrac{1}{2}(|B_{\nu-1}| - \tfrac{1}{2}|B_{\nu-2}|).$$

Durch Substitution von $\nu = n, (n-1) \ldots 3$ und Multiplikation der resultierenden Ungleichungen folgt hieraus:

$$\begin{aligned} |B_n| - \tfrac{1}{2}|B_{n-1}| &\geqq (\tfrac{1}{2})^{n-2}(|B_2| - \tfrac{1}{2}|B_1|) \\ &> (\tfrac{1}{2})^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese zunächst unter der Voraussetzung $n > 3$ abgeleitete Ungleichung gilt, wie unmittelbar ersichtlich auch noch für $n = 2$ (man hat nämlich $|B_2| - \frac{1}{2}|B_1| \geqq \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$).

---

[1]) Vgl. van Vleck (1), p. 477, 478. Die dort befolgte Beweismethode reicht übrigens nur aus, um die gleichmäßige Konvergenz für

$$|x| \leqq \varrho' < \varrho = \frac{1}{4a}$$

zu beweisen.

Ersetzt man in Ungl. (3) n sukzessive durch $(n-1)$, $(n-2)$, ... 2, multipliziert die resultierenden Ungleichungen bzw. mit $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2})^2$, ... $(\frac{1}{2})^{n-2}$ und addiert sie zu Ungl. (3), so findet man:

$$(4) \qquad B_n - (\tfrac{1}{2})^{n-1} \cdot B_1 \geqq (n-1) \cdot (\tfrac{1}{2})^n,$$

also schließlich mit Berücksichtigung von (1):

$$(5) \qquad B_n \geqq (n+1) \cdot (\tfrac{1}{2})^n.$$

Hieraus folgt zunächst, daß keiner der Näherungsbruch-Nenner $B_n(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ verschwinden kann. Da sodann:

$$(6) \qquad \frac{A_n}{B_n} = a_1 + \sum_2^n{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1}$$

und andererseits mit Benützung von Ungl. (5):

$$(7) \qquad \left| \frac{a_1 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1} \right| \leqq |a_1| \cdot \frac{2^{\nu-1} \cdot 2^\nu}{4^{\nu-1} \cdot \nu(\nu+1)} = |a_1| \cdot \frac{2}{\nu(\nu+1)},$$

so erkennt man, daß die Summe (6) für $|x| \leqq \varrho$ und $\lim n = \infty$ in eine absolut konvergente Reihe übergeht, deren einzelne Glieder absolut genommen die entsprechenden Glieder der absolut konvergenten Reihe

$$|a_1| \left\{ 1 + 2 \sum_2^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \right\}$$

nicht übersteigen und die somit für $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig* konvergiert.[1]) Das letztere gilt somit auch für den mit jener

[1]) Das eben durchgeführte Beweisverfahren besagt im Grunde nichts anderes, als daß der Kettenbruch bzw. die damit äquivalente Reihe noch in dem für die Konvergenz *ungünstigsten* Falle $a_\nu x = -\frac{1}{4}$ $(\nu = 2, 3 \ldots)$ *konvergiert*. In diesem Falle tritt nämlich an die Stelle der *Ungleichung* (5) die *Gleichung*:

$$B_n = (n+1) \cdot (\tfrac{1}{2})^n$$

und es wird demnach:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = a_1 \left(1 + 2 \sum_2^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \right)$$
$$= 2\, a_1,$$

Reihe äquivalenten Kettenbruch. Und da die obere Grenze der $|a_\nu|$ sich keinesfalls erhöhen kann, wenn man lediglich Indices $\nu > m > 2$ in Betracht zieht, so folgt unmittelbar, daß der Kettenbruch auch *unbedingt* konvergiert (so daß also sein Wert für $|x| \leq \varrho$ durchweg von Null verschieden ist).

Wird jetzt ferner angenommen, daß $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} |a_\nu| = a' < a$, so läßt sich zu beliebig kleinem $\delta > 0$ ein n so fixieren, daß:

$$|a_\nu| \leq a' + \frac{\delta}{4} \quad \text{für } \nu > n.$$

Genügt dann x der Bedingung:

$$|x| \leq r' = \frac{1}{4a' + \delta},$$

so ist auf Grund des soeben bewiesenen Satzes der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_n^\infty$ (unbedingt und) gleichmäßig konvergiert, und es konvergiert daher der Gesamt-Kettenbruch noch zum mindesten im wesentlichen gleichmäßig in dem erweiterten Gebiete $\varrho < x \leq r'$.

Zusatz. Unter den gemachten Voraussetzungen stellt der Kettenbruch eine für $0 \leq |x| < \varrho$ $\left(\text{wo } \varrho = \frac{1}{4a}\right)$ eindeutige und von Null verschiedene, zum mindesten für $0 \leq |x| < \varrho$ reguläre analytische Funktion dar. Die Regularität erstreckt sich auch noch auf $|x| = \varrho$, wenn $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} |a_\nu| = a' < a$, während dann die betreffende Funktion für $\varrho < |x| < \varrho'$ $\left(\text{wo } \varrho' = \frac{1}{4a'}\right)$ noch bis auf etwaige Pole regulär ist. Die eventuelle Anzahl dieser letzteren ist für $|x| \leq r' < \varrho'$ stets endlich, könnte aber bei unbegrenzter Annäherung von r' an ϱ' über alle Grenzen wachsen.

---

wie sich übrigens auch durch Auswertung des periodischen Kettenbruchs

$$\frac{a_1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots$$

leicht verifizieren läßt.

Zugleich ergibt sich aus Satz IV des vorigen Paragraphen (p. 15), daß ein Kettenbruch der vorliegenden Art, falls er durch formale Entwickelung von $F(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ gewonnen wird, die Funktion $F(x)$ bzw. auch deren analytische Fortsetzung wirklich darstellt.

§ 3. Der Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$. — Der Heinesche Kettenbruch und die Heinesche Reihe.

1. Besonders einfach gestaltet sich der Fall $a' = \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} |a_\nu| = 0$, d. h. schließlich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0.$$

Da sodann $\varrho' = \frac{1}{\delta}$ d. h. beliebig groß wird, so konvergiert der betreffende Kettenbruch in jedem noch so großen endlichen Bereiche zum mindesten im wesentlichen gleichmäßig, für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ schlechthin gleichmäßig. Da er also keinesfalls eine rationale Funktion darstellen kann, so ergibt sich der folgende Satz:

Ist $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, *so konvergiert der Kettenbruch* $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ *in jedem noch so großen endlichen Bereiche mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen. Er stellt eine in der Umgebung von* $x = 0$ *reguläre, im übrigen bis auf etwaige*[1]) *Pole reguläre analytische Funktion mit der wesentlich singulären Stelle* $x = \infty$ *dar.*

[1]) Die Pole können auch gänzlich fehlen, so daß also dann der betreffende Kettenbruch eine *ganze* transzendente Funktion darstellt. Man hat z. B.

$$e^x = \frac{1|}{|1} - \frac{x|}{|1} + \frac{\frac{1}{2}x|}{|1} - \frac{\frac{1}{2\cdot 3}x|}{|1} + \frac{\frac{1}{2\cdot 3}x|}{|1} - \frac{\frac{1}{2\cdot 5}x|}{|1} + \frac{\frac{1}{2\cdot 5}x|}{|1} - \cdots$$

2. Dem hier betrachteten Typus gehört der Kettenbruch an, den Heine für den Quotienten zweier verallgemeinerter hypergeometrischer („Heinescher") Reihen abgeleitet hat.[1]) Es werde gesetzt:

$$(1) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$
$$= 1 + \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{(1-q^{\alpha})\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})(1-q^{\beta})\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q^{\gamma})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})(1-q)\ldots(1-q^{\nu})} \cdot x^{\nu},$$

wo α, β, γ, q beliebige reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, lediglich mit der Beschränkung, daß γ weder Null, noch ganzzahlig negativ und $|q| < 1$;[2]) die Potenzen von q sind als Hauptwerte zu verstehen. Die Reihe konvergiert, wie unmittelbar aus dem Cauchyschen Haupt-Kriterium zweiter Art hervorgeht, für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$ (übrigens auch für $|x| = 1$, da die Koeffizienten bei unbegrenzt wachsendem Index, in Folge der Konvergenz der im Zähler und Nenner auftretenden Produkte, bestimmte von Null verschiedene Grenzwerte besitzen); ist mindestens eine der Zahlen α, β negativ ganzzahlig, so reduziert sich die Reihe auf ein Polynom, im Falle $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ auf das Anfangsglied 1.

(Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136; daselbst steht infolge eines Druckfehlers im dritten Gliede $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{2}$), oder auch:

$$e^x = 1 + \frac{x|}{|1} - \frac{\frac{1}{2}x|}{|1} + \frac{\frac{1}{2\cdot 3}x|}{|1} - \frac{\frac{1}{2\cdot 3}x|}{|1} + \frac{\frac{1}{2\cdot 5}x|}{|1} - \frac{\frac{1}{2\cdot 5}x|}{|1} + \ldots$$

(Lagrange, Oeuvres T. 4, p. 317).

[1]) Dies gilt mit einer unerheblichen Modifikation auch für den „Besselschen" Kettenbruch, d. h. die Kettenbruch-Entwickelung des Quotienten zweier Besselscher Funktionen, deren Indices sich um eine additive Einheit unterscheiden. S. van Vleck (1), Nr. 10.

[2]) Der Fall $|q| > 1$ kann mit Hilfe der unmittelbar ersichtlichen Beziehung:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x\right)$$

auf den im Text behandelten zurückgeführt werden. Für $q = 1$, genauer gesagt für $\lim q = 1$ geht die Reihe in die gewöhnliche hypergeometrische über.

Für den Quotienten zweier solcher Reihen besteht dann, wie Heine *rein formal* abgeleitet hat,[1]) eine Kettenbruch-Entwickelung von der Form:

$$(2)\qquad \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} = \left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty,$$

wo $a_1 = 1$, im übrigen:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{2\mu} = -q^{\beta+\mu-1} \cdot \dfrac{(1-q^{\alpha+\mu-1})(1-q^{\gamma-\beta+\mu-1})}{(1-q^{\gamma+2\mu-2})(1-q^{\gamma+2\mu-1})} \\ a_{2\mu+1} = -q^{\alpha+\mu-1} \cdot \dfrac{(1-q^{\beta+\mu})(1-q^{\gamma-\alpha+\mu})}{(1-q^{\gamma+2\mu-1})(1-q^{\gamma+2\mu})} \end{cases} \qquad (\mu = 1, 2, 3 \ldots).$$

Da hiernach $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ wird, so ergibt sich auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen, daß die Entwickelung (2) in der Umgebung von $x = 0$ wirklich gültig ist und daß der in jedem endlichen Bereiche bis auf eine endliche Zahl außerwesentlicher Divergenz-Stellen konvergierende Kettenbruch als analytische Fortsetzung des obigen Reihen-Quotienten eine eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert (und zwar mit der wesentlich singulären Stelle $x = \infty$, außer wenn der Kettenbruch sich auf einen endlichen reduziert, was allemal dann und nur dann der Fall ist, wenn $\alpha - \gamma$ positiv ganzzahlig bzw. $\beta - \gamma$ positiv ganzzahlig oder Null).

Es fragt sich nun, ob der analoge Funktions-Charakter auch der Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ an sich zukommt. Denn aus

[1]) Mitteilung des Resultates im Journ. f. Math. 32 (1846), p. 212; Herleitung ebendaselbst 34 (1847), p. 294; genauere Untersuchung der Näherungsbrüche ebendaselbst 57 (1860), p. 237 ff. Vgl. auch Handbuch der Kugelfunktionen 1 (2. Aufl. 1878), p. 284. — Die wirkliche Gültigkeit der Entwickelung (2) bzw. die Konvergenz des fraglichen Kettenbruches scheint mir von Heine nicht bewiesen worden zu sein. So viel ich übersehen kann, finden sich die betreffenden Beweise in der Literatur überhaupt zum ersten Male in der oben (p. 7) bereits erwähnten Abhandlung des Herrn J. Thomae: Journ. f. Math. 70 (1864), p. 278, Art. 7 und zwar nur implicite, mit allgemeineren, äußerst verwickelten Untersuchungen verknüpft; in elementarer, auf den einfachen, auch hier benützten Prinzipien beruhender Form zuerst bei van Vleck (2), Nr. 13.

der eben erwiesenen Beschaffenheit des obigen Reihen-*Quotienten* könnte noch nicht einmal gefolgert werden, daß das Funktions-Element $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine *eindeutige* Funktion definiert.[1]) Das fragliche Resultat läßt sich aber in folgender Weise erschließen. Setzt man in (2): $\beta = 0$ und beachtet, daß $\varphi(\alpha, 0, \gamma, q, x) \equiv 1$ wird, so folgt, wenn man noch γ statt $\gamma + 1$ substituiert:

$$(4)\ \varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})} \cdot x^\nu = \left[\frac{1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty,$$

$$(5)\ \begin{cases} a_{2\mu} = -q^{\mu-1} \cdot \dfrac{(1-q^{\alpha+\mu-1})(1-q^{\gamma+\mu-2})}{(1-q^{\gamma+2\mu-3})(1-q^{\gamma+2\mu-2})} \\ a_{2\mu+1} = -q^{\alpha+\mu-1} \cdot \dfrac{(1-q^\mu)(1-q^{\gamma-\alpha+\mu})}{(1-q^{\gamma+2\mu-2})(1-q^{\gamma+2\mu-1})} \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, 3\ldots),$$

so daß also auch $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x)$ eine eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert.

Das gleiche gilt dann aber offenbar von dem aus $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x)$ durch die Substitution $\alpha = \beta$, $\gamma = 1$ hervorgehenden Funktions-Elemente:

$$(6)\quad \varphi(\beta, 1, 1, q, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(1-q^\beta)\ldots(1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q)\ldots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu$$

und da die Multiplikation der Koeffizienten gleich hoher Potenzen der Reihen (4) und (6) die Koeffizienten von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ liefert, so folgt aus einer Bemerkung des Herrn Borel[2]) zu einem bekannten Hadamardschen Satze[3]) über den Zusammenhang der Singularitäten der durch drei Funktions-Elemente von der Form $\sum A_\nu x^\nu$, $\sum B_\nu x^\nu$, $\sum A_\nu B_\nu x^\nu$ definierten analytischen Funktionen, daß auch $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ *eine eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert.*

3. Nachdem die Natur der fraglichen Funktion so weit bestimmt ist, läßt sich Lage und Ordnung der Pole durch die

---

[1]) So ist z. B. $\dfrac{\sin a\sqrt{x}}{\sin b\sqrt{x}}$ eine ganze transzendente Funktion, obschon Zähler und Nenner einzeln genommen zweiwertige Funktionen sind.

[2]) Bull. soc. math. de France 26 (1898), p. 241, 247.

[3]) Acta math. 22 (1899), p. 55.

folgende Überlegung vollständig ermitteln. Da die Koeffizienten der Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$, wie schon oben bemerkt wurde, einem endlichen Grenzwerte zustreben und die Funktion auf dem Konvergenz-Kreise von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ nur *Pole* besitzen kann, so müssen diese von der *ersten* Ordnung sein. Und da der Quotient zweier konsekutiver Koeffizienten den Grenzwert 1 besitzt, so muß $x = 1$ ein solcher Pol und zwar auf dem Konvergenz-Kreise der *einzige* dieser Art sein (da das Vorhandensein von weiteren Polen erster Ordnung auf dem Einheitskreise die Existenz jenes Grenzwertes verhindern würde, andererseits das Auftreten von *niedrigeren* Singularitäten definitiv ausgeschlossen ist). Hieraus folgt aber, daß $(1 - x) \cdot \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ innerhalb eines Kreises $|x| < r_1$, wo $r_1 > 1$, regulär sein muß und daß für die Bestimmung der — abgesehen von $x = 1$ — dem Nullpunkte *nächst*gelegenen Pole die Potenzreihe $(1 - x) \cdot \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ maßgebend ist. Um das Bildungsgesetz dieser letzteren möglichst übersichtlich darstellen zu können, erweist es sich als zweckmäßig, statt der Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ eine noch etwas allgemeinere einzuführen, deren Koeffizienten statt der Faktoren $(1 - q)$, $(1 - q^2)$, ... voller Symmetrie zu Liebe solche von der Form $(1 - q^\delta)$, $(1 - q^{\delta+1})$, ... enthalten. Wir definieren hiernach:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x) = \sum_0^\infty f_\nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q) \cdot x^\nu, \tag{7}$$

wo:

$$f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q) = 1, \qquad f_\nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q)$$

$$= \frac{(1 - q^\alpha) \ldots (1 - q^{\alpha+\nu-1})(1 - q^\beta) \ldots (1 - q^{\beta+\nu-1})}{(1 - q^\gamma) \ldots (1 - q^{\gamma+\nu-1})(1 - q^\delta) \ldots (1 - q^{\delta+\nu-1})} \tag{8}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so daß also speziell:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, 1, q, x) \equiv \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x). \tag{9}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise möge im folgenden das Element q, da es in allen Formeln unverändert bleibt, weggelassen werden. Man hat sodann:

$$(1-x)\cdot\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x) = 1+\sum_1^\infty{}^{\nu}\{f_\nu(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-f_{\nu-1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\}\cdot x^\nu$$
$$= 1+x\cdot\sum_0^\infty{}^{\nu}\{f_{\nu+1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-f_\nu(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\}\cdot x_\nu.$$

Nun ist:

$$f_{\nu+1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = f_\nu(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot\frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})},$$

also:

$$f_{\nu+1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-f_\nu(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$
$$= f_\nu(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\frac{q^{\delta+\nu}+q^{\gamma+\nu}-q^{\beta+\nu}-q^{\alpha+\nu}+q^{\alpha+\beta+2\nu}-q^{\gamma+\delta+2\nu}}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}$$
$$= \frac{f_\nu(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1)}{(1-q)^\gamma(1-q)^\delta}\{(q^\delta+q^\gamma-q^\beta-q^\alpha)\cdot q^\nu+(q^{\alpha+\beta}-q^{\gamma+\delta})\cdot q^{2\nu}\},$$

so daß sich ergibt:

$$(1-x)\cdot\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)$$
$$= 1+\frac{q^\delta+q^\gamma-q^\beta-q^\alpha}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)}\cdot x\cdot\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1)\cdot q^\nu x^\nu$$
$$+\frac{q^{\alpha+\beta}-q^{\gamma+\delta}}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)}\cdot x\cdot\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1)\cdot q^{2\nu}x^\nu,$$

d. h. schließlich

$$(10)\qquad (1-x)\cdot\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)$$
$$= 1+\frac{q^\delta+q^\gamma-q^\beta-q^\alpha}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)}\cdot x\cdot\Phi(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1,qx)$$
$$+\frac{q^{\alpha+\beta}-q^{\gamma+\delta}}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)}\cdot x\cdot\Phi(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1,q^2x).$$

Da die erste der rechts auftretenden Φ-Reihen den Konvergenz-Radius $\left|\frac{1}{q}\right|$, die zweite sogar den Konvergenz-Radius $\left|\frac{1}{q^2}\right|$ besitzt, so zeigt diese Gleichung *erstens*, daß die Stelle $x=1$ auch für diese etwas allgemeinere Reihe $\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)$ die *einzige* Singularität auf dem Einheitskreise und zwar ein *Pol erster Ordnung* ist. Und da $\Phi(\alpha,\beta,\gamma+1,\delta+1,qx)$ auf dem Kreise mit dem Radius $\left|\frac{1}{q}\right|$ sich ganz analog verhalten muß, $\Phi(\alpha, \beta, \gamma+1, \delta+1, q^2 x)$ daselbst noch konvergiert, so folgt aus Gl. (10) *zweitens*, daß die Stelle $x = \frac{1}{q}$ den *nächsten* Pol (außer $x = 1$) für $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ liefert und zwar wiederum als einen solchen *erster* Ordnung. Derselbe kann offenbar eventuell *fehlen*, wenn nämlich der Koeffizient von $\Phi(\alpha, \beta, \delta+1, q x)$ verschwindet, wenn also:

(11) $$q^\alpha + q^\beta = q^\gamma + q^\delta.$$

Da alsdann der Koeffizient des letzten Gliedes von Gl. (10) keinesfalls gleichzeitig verschwinden kann, so folgt, daß dann mit Sicherheit $\frac{1}{q^2}$ als nächster *Pol* auftreten *muß* (außer wenn $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, in welchem Falle sich in der Tat $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ auf $\sum_0^\infty{}_\nu\, x^\nu$, also auf $\frac{1}{1-x}$ reduziert). Findet die spezielle Relation (11) *nicht* statt, so liefert die Anwendung der Formel (10) auf $\Phi(\alpha, \beta, \gamma+1, \delta+1, q x)$ zur weiteren Transformation von $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ die Beziehung:

(11) $$\begin{aligned} &(1-q x) \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma+1, \delta+1, q x) \\ &= 1 + \frac{q^{\delta+1} + q^{\gamma+1} - q^\beta - q^\alpha}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\delta+1})} \cdot x \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma+2, \delta+2, q^2 x) \\ &\quad + \frac{q^{\alpha+\beta} - q^{\gamma+\delta+2}}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\delta+1})} \cdot x \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma+2, \delta+2, q^3 x), \end{aligned}$$

an welche sich dann wieder die analogen Folgerungen knüpfen lassen, wie an Gl. (10). Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich also:

Die durch das Funktions-Element $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$, also im Falle $\delta = 1$ durch die Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ definierte, in der ganzen Ebene eindeutige, analytische Funktion besitzt außer dem einfachen Pole $x = 1$ nur noch gleichfalls durchweg einfache Pole aus der Reihe der Zahlen $\left(\frac{1}{q}\right)^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$.

Hieraus folgt, daß $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ durch Multiplikation mit dem konvergenten Produkte $\prod_0^\infty {}^\nu (1 - q^\nu x)$ in eine *ganze transzendente Funktion* übergeht (welche für diejenigen Stellen $\frac{1}{q^\nu}$, die infolge besonderer Beschaffenheit der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *nicht* Pole von $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ sein sollten, verschwinden würde). Da aber andererseits:[1])

$$\prod_0^\infty {}^\nu (1 - q^\nu x) = 1 + \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{q^{\frac{1}{2}(\nu-1)\cdot\nu}}{(1-q)\ldots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu,$$

so lassen sich die Koeffizienten c_ν jener ganzen transzendenten Funktion unmittelbar aus der Gleichung bestimmen:

$$(12)\quad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x) \cdot \left\{1 + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu \cdot q^{\frac{1}{2}(\nu-1)\cdot\nu}}{(1-q)\ldots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu\right\},$$

und man gewinnt also auf diese Weise für die durch $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ (speziell auch durch $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$) definierte analytische Funktion eine, gerade so wie die Kettenbruch-Darstellung für $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)$, in der ganzen Ebene gültige Darstellung durch den Quotienten zweier ganzer transzendenten Funktionen:[2])

$$(13)\qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x) = \frac{\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu}{\prod_0^\infty {}^\nu (1 - q^\nu x)},$$

wo:

---

[1]) Euler, Introductio in analysin infinitorum (Lausanne 1748), T. I, Cap. XVI, p. 259. — Weitere Literatur s. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I, 1, p. 116, Fußn. 320.

[2]) Eine mit Gl. (13) im wesentlichen gleichwertige Relation findet man in der oben zitierten Abhandlung des Herrn Thomae (a. a. O., p. 275 (22). Es ist das gerade die in der Einleitung erwähnte Formel, aus welcher erschlossen werden kann, daß die Heinesche Reihe eine eindeutige analytische Funktion mit lauter einfachen Polen von der Form $\frac{1}{q^\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ definiert.

$$(14) \quad \begin{gathered} c_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda f_{\nu-\lambda}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q) \cdot Q_\lambda \\ \left(Q_0 = 1,\ Q_\lambda = \frac{(-1)^\lambda \cdot q^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\lambda}}{(1-q)\ldots(1-q^\lambda)} \text{ für } \lambda \geq 1\right). \end{gathered}$$

4. Die Transformations-Formel (10) nimmt eine besonders einfache Gestalt an und gestattet sodann noch eine weitere zweckmäßige Umformung, wenn speziell $\beta = \gamma$ ist, in welchem Falle man, da die von β und γ abhängigen Faktoren ganz herausfallen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit geradezu $\beta = \gamma = 1$ setzen kann. Die betreffende Rechnung gestaltet sich übrigens etwas bequemer, wenn man, statt in Gl. (10) $\beta = \gamma = 1$ zu setzen, die betreffende Formel ganz direkt herleitet. Es ist

$$(15) \qquad \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) = \sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) \cdot x^\nu,$$

wo:

$$(16) \quad f_0(\alpha, 1, 1, \delta) = 1, \quad f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) = \frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q^\delta)\ldots(1-q^{\delta+\nu-1})},$$

also:

$$f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) = \frac{1-q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)$$

$$\begin{aligned} f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) &= \frac{q^{\delta+\nu} - q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) \\ &= \frac{q^\delta - q^\alpha}{1-q^\delta} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta+1) \cdot q^\nu. \end{aligned}$$

Somit tritt hier an die Stelle von Gleichung (10) zunächst die folgende:

$$(17) \quad \begin{aligned} (1-x)\cdot\Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) &= 1 + x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \{f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)\} \cdot x^\nu \\ &= 1 + \frac{q^\delta - q^\alpha}{1-q^\delta} \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta+1, qx), \end{aligned}$$

aus welcher hervorgeht, daß $\Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x)$ stets *sämtliche* Zahlen $\frac{1}{q^\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ zu einfachen Polen hat, außer wenn

$a = \delta + n$, wo $n = 0$ oder eine positive ganze Zahl, in welchem Falle offenbar $\Phi(a, 1, 1, \delta, x)$ sich auf eine rationale Funktion mit den Polen $1, \ldots \frac{1}{q^n}$ reduziert.

Nun ist aber andererseits:

$$\begin{aligned}
&(q^{\delta-1} - q^a x) \cdot \Phi(a, 1, 1, \delta, q x) \\
&= q^{\delta-1} + x \sum_0^\infty {}^\nu \{q^\delta \cdot f_{\nu+1}(a, 1, 1, \delta) - q^a \cdot f_\nu(a, 1, 1, \delta)\} \cdot q^\nu x^\nu
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
q^\delta \cdot f_{\nu+1}(a,1,1,\delta) - q^a \cdot f_\nu(a,1,1,\delta) &= \left(q^\delta \cdot \frac{1-q^{a+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} - q^a\right) \cdot f_\nu(a,1,1,\delta) \\
&= \frac{q^\delta - q^a}{1-q^\delta} \cdot f_\nu(a, 1, 1, \delta+1),
\end{aligned}$$

folglich:

$$(18)\quad (1-x)\,\Phi(a,1,1,\delta,x) = 1 - q^{\delta-1} + (q^{\delta-1} - q^a x) \cdot \Phi(a,1,1,\delta,qx),$$

so daß sich durch Subtraktion der letzten Gleichung von Gl. (17) schließlich ergibt:

$$(19)\quad (1-x)\Phi(a,1,1,\delta,x) = 1 - q^{\delta-1} + (q^{\delta-1} - q^a x) \cdot \Phi(a,1,1,\delta,qx).$$

Nimmt man hier speziell $\delta = 1$, so daß also $\Phi(a, 1, 1, \delta, x)$ in die Heinesche Reihe

$$\varphi(a, 1, 1, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{(1-q^a) \ldots (1-q^{a+\nu-1})}{(1-q) \ldots (1-q^\nu)} \cdot x^\nu$$

übergeht, so liefert Gl. (19) die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\varphi(a,1,1,x) &= \frac{1-q^a x}{1-x}\,\varphi(a, 1, 1, q x) \\
&= \frac{1-q^a x}{1-x} \cdot \frac{1-q^{a+1} x}{1-q x} \cdot \varphi(a, 1, 1, q^2 x) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{(1-q^a x)}{1-x} \cdot \frac{1-q^{a+1} x}{1-q x} \cdots \frac{1-q^{a+n} x}{1-q^n x} \cdot \varphi(a,1,1,q^{n+1} x)
\end{aligned}$$

und somit, wegen $\lim_{n=\infty} \varphi(a, 1, 1, q^{n+1} x) = 1$, schließlich:[1])

[1]) Vgl. Heine, Journ. f. Math. 34 (1847), p. 303, Formel 74.

$$(20)\quad 1 + \sum_1^\infty{}^\nu \frac{(1-q^a)\dots(1-q^{a+\nu-1})}{(1-q)\dots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu = \prod_0^\infty{}^\nu \frac{(1-q^{a+\nu}x)}{(1-q^\nu x)},$$

eine Formel, aus der sich durch Spezialisierung von a, Ersatz von x durch $q^a x$ etc. mannigfache andere für die Theorie der elliptischen Funktionen und die Zahlentheorie nützliche Beziehungen herleiten lassen.[1])

Setzt man in (19) $a = 1$, $\delta = 2$, wobei also

$$\Phi(1, 1, 1, 2, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} \cdot x^\nu$$

resultiert, so ergibt sich aus Gl. (19), wenn man diese Reihe zur Abkürzung mit $\Phi(x)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1-q}{1-x} + q \cdot \Phi(qx) \\ &= \frac{1-q}{1-x} + \frac{q\cdot(1-q)}{1-qx} + q^2 \cdot \Phi(q^2 x)\end{aligned}$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens, mit Berücksichtigung von $\lim\limits_{n=\infty} \Phi(q^n x) = 1$:

$$\Phi(x) = (1-q)\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{q}{1-qx} + \frac{q^2}{1-q^2 x} + \dots\right\}$$

d. h. schließlich:

$$(21)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu \frac{x^\nu}{1-q^{\nu+1}} = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{q^\nu}{1-q^\nu x}.\,^{2)}$$

---

[1]) S. z. B. Heine, a. a. O., p. 304 ff.
[2]) S. z. B. Heine, a. a. O., p. 307.

§ 4. Der Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, wo $|a| > 0$. — Der Poincarésche Satz. — Der Gausssche Kettenbruch und die hypergeometrische Reihe.

1. Besitzen die Teilzähler des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwert a, so gehört der Kettenbruch derjenigen Klasse an, die ich als (eingliedrig) *limitär-periodisch* bezeichne, da ein solcher Kettenbruch offenbar im Unendlichen näherungsweise wie der periodische Kettenbruch $\frac{a\,x|}{|1} + \frac{a\,x|}{|1} + \cdots$ sich verhält.[1] Das Vorbild für die Behandlung eines solchen Kettenbruches wird also zweckmäßig dieser letztere liefern. Zähler und Nenner der Näherungsbrüche genügen hier der gemeinsamen Rekursionsformel

(1) $$D_{\nu+1} - D_\nu - a\,x\,D_{\nu-1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

deren Auflösung sich in folgender Weise bewerkstelligen läßt. Bestimmt man zwei Zahlen z und z' derart, daß:

(2) $$z + z' = 1, \qquad z\,z' = -\,a\,x,$$

mit anderen Worten, bezeichnet man mit z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(3) $$y^2 - y - a\,x = 0,$$

wo $|z| > |z'|$ sein soll, sofern die Wurzeln dieser Gleichung überhaupt *verschiedene* absolute Beträge besitzen, so läßt sich die Rekursionsformel (1) auf die Form bringen:

$$D_{\nu+1} - (z + z')\,D_\nu + z\,z'\,D_{\nu-1} = 0,$$

anders geschrieben:

(4) $$D_{\nu+1} - z\,D_\nu = z'(D_\nu - z\,D_{\nu-1}),$$

[1]) Der im vorigen Paragraphen bereits erledigte Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ nimmt offenbar von vornherein eine Ausnahme-Stellung ein, da der entsprechende periodische Kettenbruch identisch Null wäre. Dieser besondere Fall scheidet also für das folgende definitiv aus.

woraus durch Substitution von $\nu = 1, 2, \ldots (n-1)$ und Multiplikation der betreffenden Gleichungen folgt:

$$D_n - z D_{n-1} = z'^{n-1}(D_1 - z D_0). \tag{5}$$

Ersetzt man hier n der Reihe nach durch $n-1, n-2, \ldots 1$, multipliziert die resultierenden Gleichungen bzw. mit $z, z^2, \ldots z^{n-1}$ und addiert sie zu Gl. (4), so ergibt sich weiter:

$$D_n - z^n D_0 = (z'^{n-1} + z'^{n-2} \cdot z + \cdots + z' \cdot z^{n-2} + z^{n-1})(D_1 - z D_0)$$

$$= \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot (D_1 - z D_0). \tag{6}$$

Bezeichnet man jetzt wieder die Näherungsbrüche des Kettenbruches mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, so hat man zu setzen:

im Falle $D_\nu = A_\nu : D_0 = 0,\ D_1 = a x$,
im Falle $D_\nu = B_\nu : D_0 = 1,\ D_1 = 1$.

Somit ergibt sich:

$$A_n = \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot a x = -\frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot z z'$$

$$B_n = z^n + \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot z' = \frac{z^{n+1} - z'^{n+1}}{z - z'}$$

und daher:

$$\frac{A_n}{B_n} = -\frac{z^n - z'^n}{z^{n+1} - z'^{n+1}} \cdot z z' = -\frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta^{n+1}} \cdot z', \quad \text{wo: } \zeta = \frac{z'}{z}. \tag{7}$$

Daraus folgt weiter:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = -z',^{1)} \tag{8}$$

[1]) Die Form dieses Resultates ist von der zumeist üblichen durch das Vorzeichen verschieden. Bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der periodischen Kettenbrüche erscheint nämlich als determinierende quadratische Gleichung statt Gl. (3) die folgende

$$y^2 + y - a x = 0,$$

und man findet sodann:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = z_1,$$

sofern $|\zeta| < 1$, während im Falle $|\zeta| = 1$ der fragliche Grenzwert nicht existiert, der Kettenbruch also divergiert. Da aber:

$$(9) \quad \zeta = \frac{1 - \sqrt{4ax+1}}{1 + \sqrt{4ax+1}} \left(\text{wegen: } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4ax+1}) \\ z' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4ax+1}) \end{cases}\right),$$

(wenn man unter der Quadratwurzel deren Hauptwert versteht), so wird $|\zeta| = 1$ dann und nur dann, wenn $\sqrt{4ax+1}$ verschwindet oder rein imaginär ausfällt, also wenn ax *negativ reell* und zwar:

$$(10) \qquad ax \leqq -\tfrac{1}{4},$$

geometrisch gesprochen, wenn x auf einer vom Punkte $-\frac{1}{4a}$ in der Richtung der Verbindungslinie $\left(0, -\frac{1}{4a}\right)$ ins Unendliche sich erstreckenden Geraden L liegt. Denkt man sich längs L die Ebene zerschnitten und bezeichnet den so geschaffenen Bereich mit T, so konvergiert der vorgelegte Kettenbruch mit der eingliedrigen Periode $\frac{ax}{1}$ für jeden endlichen Wert x im Innern von T. Er konvergiert übrigens, wie mit Hilfe von Gl. (7) leicht erkannt wird, für jeden im Innern von T liegenden abgeschlossenen Bereich T' gleichmäßig.

2. Dies vorausgeschickt betrachten wir den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$, für welchen $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, unter der Voraussetzung, daß x auf einen Bereich, wie er soeben mit T' bezeichnet wurde, eingeschränkt werde.[1]) Man hat dann durchweg $|\zeta| < 1$, also

---

wenn z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel *dieser* Gleichung bedeutet. In der Tat ist aber:

$$z_1 = -z'.$$

[1]) Man denke sich etwa T' begrenzt durch einen Kreis mit beliebig großem Radius um den Nullpunkt, zwei in beliebig kleinem Abstande δ von der Geraden L zu dieser gezogenen Parallelen und einem Halbkreise um den Punkt $-\frac{1}{4a}$ mit dem Radius δ.

wenn das *Maximum* von $|\zeta|$ für alle x des Bereiches T' mit $\bar{\zeta}$ bezeichnet wird:

$$(11) \qquad |\zeta| \leqq \bar{\zeta} < 1.$$

Zähler und Nenner jenes Kettenbruches genügen jetzt der Rekursionsformel:

$$(12) \qquad D_{\nu+1} - D_\nu - a_{\nu+1}\, x \cdot D_{\nu-1} = 0 \ (\nu = 1, 2, 3 \ldots).$$

Um diese in analoger Weise behandeln zu können, wie die Rekursionsformel (1), definieren wir eine unbegrenzte Folge von Zahlen z_ν, z'_ν, von einem später noch genauer zu fixierenden Stellenzeiger $\nu = n_0$ anfangend, durch die Gleichungen:

$$(13) \qquad z_\nu + z'_\nu = z_{\nu+1} + z'_{\nu+1} = 1 \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}\, x.$$

Alsdann läßt sich Gl. (12) in die Form setzen:

$$D_{\nu+1} - (z_{\nu+1} + z'_{\nu+1})\, D_\nu + z_\nu z'_{\nu+1}\, D_{\nu-1} = 0,$$

anders geschrieben:

$$(14) \qquad D_{\nu+1} - z_{\nu+1}\, D_\nu = z'_{\nu+1}\,(D_\nu - z_\nu\, D_{\nu-1}).$$

Ehe wir diese Formel auflösen, wollen wir zeigen, daß die Folge der z_ν, z'_ν bei geeigneter Fixierung eines Anfangswertes für z_ν aus eindeutig bestimmten Zahlen besteht und daß z_ν, z'_ν bei unbegrenzt wachsendem ν im Bereiche T' *gleichmäßig* gegen z, z' konvergieren.

3. Aus den Definitions-Gleichungen (13) folgt zunächst:

$$z_\nu (1 - z_{\nu+1}) = -a_{\nu+1}\, x,$$

also:

$$(15) \qquad z_{\nu+1} = \frac{z_\nu + a_{\nu+1}\, x}{z_\nu}$$

und daher:

$$z - z_{\nu+1} = \frac{z_\nu (z - 1) - a_{\nu+1}\, x}{z_\nu}$$

$$= \frac{-z_\nu z' + z z' + a\, x - a_{\nu+1}\, x}{z_\nu} \quad \text{(s. Gl. (2))}$$

$$= \frac{z' (z - z_\nu) + (a - a_{\nu+1})\, x}{z - (z - z_\nu)}$$

$$1-\frac{z_{\nu+1}}{z}=\frac{\zeta\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)-\zeta\cdot\frac{a-a_{\nu+1}}{a}}{1-\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)}\quad\left(\text{wegen: }\frac{a\,x}{z^2}=-\frac{z'}{z}=-\zeta\right)$$

$$(16)\qquad \left|1-\frac{z_{\nu+1}}{z}\right|<\bar{\zeta}\cdot\frac{\left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|+\left|1-\frac{a_{\nu+1}}{a}\right|}{\left|1-\left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|\right|}.$$

Angenommen, es sei für irgend ein bestimmtes ν:

$$(17)\qquad \left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|\leqq 1-\vartheta,\ \text{ also: } 1-\left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|\geqq\vartheta,$$

wo:

$$(18)\qquad \vartheta=\left|\bar{\zeta}^{\frac{1}{3}}\right|,$$

so geht die Ungleichung (16) in die folgende über:

$$(18)\qquad \left|1-\frac{z_{\nu+1}}{z}\right|\leqq\vartheta^2\left(\left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|+\left|1-\frac{a_{\nu+1}}{a}\right|\right),$$

und, wenn man eine Reihe wachsender natürlicher Zahlen n_λ ($\lambda=0,1,2\ldots$) so bestimmt, daß:

$$(19)\qquad \left|1-\frac{a_{\nu+1}}{a}\right|\leqq\vartheta^{\lambda-1}(1-\vartheta)^2\ \text{ für } \nu\geqq n_\lambda,$$

(was, wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu=a$, stets möglich sein muß), so ergibt sich weiter:

$$(20)\qquad \left|1-\frac{z_{\nu+1}}{z}\right|\leqq\vartheta^2\left|1-\frac{z_\nu}{z}\right|+\vartheta^{\lambda+1}(1-\vartheta)^2\quad(\nu\geqq n_\lambda),$$

sofern nur z_ν der Bedingung (17) genügt.

Als *Anfangswert* der z_ν fixieren wir nun z_{n_0} durch die Gleichung:

$$(21)\qquad z_{n_0}=\vartheta\cdot z,$$

so daß also:

$$\left|1-\frac{z_{n_0}}{z}\right|=1-\frac{z_{n_0}}{z}=1-\vartheta$$

und somit zunächst für $\nu = n_0$ die Bedingung (17) wirklich erfüllt ist. Dann besteht aber für $\nu = n_0$ auch Ungl. (20), sofern man daselbst $\lambda = 0$ setzt, also:

$$\left|1 - \frac{z_{n_0+1}}{z}\right| < \vartheta^2 (1 - \vartheta) + \vartheta (1 - \vartheta)^2 = \vartheta (1 - \vartheta)$$

und *a fortiori*:

$$\left|1 - \frac{z_{n_0+1}}{z}\right| < 1 - \vartheta.$$

Somit ergibt sich durch dieselbe Schlußweise:

$$\left|1 - \frac{z_{n_0+2}}{z}\right| < \vartheta (1 - \vartheta) < (1 - \vartheta)$$

u. s. f. bis:

$$\left|1 - \frac{z_{n_1}}{z}\right| < \vartheta (1 - \vartheta).$$

Sodann aber folgt aus (20) (bei $\lambda = 1$):

$$\left|1 - \frac{z_{n_1+1}}{z}\right| < \vartheta^3 (1 - \vartheta) + \vartheta^2 (1 - \vartheta)^2 = \vartheta^2 (1 - \vartheta)$$

und *a fortiori*:

$$\left|1 - \frac{z_{n_1+1}}{z}\right| < \vartheta (1 - \vartheta),$$

somit auch wieder:

$$\left|1 - \frac{z_{n_1+2}}{z}\right| < \vartheta^2 (1 - \vartheta) < \vartheta (1 - \vartheta)$$

u. s. f. bis:

$$\left|1 - \frac{z_{n_2}}{z}\right| < \vartheta^2 (1 - \vartheta),$$

worauf dann wiederum Ungl. (20) bei $\lambda = 2$ ergibt:

$$\left|1 - \frac{z_{n_2+1}}{z}\right| < \vartheta^3 (1 - \vartheta).$$

So fortschließend findet man allgemein:

$$(22) \quad \left|1 - \frac{z_{n_\lambda+\mu}}{z}\right| < \vartheta^{\lambda+1} (1 - \vartheta) \quad (\mu = 1, 2 \ldots (n_{\lambda+1} - n_\lambda),$$

und daher, wenn das *Maximum* von z im Bereiche T' mit $\bar{z}$ bezeichnet wird:

(23) $$|z - z_\nu| < \vartheta^{\lambda+1}(1-\vartheta)\cdot\bar{z} \quad (\nu > n_\lambda)$$

für *alle* Stellen des Bereiches T', d. h. schließlich:

(24) $$\lim_{\nu=\infty} z_\nu = z$$

und zwar *gleichmäßig* für den gesamten Bereich T'.

Man hat sodann:

$$z' - z'_\nu = (1-z) - (1-z_\nu) = -(z - z_\nu)$$

und, wenn

(25) $$\frac{z'_\nu}{z_\nu} = \zeta_\nu$$

gesetzt wird:

$$\zeta - \zeta_\nu = \frac{1-z}{z} - \frac{1-z_\nu}{z_\nu} = -\frac{z - z_\nu}{z\,z_\nu},\text{[1]}$$

also auch:

(26) $$\lim_{\nu=\infty} z'_\nu = z' \qquad \lim_{\nu=\infty} \zeta_\nu = \zeta$$

und zwar ebenfalls *gleichmäßig* für den Bereich T'.

Hierzu sei noch bemerkt, daß die z_ν (also auch die z'_ν), welche nach dem bisher gesagten nur für $\nu \geqq n_0$ als eindeutig bestimmte rationale Funktionen von x definiert sind, durch

---

[1]) Wegen:

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{1}{z} - 1\right| < 1$$

ist *a fortiori*:

$$\left|\frac{1}{z}\right| - 1 < 1,$$

also stets:

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 2,$$

und daher auch:

$$\left|\frac{1}{z_\nu}\right| < 2,$$

sofern nur ν eine für den ganzen Bereich T' gleich bleibende, passend gewählte Zahl n übersteigt.

Umkehrung der Rekursionsformel (15) eventuell auch für $\nu < n_0$ bestimmt werden können. Aus (15) ergiebt sich nämlich, wenn man noch ν durch $\nu - 1$ ersetzt:

$$z_{\nu-1} = \frac{a_\nu x}{z_\nu - 1}, \tag{27}$$

so daß gleichzeitig mit z_{n_0} auch z_{n_0-1}, $z_{n_0-2} \ldots$ als eindeutig bestimmte Zahlen definiert sind, so lange $z_\nu - 1$ nicht verschwindet.

4. Nunmehr kehren wir zu unserer Rekursionsformel (14) zurück. Substituiert man der Reihe nach $\nu = m, (m+1), \ldots (n-1)$, (wo $n - 1 > m$ und m nur an die Bedingung geknüpft ist, daß die z_ν, z'_ν für $\nu \geqq m$ existieren, was mit Sicherheit der Fall ist, wenn $m \geqq n_0$), so folgt durch Multiplikation der resultierenden Gleichungen:

$$\prod_m^{n-1}{}^{\nu} (D_{\nu+1} - z_{\nu+1} D_\nu) = \prod_m^{n-1}{}^{\nu} z'_{\nu+1} \cdot \prod_m^{n-1}{}^{\nu} (D_\nu - z_\nu D_{\nu-1}),$$

d. h.

$$\begin{aligned} D_n - z_n D_{n-1} &= z'_{m+1} \ldots z'_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \\ &= z_{m+1} \ldots z_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \zeta_{m+1} \ldots \zeta_n. \end{aligned} \tag{28}$$

Ersetzt man n der Reihe nach durch $(n-1)$, $(n-2)$, $\ldots (m+1)$, multipliziert die resultierenden Gleichungen bzw. mit z_n, $(z_{n-1} z_n)$, $\ldots (z_{m+2} \ldots z_n)$ und addiert sie zu Gl. (28), so findet man:

$$D_n - z_{m+1} \ldots z_n \cdot D_m = z_{m+1} \ldots z_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n},$$

wo:

$$\sigma_{m,n} = \zeta_{m+1} + \zeta_{m+1}\zeta_{m+2} + \cdots + \zeta_{m+1}\zeta_{m+2} \ldots \zeta_n, \tag{29}$$

anders geschrieben:

$$\frac{D_n}{z_{m+1} \ldots z_n} = D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n} \tag{30}$$

als die gesuchte Lösung der Rekursionsformel (14) bzw. (12).

5. Ersetzt man in der letzten Formel D_ν durch A_ν bzw. B_ν, so ergibt sich durch Division der betreffenden Gleichungen für den n^{ten} Näherungsbruch des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ die Darstellung:

$$(31) \qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m + (A_m - z_m A_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n}}{B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n}}.$$

Um seinen Grenzwert für $n = \infty$ zu bestimmen, hat man nur zu beachten, daß die mit $\sigma_{m,n}$ bezeichnete Summe (29) für $n = \infty$ in die konvergente Reihe:

$$(32) \qquad \sigma_m = \sum_1^\infty {}^\nu \zeta_{m+1} \ldots \zeta_{m+\nu}$$

(*konvergent*, wegen $\lim_{\nu=\infty} |\zeta_{m+\nu}| \leqq \bar{\zeta} < 1$) übergeht, und zwar nähert sich $\sigma_{m,n}$ dem Grenzwerte σ_m im Bereiche T' durchweg *gleichmäßig*. Man hat nämlich:

$$\sigma_{m,n+p} - \sigma_{m,n} = \zeta_{m+1} \ldots \zeta_{n+1} + \cdots + \zeta_{m+1} \ldots \zeta_{n+p}.$$

Wird dann eine positive Zahl δ so klein angenommen, daß neben $\bar{\zeta} < 1$ auch noch:

$$\bar{\zeta} + \delta < 1,$$

so läßt sich mit Rücksicht auf die in T' *gleichmäßig* erfüllte Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \zeta_\nu = \zeta$ ein m so fixieren, daß für $\nu > m$:

$$|\zeta_\nu| \leqq |\zeta| + \delta \leqq \bar{\zeta} + \delta$$

und daher:

$$\begin{aligned} |\sigma_{m,n+p} - \sigma_{m,n}| &< (\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+1} + \cdots + (\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+p} \\ &< \frac{(\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+1}}{1 - (\bar{\zeta} + \delta)} \end{aligned}$$

d. h. durch Wahl einer passenden unteren Schranke für die Zahl n *beliebig klein* für den ganzen Bereich T' und unabhängig von p.

Somit ergibt sich aus Gl. (31):

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m + (A_m - z_m A_{m-1}) \cdot \sigma_m}{B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m} \tag{32}$$

d. h. $\frac{A_n}{B_n}$ konvergiert in jedem T' angehörigen Bereiche, in welchem der Nenner des vorstehenden Ausdrucks nicht verschwindet, *gleichmäßig* gegen einen bestimmten Grenzwert.[1])

Im übrigen ist zunächst ersichtlich, daß Zähler und Nenner jenes Ausdrucks niemals gleichzeitig verschwinden können. Denn aus:

$$0 = A_m + (A_m - z_m A_{m-1})\, \sigma_m = B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$$

würde im Falle $\sigma_m = 0$ folgen:

$$0 = A_m = B_m,$$

im Falle $|\sigma_m| > 0$:

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}},$$

was beides unmöglich ist.

---

[1]) Man bemerke, daß die Wahl des Index m höchstens an eine (die Existenz von z_m sichernde) untere Schranke gebunden, im übrigen völlig willkürlich ist. Diese aus dem Gange unserer Untersuchung mit Notwendigkeit sich ergebende Tatsache läßt sich übrigens durch die folgende einfache Rechnung noch direkt bestätigen. Setzt man zur Abkürzung:

$$D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_m = \Delta_m,$$

so ergibt sich mit Benützung der Rekursionsformel:

$$D_{m+1} - z_{m+1} D_m = z'_{m+1} (D_m - z_m D_{m-1})$$

und der unmittelbar ersichtlichen Identität:

$$\sigma_m = \zeta_{m+1} (1 + \sigma_{m+1}) = \frac{z'_{m+1}}{z_{m+1}} (1 + \sigma_{m+1}),$$

daß:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= D_m + \frac{1}{z_{m+1}} (D_{m+1} - z_{m+1} D_m) + \frac{1}{z_{m+1}} (1 + \sigma_{m+1}) \\ &= \frac{1}{z_{m+1}} \{D_{m+1} + (D_{m+1} - z_{m+1} D_m)\, \sigma_{m+1}\} \end{aligned}$$

d. h. schließlich:

$$\Delta_m = \frac{1}{z_{m+1}} \cdot \Delta_{m+1}.$$

Auch kann $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ in keinem Stücke des Bereiches T' *identisch* verschwinden. Denn da der Bereich T' ein zusammenhängender ist, so müßte in diesem Falle die eindeutige analytische Funktion $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ in dem gesamten Bereiche T' identisch verschwinden, was definitiv ausgeschlossen ist, da nach dem Hauptsatze des § 2 (p. 22) bereits feststeht, daß der Kettenbruch für $|x| \leq \frac{1}{4a + \delta}$ im wesentlichen gleichmäßig konvergiert, also $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen bestimmte, von Null verschiedene Zahlen vorstellt.

Da endlich B_{m-1}, B_m ganze rationale Funktionen von x, z_m eine in T' endlich bleibende gebrochene rationale Funktion, σ_m eine gleichmäßig konvergente Reihe ebensolcher Funktionen, so ist $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ eine in T' eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens, kann also daselbst höchstens eine endliche Anzahl gewöhnlicher Nullstellen besitzen.

Somit definiert $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ eine in T' bis auf etwaige Pole reguläre analytische Funktion, und man gewinnt daher das folgende Endresultat:

Ist $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, *wo* $|a| > 0$, *so konvergiert der Kettenbruch* $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$, *mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen, in jedem Bereiche T' im Innern des Bereiches T, welcher entsteht, wenn man in der Ebene einen geradlinigen Schnitt in der Richtung des Strahles* $\left(0, -\frac{1}{4a}\right)$ *vom Punkte* $-\frac{1}{4a}$ *ins Unendliche führt. Er definiert eine im Innern von T eindeutige, bis auf etwaige Pole*[1]) *reguläre analytische Funktion.*[2])

[1]) Hiermit ist schon gesagt, daß die Pole keine *im Innern* von T gelegene Häufungsstelle besitzen können, wohl aber auf dem Schnitte

$$\left(-\frac{1}{4a}, \infty\right).$$

[2]) Ich bemerke, daß der betreffende Kettenbruch an der Grenze

6. Ehe wir dieses Ergebnis auf den Gaußschen Kettenbruch und die hypergeometrische Reihe anwenden, soll noch gezeigt werden, wie aus den hier angestellten Betrachtungen eine vollständigere und präzisere Form des in der Einleitung erwähnten Poincaréschen Satzes sich ergibt.

Aus Gl. (30) folgt zunächst:

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = z_{n+1} \cdot \frac{D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,\,n+1}}{D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,\,n}} \tag{33}$$

und hieraus für $\lim n = \infty$ (wegen: $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_{m,\,n} = \lim\limits_{n=\infty} \sigma_{m,\,n+1} = \sigma_m$):

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z \tag{34}$$

$x = -\frac{1}{4a}$ noch *konvergieren* kann. So ist z. B. der Kettenbruch:

$$K(x) = \left[\frac{\frac{1}{3}}{1},\ \frac{\frac{-\nu^2 x}{4\nu^2 - 1}}{1}\right]_2^\infty,$$

für welchen $a = -\frac{1}{4}$, also $-\frac{1}{4a} = 1$, noch *konvergent* für $x = 1$. Dies folgt, wenn man ihn in die Form setzt:

$$K(x) = \left[\frac{1}{3},\ \frac{-\nu^2 x}{2\nu + 1}\right]_2^\infty$$

unmittelbar aus einem früher von mir abgeleiteten Konvergenz-Kriterium (Sitz.-Ber. 35 (1905), p. 372, III). Sein Wert kann leicht mit Hilfe der Transformation bestimmt werden:

$$\sum_{1}^{n+1}{}^{\nu}\,\frac{1}{\nu} = \left[\frac{1}{1},\ \frac{-\nu^2}{2\nu + 1}\right]_1^n,$$

woraus sich ergibt:

$$\left[\frac{1}{3},\ \frac{-\nu^2}{2\nu + 1}\right]_2^n = 1 - \left(\sum_{1}^{n+1}{}^{\nu}\,\frac{1}{\nu}\right)^{-1},$$

also:

$$K(1) = 1.$$

Übrigens hat man allgemein (s. Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136):

$$x\,K(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{\lg \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}},$$

also auch:

$$\lim_{x=1} K(x) = 1.$$

und zwar *gleichmäßig* für jeden T' angehörigen Bereich, in welchem der Ausdruck

$$(35) \qquad \Delta_m(x) \equiv D_m(x) + (D_m(x) - z_m D_{m-1}(x)) \cdot \sigma_m(x)$$

nicht verschwindet. Findet das letztere hingegen statt, was nach dem bisher gesagten höchstens für eine endliche Anzahl dem Bereiche T' angehöriger Stellen x' der Fall sein kann, so hat man für *jedes* m von einem bestimmten ab:[1])

$$D_m(x') + (D_m(x') - z_m D_{m-1}(x')) \cdot \sigma_m(x') = 0,$$

anders geschrieben:

$$(36) \qquad \frac{D_m(x')}{D_{m-1}(x')} = z_m \cdot \frac{\sigma_m(x')}{1 + \sigma_m(x')} = z'_m \cdot \frac{\sigma_m(x')}{\sigma_{m-1}(x')}$$

$$\left(\text{wegen: } 1 + \sigma_m = \frac{z_m}{z'_m} \cdot (\zeta_m + \zeta_m \sigma_m) = \frac{z_m}{z'_m} \cdot \sigma_{m-1}\right).$$

Läßt man hier m unendlich werden und beachtet, daß mit Rücksicht auf die gleichmäßige Konvergenz der Reihe σ_m bzw. σ_{m-1} und von $\lim\limits_{m=\infty} \zeta_m = \zeta$ sich ergibt:

$$(37) \qquad \lim_{m=\infty} \sigma_m = \lim_{m=\infty} \sigma_{m-1} = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \zeta^\nu = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

so folgt aus (36), wenn man noch $n+1$ statt m schreibt:

$$(38) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x')}{D_n(x')} = z'.$$

Somit gewinnt man hier an Stelle der gewöhnlichen Form des Poincaréschen Satzes, bei welcher die Koeffizienten der Rekursionsformel lediglich als Funktionen des Index n betrachtet zu werden pflegen, hier die folgende:

Ist:

$$D_{\nu+1}(x) - D_\nu(x) - a_{\nu+1}\, x\, D_{\nu-1}(x) = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \neq 0,$$

so hat man für alle x mit Ausschluß derjenigen, für welche $a\,x$ reell negativ und $|a\,x| \geq \frac{1}{4}$:

---

[1]) Vgl. die Fußnote 1) auf p. 45.

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x)}{D_n(x)} = z,$$

wo z die numerisch größere Wurzel der quadratischen Gleichung $y^2 - y - ax = 0$ bedeutet, allenfalls abgesehen von einer Menge isolierter Stellen x', für welche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x')}{D_n(x')} = z' = 1 - z.$$

Setzt man $x = 1$ und schreibt D_ν statt $D_\nu(1)$, so resultiert der gewöhnliche Poincarésche Satz in der präziseren Fassung, daß für die Lösungen der Rekursionsformel:[1])

$$D_{\nu+1} - D_\nu - a_{\nu+1} D_{\nu-1} = 0,$$

(wo $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ und a jede Zahl bedeuten kann mit Ausnahme der reellen negativen, die numerisch $\geqq \frac{1}{4}$) die Relation besteht:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z;$$

nur in dem *einen* Falle, daß für *irgend ein* m — und zwar dann, wie aus den früheren Betrachtungen hervorgeht, für *jedes* m:

$$D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_m = 0,$$

tritt an die Stelle der obigen Beziehung die folgende:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z' = 1 - z.$$

---

1) Die scheinbar allgemeinere Beziehung:

$$C_{\nu+1} - b'_{\nu+1} C_\nu - a'_{\nu+1} C_{\nu-1} = 0$$

läßt sich durch die Substitution:

$$C_\nu = b'_m b'_{m+1} \ldots b'_\nu D_\nu$$

stets auf die Form bringen:

$$D_{\nu+1} - D_\nu - a_{\nu+1} D_{\nu-1} = 0,$$

wo:

$$a_{\nu+1} = \frac{a'_{\nu+1}}{b'_\nu b'_{\nu+1}}.$$

Es existiert also stets *ein* und *nur* ein ganz spezieller Wert $\frac{D_{m-1}}{D_m}$, d. h. schließlich eine ganz spezielle Wahl des Anfangswert-Verhältnisses $\frac{D_1}{D_0}$, bei welcher jener *singuläre* Fall nicht nur eintreten *kann*, sondern auch wirklich allemal eintreten *muß*.

7. Setzt man, wie üblich:

$$(39)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\alpha \ldots (\alpha + \nu - 1) . \beta \ldots (\beta + \nu - 1)}{\gamma \ldots (\gamma + \nu - 1) . 1 \ldots \nu} x^{\nu},$$

so besteht für den Quotienten zweier solcher hypergeometrischer Reihen, wie Gauß[1]) lediglich rein formal abgeleitet hat, eine Kettenbruch-Entwickelung von der Form:

$$(40)\qquad \frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \left[\frac{1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty,$$

wo:

$$(41)\qquad \begin{cases} a_{2\mu} = -\dfrac{(\alpha + \mu - 1)(\gamma - \beta + \mu - 1)}{(\gamma + 2\mu - 2)(\gamma + 2\mu - 1)} \\[2ex] a_{2\mu+1} = -\dfrac{(\beta + \mu)(\gamma - \alpha + \mu)}{(\gamma + 2\mu - 1)(\gamma + 2\mu)}. \end{cases}$$

Da hiernach $\lim_{\nu = \infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$, so folgt zunächst, daß der Kettenbruch für $|x| \leq 1 - \delta$ im wesentlichen gleichmäßig konvergiert und sein Wert mit demjenigen des fraglichen Reihen-Quotienten übereinstimmt; sodann aber, daß, abgesehen von der Strecke, $(+1, +\infty)$ der reellen Achse und etwaigen isolierten Stellen eigentlicher Divergenz die im wesentlichen gleichmäßige Konvergenz des Kettenbruches bestehen bleibt, so daß also als analytische Fortsetzung jenes Reihen-Quotienten eine nach Einführung des Schnittes $(+1, +\infty)$ eindeutige und abgesehen von etwaigen Polen im Endlichen reguläre Funktion erscheint.

Diese Eigenschaft bleibt wiederum bestehen, wenn speziell $\beta = 0$ gesetzt und somit $F(\alpha, \beta, \gamma, x) \equiv F(\alpha, 0, \gamma, x) \equiv 1$ wird, d. h. sie gilt für die Reihe:

---

[1]) Werke, Bd. 3, p. 134.

(42) $$F(\alpha, 1, \gamma, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\alpha \ldots (\alpha + \nu - 1)}{\gamma \ldots (\gamma + \nu - 1)} \cdot x^\nu.$$

Es läßt sich aber zeigen, daß die letztere und ebenso die allgemeine hygergeometrische Reihe in Wahrheit überhaupt keine Pole (abgesehen von $x = 1$) besitzen kann. Man hat nämlich:

(43) $$F(\alpha, 1, 1, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\alpha \ldots (\alpha + \nu - 1)}{1 \ldots \nu} x^\nu = (1 - x)^{-\alpha},$$

und diese Funktion hat lediglich die singulären Stellen $x = 1$ und $x = \infty$. Betrachtet man nun die Reihe mit den reziproken Koeffizienten, also:

(44) $$F(1, 1, \alpha, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1 \ldots \nu}{\alpha \ldots (\alpha + \nu - 1)} \cdot x^\nu,$$

so kann deren analytische Fortsetzung keinesfalls irgend einen von 1 verschiedenen *Pol* x' haben. Denn nach einer von Herrn Faber[1]) herrührenden Ergänzung zu dem oben bereits benützten Hadamardschen Satze (§ 3, Nr. 2, p. 28) müßte dann mit Notwendigkeit $x' \cdot 1$, also x', eine singuläre Stelle für diejenige Funktion sein, welche durch Multiplikation entsprechender Koeffizienten von $F(1, 1, \alpha, x)$ und $F(\alpha, 1, 1, x)$ zu Stande kommt, d. h. der Funktion $1 + \sum_1^\infty{}_\nu x^\nu = \frac{1}{1 - x}$. Und da andererseits die Fortsetzung von $F(1, 1, \alpha, x)$ nach dem oben bereits gefundenen Ergebnis außerhalb des Schnittes $(1, \infty)$ *andere* Singularitäten, als *Pole* nicht besitzen kann, so muß sie daselbst geradezu *regulär* sein. Schreibt man in der Reihe (44) γ statt α, so folgt nunmehr durch Kombination mit $F(\alpha, 1, 1, x)$ (s. (43)) und der ganz analog beschaffenen Reihe $F(1, \beta, 1, x) = (1 - x)^{-\beta}$, daß auch die Fortsetzung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ außerhalb des Schnittes $(1, \infty)$ durchaus regulären Verhaltens ist. Daß sie tatsächlich (im ersten Blatte) überhaupt nur die singulären Stellen $x = 1$ und $x = \infty$ (dazu eventuell noch in anderen

[1]) Jahrb. der D. M. V. 16 (1907), p. 298.

Blättern $x = 0$) besitzt,[1]) wie auf andere Weise z. B. durch Heranziehung der zugehörigen linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung erkannt wird, dürfte auf dem hier eingeschlagenen elementaren Wege nicht festzustellen sein: immerhin scheint mir nicht ohne Interesse, daß derselbe ausreicht, um die Natur der hypergeometrischen Funktionen wenigstens in dem hier gegebenen Umfange zu ergründen; wie man denn wohl überhaupt in der großen Einfachheit der Hilfsmittel, welche hier u. a. den Konvergenz-Beweis für den Gaußschen Kettenbruch geliefert haben, wenn man sie mit der Schwierigkeit des Riemannschen[2]) Beweisfragmentes und den recht mühsamen Konvergenz-Untersuchungen des Herrn Thomé[3]) vergleicht, einen gewissen Fortschritt wird erblicken dürfen.

---

[1]) Während die Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ eine *eindeutige* Funktion definiert, so liefert die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, von speziellen Fällen abgesehen, stets eine mehrdeutige oder unendlich vieldeutige Funktion. Läßt man $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch den Grenzübergang $\lim q = 1$ aus $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ entstehen, so erzeugen also die *unendlich vielen* in den Punkt 1 hineinrückenden *Pole* von der Form $\frac{1}{q^\nu}$ an jener Stelle einen *Verzweigungspunkt*. Diese eigentümliche Erscheinung dürfte wohl eine passende Erklärung finden, wenn man das Verhalten von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ als Funktion der *beiden* Veränderlichen x und q ins Auge faßt.

Der Grenzfall $\lim\limits_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right)$ liefert eine beständig konvergierende Reihe (insbesondere für $\beta = \gamma$ die Exponentialreihe), für deren Kettenbruch-Entwickelung, wie unmittelbar aus Gl. (41) entnommen werden kann, die Beziehung $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ besteht. Der betreffende Kettenbruch muß dann zunächst nach § 3 in jedem endlichem Bereiche mit einzigem Ausschluß etwaiger Pole der Funktion konvergieren. Und da diese letzteren infolge der beständigen Konvergenz der erzeugenden Reihe gänzlich fehlen, so konvergiert er, abgesehen von $x = \infty$, *ausnahmslos.*

[2]) Werke, Abh. XXIII (erste Aufl. 1876, p. 400).

[3]) Journ. f. Math. 66 (1866), p. 322; 67 (1867), p. 299.