

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1939. Heft I und II

Sitzungen Januar–Juli

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Verbesserung der Orientierung eines Dreiecksnetzes durch Laplacesche Punkte.

Von Max Kneißl in München.

Mit 3 Abbildungen.

Vorgelegt von Herrn S. Finsterwalder in der Sitzung vom 14. Januar 1939.

In der Abhandlung „Eine neue astronomische Orientierung des bayer. Hauptdreiecksnetzes“ (Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1935 S. 81–91) gibt Herr Geheimrat Dr. S. Finsterwalder eine Zusammenstellung der astronomischen Messungen auf Punkten des alten bayerischen Hauptdreiecksnetzes und leitet aus diesen Messungen eine einheitliche Orientierung des Netzes ab. Dabei wurden die in dem Orffschen Landesvermessungswerk enthaltenen auf das Henrysche Azimut in München bezogenen geodätischen Lagen der Dreieckspunkte mit der Breitenänderung $dB = +0,05''$ und der Azimutänderung $dA = +17,00''$ auf eine verbesserte Ausgangslage von München umgerechnet. Die astronomisch bestimmten Lagen und Azimute wurden auf die alten Orffschen Punkte zentriert und die Laplaceschen Gleichungen gegenüber dem Ausgangspunkte München aufgestellt.

Solange die Laplaceschen Widersprüche innerhalb weniger Sekunden bleiben, kann der Widerspruch für einen Punkt allein durch Verbesserung des Ausgangsazimuts um diesen Widerspruch bis auf vernachlässigbare Größen getilgt werden oder umgekehrt das Ausgangsazimut wird durch Hinzufügen der einzelnen Laplaceschen Widersprüche so verbessert, daß jeweils die entsprechende Laplacesche Bedingung erfüllt ist.

Für das Ausgangsazimut München-Aufkirchen des bayer. Netzes ergab sich auf diese Weise

ab Asten	49° 00'	8,02''	Laplacescher	— 1,98''
ab Arber		14,70''	Widerspruch	+ 4,70''
ab Lehnbühl		6,52''		— 3,48''
ab Altenburg		8,29''		— 1,71''

ab Hesselberg	49° 00' 11,89''	Laplacescher	+ 1,89''
ab Kirchheim	12,19''	Widerspruch	+ 2,19''
ab München	9,99''		0,00''

und das einfache Mittel zu $49^{\circ} 00' 10,23'' \pm 1,08''$.

Inzwischen wurden die astronomischen Messungen durch die Beobachtungen auf Eichelberg bei Hemau ergänzt. Auf den alten Orffschen Punkt zentriert ergeben diese Messungen für Eichelberg einen Laplaceschen Widerspruch von $+ 0,06''$ und für das Ausgangsazimut erhält man $49^{\circ} 00' 10,06''$. Mit Einschluß von Eichelberg wird das einfache Mittel für das Ausgangsazimut $49^{\circ} 00' 10,21'' \pm 0,94''$. Dieses Mittel bestätigt das gewählte Ausgangsazimut und vermindert im Durchschnitt die Laplaceschen Widersprüche.

Durch die Überführung der auf den verschiedenen Laplaceschen Punkten gemessenen Azimute auf das Azimut einer Ausgangsseite wurde das geodätische Netz, ohne es in seiner Form oder Gestalt zu ändern, in der Gesamtorientierung verbessert. Die verbleibenden Laplaceschen Widersprüche sind jedoch von einer Größe, welche eine weitere Tilgung erfordern. Für das alte bayer. Hauptdreiecksnetz soll nun eine von Herrn Geheimrat Dr. S. Finsterwalder vorgeschlagene Methode zur Tilgung der nach der Mittellorientierung noch verbliebenen Laplaceschen Widersprüche durchgeführt werden.

Empirische Untersuchungen zeigen, daß die Laplaceschen Widersprüche im wesentlichen durch eine Verbesserung des geodätischen Azimuts getilgt werden können, und da man durch die Einbeziehung der Laplaceschen Bedingung in die geodätische Ausgleichung lediglich systematischen Netzverbiegungen durch die Seitenrefraktion und Orientierungsfehlern vorbeugen will, hält man an den astronomischen Messungen (genau so wie an Basismessungen) als fehlerfrei fest. Eine weitere Tilgung der Laplaceschen Widersprüche kann daher nur durch eine Verbesserung der geodätischen Punktlagen, durch eine Verbiegung des geodätischen Netzes erfolgen. Bei dieser Formänderung des Netzes wird es sich wieder um eine Drehung, nicht aber um eine Dehnung handeln, denn die metronomische Sicherheit eines

Dreiecksnetzes wird durch Grundlinien, nicht aber durch astronomische Ortsbestimmungen gewährleistet.

Zur Entwicklung der vorgeschlagenen Methode betrachtet man jeweils zwei benachbarte Laplacesche Punkte P_i und P_h und bestimmt aus dem geodätischen Netz die sie verbindende geodätische Linie $P_i P_h$, deren Länge S_{ik} vorerst unverändert beibehalten werden soll. Die entsprechenden Laplaceschen Widersprüche werden mit w_i und w_h bezeichnet. Zur Tilgung des Laplaceschen Widerspruches w_i in P_i müßte die geodätische Linie $P_i P_h$ um P_i um den Betrag w_i gedreht werden. Ebenso müßte in P_h die geodätische Linie um w_h gedreht werden, um den Widerspruch w_h zu tilgen. Um zwischen den beiden Drehungen zu vermitteln, dreht man die geodätische Linie im Mittelpunkt der Strecke um $\frac{w_i + w_h}{2}$. Damit bleibt in den Punkten noch ein Widerspruch von

$\frac{w_i - w_h}{2}$ ungetilgt, der nicht mehr durch eine Drehung der geo-

dätischen Linie, sondern nur durch eine Verbiegung derselben zum Verschwinden gebracht werden kann. Es wird also zunächst die Orientierung in jedem einzelnen Laplaceschen Punkt sichergestellt. Die gedrehten Strecken werden sich jedoch nun nicht mehr in der Netzfigur zusammenschließen. Der Zusammenschluß muß durch eine Ausgleichung herbeigeführt werden, wobei die bei den Drehungen der geodätischen Linien auftretenden Verbesserungen der Koordinatendifferenzen der Endpunkte als Beobachtungsgrößen aufgefaßt werden.

Da es sich bei diesen Drehungen stets nur um wenige Sekunden handelt, sind die Änderungen in den Koordinatendifferenzen sehr einfach zu bestimmen. Hierzu verschiebt man den Drehpunkt in den Anfangspunkt P_i . Bei einer Drehung der geodätischen Linie $P_i P_h$ mit dem Azimut A_{ik} um $\frac{w_i + w_h}{2}$, unter Beibehaltung der Länge S_{ik} , bewegt sich P_h auf einem geodätischen Kreis nach P'_h .

Nach Abb. 1 ist

$$P_h P'_h = S_{ik} \frac{w_i + w_h}{2} (\text{Bogen} = \text{Radius} \cdot \text{Zentriwinkel})$$

und die Verbesserung des Breitenunterschieds wird

$$\Delta x_{ih} = -S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \sin A_{ih}.$$

Ganz entsprechend ergibt sich die Änderung des Längenunterschieds zu

$$\Delta y_{ih} = +S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \cos A_{ih}.$$

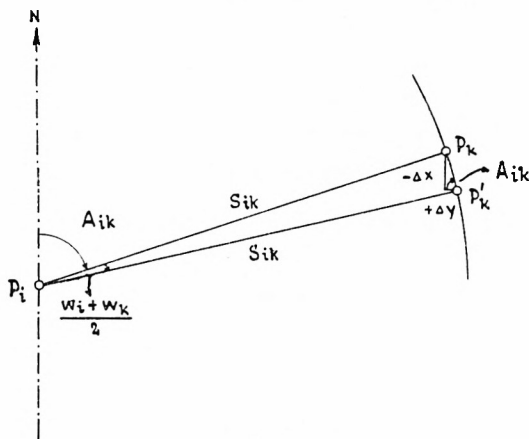


Abb. 1.

Für die geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte sind nun Verbesserungen x_i , y_i so zu bestimmen, daß nach der Drehung die Gleichungen

$$x_h - x_i + S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \sin A_{ih} = 0$$

und

$$y_h - y_i - S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \cos A_{ih} = 0$$

erfüllt sind.

Um einen Zusammenschluß des Netzes zu erhalten, können diese Gleichungen jedoch nicht streng erfüllt werden und es bleiben kleine Fehler in der Breite v_{ih} und in der Länge v'_{ih} bestehen. Damit entstehen die Fehlergleichungen für die Breite

$$x_h - x_i + S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \sin A_{ih} = v_{ih}$$

und für die Länge

$$y_h - y_i - S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \cos A_{ih} = v'_{ih}.$$

Die Anzahl der Fehlergleichungen = der Zahl der geodätischen Linien, die den Netzrahmen bilden, und diese geben so viele Normalgleichungen, als Knotenpunkte (Laplacesche Punkte) vorliegen.

In die Fehlergleichungen sind die in Sekunden gegebenen Laplaceschen Widersprüche im Bogenmaß einzuführen. Weiterhin werden die einzelnen Glieder der Fehlergleichungen mit dem Gewicht p_{ih} multipliziert, wobei die Gewichte umgekehrt proportional den Längen der geodätischen Linien gewählt und 100 km als Gewichtseinheit angenommen werden. Sonach ist

$$p_{ih} = \frac{100}{S_{ih}} (S_{ih} \text{ in km}).$$

Die Koeffizienten in den Fehlergleichungen sind $+1$ bzw. -1 von $x_1 \dots x_i$ und entsprechend von $y_1 \dots y_i$. Es können daher die Normalgleichungen bis auf die Glieder $+ S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \sin A_{ih}$ und $- S_{ih} \frac{w_i + w_h}{2} \cos A_{ih}$ (welche im folgenden mit l bzw. l' bezeichnet sind) gemeinsam aufgestellt werden. Dasselbe gilt für die Auflösung der Normalgleichungen.

Bei der Anwendung der vorgeschlagenen Methode auf das Orffsche Netz muß man bei der Beurteilung der tatsächlich erreichten Tilgung der Laplaceschen Widersprüche wegen der geodätischen Mängel des Netzes sehr vorsichtig verfahren. Da bei der astronomischen Azimutmessung infolge der spärlichen Sachmittel der Bayer. Kommission für die Internationale Erdmessung die Verwendung von Heliotropen und künstlichem Licht nicht möglich war, konnte der Anschluß an das Hauptnetz zum Teil nur über Hilfsziele erfolgen. Infolge dieser Mängel wurden auch die nachstehenden Berechnungen zunächst nach unbestimmten Widersprüchen entwickelt. Lediglich die Entfernungen und Richtungen wurden sofort numerisch dem Orffschen Netz entnommen, da hierfür Näherungswerte genügen. Durch diese Rechnungsanordnung ist es möglich, nach Abschluß der Neubeachtung und Neuberechnung des bayer. Dreiecksnetzes I.O. die Methode für das neue Netz zu erproben, um sie dann auf Grund der verbesserten geodätischen Grundlage zu beurteilen.

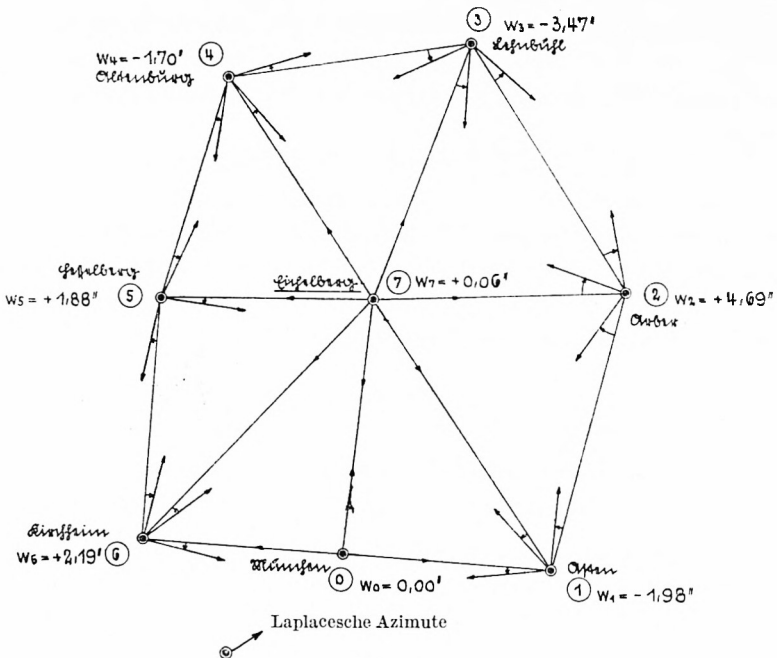


Abb. 2.

Transformiertes Orffsches Netz.

In Tabelle 1 und Abb. 2 sind die Ausgangswerte des transformierten Orffschen Netzes, die astronomischen Werte und die Widersprüche der Laplaceschen Punkte zusammengestellt. Die Tabellen 2 und 3 zeigen die Fehlergleichungen. Tabelle 4 gibt eine Zusammenstellung von numerischen Werten. Die Tabellen 5, 6, 7 enthalten die Normalgleichungen, deren Auflösung und die Fehlerrechnung. Bei der Aufstellung der Fehlergleichungen ist zu beachten, daß der Ausgangspunkt des Netzes keine Verbesserung erhält. x_0 und y_0 müssen also gleich Null gesetzt werden. Ebenso bleibt der Richtungssatz im Ursprung ungeändert $w_0 = 0$.

Bringt man den an ursprünglichen geodätischen Koordinaten die durch die Ausgleichung bestimmten Verbesserungen x_i, y_i an, so entsteht ein geschlossener astronomisch-geodätischer Rahmen mit den Koordinaten der Tab. 8. Obwohl die mittleren Fehler der Ausgleichung von derselben Größenordnung sind wie

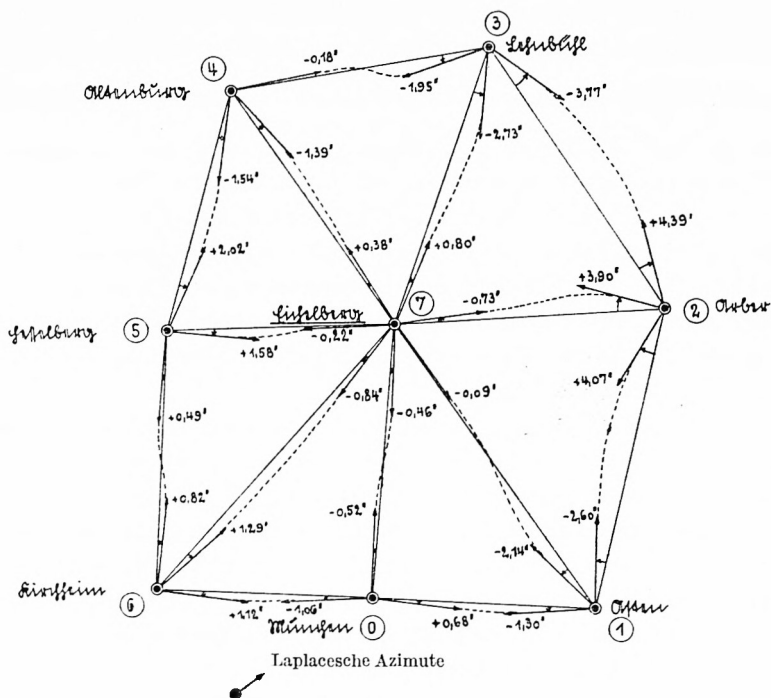


Abb. 3.

Transformiertes Orffsches Netz. Neuausgleichung.

die errechneten Verbesserungen, so zeigen die Verbesserungen doch einen systematischen Charakter. Bei sieben Verbesserungen sind in der Breite 5 und in der Länge 6 Werte positiv. Vergleicht man die auf Grund der Laplaceschen Gleichungen korrigierten Richtungen des ursprünglichen geodätischen Netzes mit den Richtungswinkeln, welche aus den endgültigen Koordinaten nach der Ausgleichung hervorgehen, so zeigen sich die Widersprüche der Abb. 3. Die Längen der geodätischen Linien wurden im Durchschnitt um 100 Einheiten der achten Stelle des Logarithmus geändert. Durch den Ansatz der Fehlergleichungen blieben in den Punkten die Widersprüche $\frac{w_i - w_k}{2}$ ungetilgt, ebenso konnte durch die Ausgleichung die Forderung der Tilgung von $\frac{w_i + w_k}{2}$ nicht streng erfüllt werden.

Die Winkelwidersprüche im Anfangs- und Endpunkt einer geodätischen Linie geben einen Anhalt, wie die geodätischen Linien zu verbiegen sind, damit auch die von $\frac{w_i - w_k}{2}$ gestellte Forderung erfüllt wird. Betrachtet man die neu orientierten Richtungen als Tangenten an die gekrümmten Verbindungslinien, so läßt sich durch diese Tangenten und die Längen der geodätischen Linien die erzeugte Kurve in einer Gleichung darstellen. Soll das Füllnetz durch maschenweise Übertragung in den astronomisch-geodätischen Rahmen eingepaßt werden, so könnte man in der affinen Abbildung die Krümmung der Netzmaschen berücksichtigen.

In der geodätischen Praxis wird man sich wohl darauf beschränken, zunächst das Netz mit einer aus sämtlichen Laplaceschen Punkten gemittelten Orientierung durchzurechnen, und dann die Laplaceschen Widersprüche aufstellen. Sind die Widersprüche von einer Größe, welche durch Beobachtungsfehler nicht erklärt werden können, und weisen sie einen „Gang“ auf, der auf eine systematische Verbiegung des Netzes hinweist, so wird man die vorgeschlagene Methode anwenden. Die nach der Rahmenausgleichung noch verbleibenden Widersprüche in den Anfangs- und Endpunkten der geodätischen Linien wird man belassen und das Füllnetz maschenweise einpassen, ohne auf die Krümmung der Linien Rücksicht zu nehmen. Auf diese Weise wird der systematische Anteil in den Laplaceschen Widersprüchen getilgt und das geodätische Netz zurechtgestellt. Der Restanteil in den Laplaceschen Widersprüchen, der keinem Gesetz folgt, bleibt unberücksichtigt und kann nicht auf das geodätische Netz einwirken. Führt man die Laplaceschen Gleichungen streng in die Netzausgleichung ein, so besteht die Möglichkeit, daß die geodätischen Messungen Verbesserungen erfahren, die mit ihrer Genauigkeit nicht in Einklang stehen.

Tabelle 1.

Zusammenstellung der Ausgangswerte des transformierten Orffschen Netzes.

Station	Astronomische		Ellipsoidische	
	Breite	Länge	Breite	Länge
	φ	$\lambda - \lambda_0$	B	$L - L_0$
o München . . .	48°08'20,05''	0°00'00,00''	48°08'20,05''	0°00'00,00''
1 Asten . . .	48 05 54,98	+1 09 02,87	48 05 55,51	+1 09 06,80
2 Arber . . .	49 06 43,37	+1 33 35,45	49 06 46,20	+1 33 46,27
3 Lehnbühl . . .	50 01 06,07	+0 39 39,34	50 01 08,33	+0 39 39,39
4 Altenburg . . .	49 52 51,60	—0 42 14,56	49 52 51,49	—0 42 14,51
5 Hesselberg . . .	49 04 05,82	—1 02 48,26	49 04 08,43	—1 02 48,55
6 Kirchheim . . .	48 10 19,38	—1 06 00,65	48 10 20,72	—1 05 57,07
7 Eichelberg . . .	— — —	+0 08 22,52	49 05 05,51	+0 08 25,89

Ellipsoidische Azimute und Längen der geodätischen Linien des transformierten Orffschen Netzes.

Station		A_{ik}	A_{ki}	S_{ik}
i	k			
o München . . .	1 Asten . . .	92°33'03,471''	273 24'30,939''	4.933 82 833
1 Asten . . .	2 Arber . . .	14 53 21,580	195 11 51,491	5.067 27 870
2 Arber . . .	3 Lehnbühl . . .	327 25 29,382	146 44 17,912	5.079 33 124
3 Lehnbühl . . .	4 Altenburg . . .	261 37 01,628	80 34 20,046	4.996 27 564
4 Altenburg . . .	5 Hesselberg . . .	195 30 42,989	15 15 04,943	4.971 50 478
5 Hesselberg . . .	6 Kirchheim . . .	182 14 13,927	2 11 52,467	4.998 98 242
6 Kirchheim . . .	o München . . .	92 11 59,894	273 01 07,794	4.913 04 164
o München . . .	7 Eichelberg . . .	5 34 23,225	185 40 42,781	5.024 03 434
1 Asten . . .	7 Eichelberg . . .	326 08 55,768	145 23 24,894	5.122 58 348
2 Arber . . .	7 Eichelberg . . .	268 49 20,258	87 44 49,982	5.016 61 784
3 Lehnbühl . . .	7 Eichelberg . . .	200 07 18,794	19 43 33,020	5.043 33 713
4 Altenburg . . .	7 Eichelberg . . .	145 01 38,269	325 40 09,691	5.031 88 929
5 Hesselberg . . .	7 Eichelberg . . .	88 23 13,000	269 17 02,772	4.938 28 298
6 Kirchheim . . .	7 Eichelberg . . .	41 32 36,533	222 28 25,887	5.135 23 478

Azimut	Geodätisch	Astronomisch	Bemerkung
München–Aufkirchen . . .	49°00'10,00''	49°00'10,00''	Die Azimute werden von Nord über Ost gezählt!
Asten–Hochgern	202 00 05,68	202 00 00,78	
Arber–Haid	206 50 04,55	206 50 01,06	
Lehnbühl–Ochsenkopf . . .	272 43 27,40	272 43 23,89	
Altenburg–Banz	18 36 59,81	18 46 58,06	
Hesselberg–Neresheim . . .	201 08 38,78	201 08 40,88	
Kirchheim–Grüntten	189 35 01,94	189 35 01,46	
Eichelberg–Brennberg . . .	91 22 29,03	91 22 26,55	

Tabelle 2.

Fehlergleichungen für die Verbindungsstrecken.

A. Für die Breiten X_1 :

Strecke

$$0.1 \quad x_1 \quad + S_{0.1} \quad \frac{w_1}{2} \quad \sin A_{0.1} = v_{0.1}$$

$$1.2 \quad x_2 - x_1 + S_{1.2} \quad \frac{w_1 + w_2}{2} \quad \sin A_{1.2} = v_{1.2}$$

$$2.3 \quad x_3 - x_2 + S_{2.3} \quad \frac{w_2 + w_3}{2} \quad \sin A_{2.3} = v_{2.3}$$

$$3.4 \quad x_4 - x_3 + S_{3.4} \quad \frac{w_3 + w_4}{2} \quad \sin A_{3.4} = v_{3.4}$$

$$4.5 \quad x_5 - x_4 + S_{4.5} \quad \frac{w_4 + w_5}{2} \quad \sin A_{4.5} = v_{4.5}$$

$$5.6 \quad x_6 - x_5 + S_{5.6} \quad \frac{w_5 + w_6}{2} \quad \sin A_{5.6} = v_{5.6}$$

$$6.0 \quad -x_6 + S_{6.0} \quad \frac{w_6}{2} \quad \sin A_{6.0} = v_{6.0}$$

$$7.0 \quad -x_7 + S_{7.0} \quad \frac{w_7}{2} \quad \sin A_{7.0} = v_{7.0}$$

$$7.1 \quad x_1 - x_7 + S_{7.1} \quad \frac{w_1 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.1} = v_{7.1}$$

$$7.2 \quad x_2 - x_7 + S_{7.2} \quad \frac{w_2 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.2} = v_{7.2}$$

$$7.3 \quad x_3 - x_7 + S_{7.3} \quad \frac{w_3 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.3} = v_{7.3}$$

$$7.4 \quad x_4 - x_7 + S_{7.4} \quad \frac{w_4 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.4} = v_{7.4}$$

$$7.5 \quad x_5 - x_7 + S_{7.5} \quad \frac{w_5 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.5} = v_{7.5}$$

$$7.6 \quad x_6 - x_7 + S_{7.6} \quad \frac{w_6 + w_7}{2} \quad \sin A_{7.6} = v_{7.6}$$

B. Für die Längen Y_1 : Die Gleichungen sind dieselben. Es tritt nur an Stelle von „ x_1 “, „ y_1 “ und an Stelle von „ $+ \sin A_{ik}$ “ tritt „ $-\cos A_{ik}$ “.

Tabelle 3.
Schema für die Fehlergleichungen.

Strecke	Gewicht	ρ	a	b	c	d	e	f	g	l	l'
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
1	0.1	$100:S_{0.1}$	+1	.	.	.	.	.	.	$S_{0.1} \frac{w_1}{2} \sin A_{0.1}$	$-S_{0.1} \frac{w_1}{2} \cos A_{0.1}$
2	1.2	$100:S_{1.2}$	-1	+1	.	.	.	.	.	$S_{1.2} \frac{w_1+w_2}{2} \sin A_{1.2}$	$-S_{1.2} \frac{w_1+w_2}{2} \cos A_{1.2}$
3	2.3	$100:S_{2.3}$	.	-1	+1	.	.	.	.	$S_{2.3} \frac{w_2+w_3}{2} \sin A_{2.3}$	$-S_{2.3} \frac{w_2+w_3}{2} \cos A_{2.3}$
4	3.4	$100:S_{3.4}$	.	.	-1	+1	.	.	.	$S_{3.4} \frac{w_3+w_4}{2} \sin A_{3.4}$	$-S_{3.4} \frac{w_3+w_4}{2} \cos A_{3.4}$
5	4.5	$100:S_{4.5}$	.	.	.	-1	+1	.	.	$S_{4.5} \frac{w_4+w_5}{2} \sin A_{4.5}$	$-S_{4.5} \frac{w_4+w_5}{2} \cos A_{4.5}$
6	5.6	$100:S_{5.6}$	.	.	.	.	-1	+1	.	$S_{5.6} \frac{w_5+w_6}{2} \sin A_{5.6}$	$-S_{5.6} \frac{w_5+w_6}{2} \cos A_{5.6}$
7	6.0	$100:S_{6.0}$	.	.	.	.	.	-1	.	$S_{6.0} \frac{w_6}{2} \sin A_{6.0}$	$-S_{6.0} \frac{w_6}{2} \cos A_{6.0}$
8	7.0	$100:S_{7.0}$	.	.	.	.	.	.	-1	$S_{7.0} \frac{w_7}{2} \sin A_{7.0}$	$-S_{7.0} \frac{w_7}{2} \cos A_{7.0}$
9	7.1	$100:S_{7.1}$	+1	.	.	.	.	.	-1	$S_{7.1} \frac{w_1+w_7}{2} \sin A_{7.1}$	$-S_{7.1} \frac{w_1+w_7}{2} \cos A_{7.1}$
10	7.2	$100:S_{7.2}$	.	+1	.	.	.	.	-1	$S_{7.2} \frac{w_2+w_7}{2} \sin A_{7.2}$	$-S_{7.2} \frac{w_2+w_7}{2} \cos A_{7.2}$
11	7.3	$100:S_{7.3}$	.	.	+1	.	.	.	-1	$S_{7.3} \frac{w_3+w_7}{2} \sin A_{7.3}$	$-S_{7.3} \frac{w_3+w_7}{2} \cos A_{7.3}$
12	7.4	$100:S_{7.4}$	.	.	.	+1	.	.	-1	$S_{7.4} \frac{w_4+w_7}{2} \sin A_{7.4}$	$-S_{7.4} \frac{w_4+w_7}{2} \cos A_{7.4}$
13	7.5	$100:S_{7.5}$	.	.	.	.	+1	.	-1	$S_{7.5} \frac{w_5+w_7}{2} \sin A_{7.5}$	$-S_{7.5} \frac{w_5+w_7}{2} \cos A_{7.5}$
14	7.6	$100:S_{7.6}$	.	.	.	.	.	+1	-1	$S_{7.6} \frac{w_6+w_7}{2} \sin A_{7.6}$	$-S_{7.6} \frac{w_6+w_7}{2} \cos A_{7.6}$

Tabelle 4.

Gewichte.

$$\frac{100}{S_{0.1}} = 1,165; \quad \frac{100}{S_{4.5}} = 1,068; \quad \frac{100}{S_{7.0}} = 0,946; \quad \frac{100}{S_{7.4}} = 0,929;$$

$$\frac{100}{S_{1.2}} = 0,856; \quad \frac{100}{S_{5.6}} = 1,002; \quad \frac{100}{S_{7.1}} = 0,754; \quad \frac{100}{S_{7.5}} = 1,153;$$

$$\frac{100}{S_{2.3}} = 0,833; \quad \frac{100}{S_{6.0}} = 1,222; \quad \frac{100}{S_{7.2}} = 0,962; \quad \frac{100}{S_{7.6}} = 0,732;$$

$$\frac{100}{S_{3.4}} = 1,009; \quad \frac{100}{S_{7.3}} = 0,905;$$

$\sin A_{0.1} \dots 9.99\ 957 = +0,9990;$	$\cos A_{0.1} \dots 8,64\ 841n. = -0,0445$
$\sin A_{1.2} \dots 9.40\ 986 = +0,2570;$	$\cos A_{1.2} \dots 9,98\ 517 = +0,9664$
$\sin A_{2.3} \dots 9.73\ 111n. = -0,5384;$	$\cos A_{2.3} \dots 9.92\ 567 = +0,8427$
$\sin A_{3.4} \dots 9.99\ 534n. = -0,9893;$	$\cos A_{3.4} \dots 9.16\ 371n. = -0,1458$
$\sin A_{4.5} \dots 9.42\ 723n. = -0,2674;$	$\cos A_{4.5} \dots 9.98\ 389n. = -0,9636$
$\sin A_{5.6} \dots 8.59\ 148n. = -0,0390;$	$\cos A_{5.6} \dots 9.99\ 967n. = -0,9993$
$\sin A_{6.0} \dots 9.99\ 968 = +0,9993;$	$\cos A_{6.0} \dots 8.58\ 419n. = -0,0384$
$\sin A_{7.0} \dots 8.99\ 541n. = -0,0989;$	$\cos A_{7.0} \dots 9.99\ 786n. = -0,9951$
$\sin A_{7.1} \dots 9.75\ 434 = +0,5680;$	$\cos A_{7.1} \dots 9.91\ 542n. = -0,8230$
$\sin A_{7.2} \dots 9.99\ 966 = +0,9992;$	$\cos A_{7.2} \dots 8.59\ 448 = +0,0393$
$\sin A_{7.3} \dots 9.52\ 830 = +0,3375;$	$\cos A_{7.3} \dots 9.97\ 374 = +0,9413$
$\sin A_{7.4} \dots 9.75\ 125n. = -0,5640;$	$\cos A_{7.4} \dots 9.91\ 687 = +0,8258$
$\sin A_{7.5} \dots 9.99\ 997n. = -0,9999;$	$\cos A_{7.5} \dots 8.09\ 668n. = -0,0125$
$\sin A_{7.6} \dots 9.82\ 947n. = -0,6752;$	$\cos A_{7.6} \dots 9.86\ 781n. = -0,7376$

Zusammenstellung der Widersprüche:

$$\begin{aligned} w_1 &= -1,98'' \quad (w_4 + w_5) = +0,18'' \quad (w_1 + w_7) = -1,92'' \quad w_5 + w_7 = +1,94'' \\ (w_1 + w_2) &= +2,71 \quad (w_5 + w_6) = +4,07 \quad (w_2 + w_7) = +4,75 \quad w_6 + w_7 = +2,25 \\ (w_2 + w_3) &= +1,22 \quad w_6 &= +2,19 \quad (w_3 + w_7) = -3,41 \\ (w_3 + w_4) &= -5,17 \quad w_7 &= +0,06 \quad (w_4 + w_7) = -1,64 \end{aligned}$$

Tabelle 5. Normalgleichungen.

	a	b	c	d	e	f	g
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
I	+2,775	-0,856	.	.	.	.	-0,754
II	-0,856	+2,651	-0,833	.	.	.	-0,962
III	.	-0,833	+2,747	-1,009	.	.	-0,905
IV	.	.	-1,009	+3,006	-1,068	.	-0,929
V	.	.	.	-1,068	+3,223	-1,002	-1,153
VI	.	.	.	.	-1,002	+2,956	-0,732
VII	-0,754	-0,962	-0,905	-0,929	-1,153	-0,732	+6,381

	l für x						
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
	Unbestimmte Widersprüche						
I	+0,655	-0,128	.	.	.	.	+0,284
II	+0,128	+0,897	+0,269	.	.	.	+0,500
III	.	-0,269	+0,394	+0,495	.	.	+0,169
IV	.	.	-0,495	-0,643	+0,134	.	-0,282
V	.	.	.	-0,134	-0,614	+0,019	-0,500
VI	.	.	.	.	-0,019	-0,857	-0,338
VII	-0,284	-0,500	-0,169	+0,282	+0,500	+0,338	+0,217

	l' für y						
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
	Unbestimmte Widersprüche						
I	+0,917	+0,483	.	.	.	.	+0,411
II	-0,483	-0,081	+0,421	.	.	.	-0,020
III	.	-0,421	-0,965	-0,073	.	.	-0,471
IV	.	.	+0,073	-0,822	-0,482	.	-0,413
V	.	.	.	+0,482	-0,012	-0,500	+0,006
VI	.	.	.	.	+0,500	+0,849	+0,369
VII	-0,411	+0,020	+0,471	+0,413	-0,006	-0,369	-0,381

	l	l'	pll	$pl'l'$
	Numerische Werte			
I	-0,913	+0,230	+4,002	+2,752
II	+1,478	-0,430		
III	-1,679	+0,711		
IV	+1,476	+0,103		
V	-0,443	-0,937		
VI	-0,937	+1,367		
VII	+0,009	-1,100		

Tabelle 6a.

Auflösung nach unbestimmten Widersprüchen.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	
$x_7 = -0,0745$	$+0,0355$	$+0,0177$	$-0,0182$	$-0,0486$	$+0,0441$	$-0,0382$	Rücklaufende Auflösung der Normalgleichungen
$x_6 = -0,0419$	$+0,0179$	$+0,0263$	$+0,0339$	$+0,0592$	$+0,3507$	$+0,1868$	
$x_5 = -0,0690$	$+0,0270$	$+0,0645$	$+0,1139$	$+0,1915$	$+0,1474$	$+0,2419$	
$x_4 = -0,0888$	$+0,0267$	$+0,1505$	$+0,2064$	$-0,0004$	$+0,0857$	$+0,1274$	
$x_3 = -0,1234$	$+0,0179$	$-0,1274$	$-0,1265$	$-0,0264$	$+0,0589$	$-0,1206$	
$x_2 = -0,2187$	$-0,3355$	$-0,1483$	$-0,0532$	$-0,0335$	$+0,0427$	$-0,3075$	
$x_1 = -0,3236$	$-0,0478$	$-0,0409$	$-0,0213$	$-0,0235$	$+0,0252$	$-0,2075$	

Tabelle 6b.

Auflösung nach unbestimmten Widersprüchen.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	
$y_7 = +0,1482$	$+0,0805$	$-0,0018$	$+0,0009$	$+0,0864$	$+0,1514$	$+0,3573$	Rücklaufende Auflösung der Normalgleichungen
$y_6 = +0,0795$	$+0,0515$	$+0,0141$	$-0,0176$	$-0,1180$	$-0,1782$	$+0,0785$	
$y_5 = +0,1266$	$+0,0935$	$+0,0428$	$-0,0528$	$+0,0879$	$+0,2112$	$+0,3393$	
$y_4 = +0,1476$	$+0,1471$	$+0,1181$	$+0,3074$	$+0,2713$	$+0,1730$	$+0,5707$	
$y_3 = +0,1689$	$+0,2653$	$+0,3806$	$+0,1565$	$+0,1580$	$+0,1526$	$+0,6034$	
$y_2 = +0,2169$	$+0,1044$	$-0,0445$	$+0,0551$	$+0,0984$	$+0,1291$	$+0,3447$	
$y_1 = -0,2233$	$-0,1200$	$-0,0142$	$+0,0172$	$+0,0538$	$+0,0809$	$+0,0553$	

Tabelle 7.

Endergebnis und Fehlerberechnung nach Einführung
der numerischen Widersprüche.

$$[pvv] = [pll] - [pal]x_1 - [pbl]x_2 - [pcl]x_3 - [pdl]x_4 - [pel]x_5 - [pfl]x_6 - [pgl]x_7$$

$$[pvv] = 1,706$$

$$[pv'v'] = 1,627$$

$$\left. \begin{aligned} m_{0x} \pm &= \sqrt{\frac{[pvv]}{n-\bar{u}}} = \pm 0,494 \text{ (m)} \\ m_{0y} \pm &= \sqrt{\frac{[pv'v']}{n-\bar{u}}} = \pm 0,482 \text{ (m)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{mittlere Fehler der} \\ \text{Gewichtseinheit} \\ \text{(100 km)} \end{array}$$

$$x_1 = +0,288 \pm 0,360 \text{ m}$$

$$x_1 = +0,009''$$

$$x_2 = -0,253 \pm 0,437 \text{ m}$$

$$x_2 = -0,008''$$

$$x_3 = +0,513 \pm 0,458 \text{ m}$$

$$x_3 = +0,017''$$

$$x_4 = -0,182 \pm 0,450 \text{ m}$$

$$x_4 = -0,006''$$

$$x_5 = +0,263 \pm 0,418 \text{ m}$$

$$x_5 = +0,009''$$

$$x_6 = +0,441 \pm 0,353 \text{ m}$$

$$x_6 = +0,014''$$

$$x_7 = +0,140 \pm 0,333 \text{ m}$$

$$x_7 = +0,005''$$

$$\text{Mittel } \pm 0,401 \text{ m}$$

$$y_1 = +0,088 \pm 0,351 \text{ m}$$

$$y_1 = +0,004''$$

$$y_2 = +0,295 \pm 0,426 \text{ m}$$

$$y_2 = +0,015''$$

$$y_3 = -0,005 \pm 0,447 \text{ m}$$

$$y_3 = +0,000''$$

$$y_4 = +0,188 \pm 0,439 \text{ m}$$

$$y_4 = +0,009''$$

$$y_5 = +0,376 \pm 0,408 \text{ m}$$

$$y_5 = +0,019''$$

$$y_6 = -0,263 \pm 0,345 \text{ m}$$

$$y_6 = -0,013''$$

$$y_7 = +0,292 \pm 0,325 \text{ m}$$

$$y_7 = +0,014''$$

$$\text{Mittel } \pm 0,390 \text{ m}$$

Tabelle 8.

Ausgeglicheue Punktlagen.

P_0 München	48° 08' 20,050''	0° 00' 00,000''	$S_{01} \dots 4.933 \ 82 \ 866$ $S_{12} \dots 5.067 \ 27 \ 703$
P_1 Asten	48 05 55,519	+1 09 06,804	$S_{23} \dots 5.079 \ 33 \ 416$ $S_{34} \dots 4.996 \ 27 \ 534$
P_2 Arber	49 06 46,192	+1 33 46,285	$S_{45} \dots 4.971 \ 50 \ 246$ $S_{56} \dots 4.998 \ 98 \ 185$
P_3 Lehnbühl	50 01 08,347	+0 39 39,390	$S_{60} \dots 4.913 \ 04 \ 314$ $S_{07} \dots 5.024 \ 03 \ 509$
P_4 Altenburg	49 52 51,484	—0 42 14,501	$S_{17} \dots 5.122 \ 58 \ 277$ $S_{27} \dots 5.016 \ 61 \ 788$
P_5 Hesselberg	49 04 08,439	—1 02 48,531	$S_{37} \dots 5.043 \ 33 \ 811$ $S_{47} \dots 5.031 \ 88 \ 806$
P_6 Kirchheim	48 10 20,734	—1 05 57,083	$S_{57} \dots 4.938 \ 28 \ 246$ $S_{67} \dots 5.135 \ 23 \ 529$
P_7 Eichelberg	49 05 05,515	+0 08 25,904	