

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Bemerkungen zur Axiomatik der Somentheorie.

Von Constantin Carathéodory.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. November 1938.

Vor einigen Monaten habe ich ein System von Axiomen aufgestellt, die den Zweck hatten, die Operationen der Vereinigung, des Durchschnitts und der Differenz, die man in der Mengenlehre benutzt, abstrakt zu formulieren und auf die erste dieser Operationen zurückzuführen.¹ Die mathematischen Objekte, die diesen Axiomen genügen, wurden Somen genannt. In dieser Theorie erscheint als abgeleiteter Begriff der Begriff des Teils: man sagt, daß B Teil von A ist, und schreibt $B \subseteq A$, wenn

$$A \dot{+} B = A$$

ist.

Herr E. Foradori hat mich brieflich darauf aufmerksam gemacht, daß es vorteilhaft ist, diesen Begriff des Teils an die Spitze zu stellen, dagegen aber den Begriff der Vereinigung als abgeleitete Operation zu behandeln, wie er es auf S. 9 seines Buches „Grundgedanken der Teiltheorie“ (Hirzel, Leipzig 1937, S. 1–77) schon getan hatte.²

Hierdurch wird in der Tat das Axiomensystem für die Somen wesentlich einheitlicher. Darüber hinaus ergibt sich aber, daß ähnlich wie in der Gruppentheorie jede abstrakte Gruppe als Permutationsgruppe dargestellt werden kann, hier jedes System von Somen mit Hilfe von sogenannten teilweise geordneten Mengen, die gewisse leicht zu charakterisierende zusätzliche Eigenschaften besitzen, gewonnen wird. Bei dieser Darstellung erscheinen die Somen als Klassen, in welche die teilweise geordnete Menge zerlegt wird; dies hat den Vorteil, daß die Gleichung $A = B$ jetzt immer eine Identität bedeutet, was bei meiner

¹ C. Carathéodory, Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs. d. Sitzungsber. (1938) S. 27–68.

² Ähnliches findet man auch bei O. Ore, On the foundation of Abstract Algebra. Ann. Math. (2) 36 (1935) p. 406.

früheren Darstellung dieser Theorie nicht der Fall zu sein brauchte. Im übrigen ist das neue Axiomensystem dem früheren völlig äquivalent.

1. Einteilung von Mengen in Klassen. Wir betrachten eine Menge m_0 von irgendwelchen mathematischen Objekten, die wir mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b \dots$ bezeichnen. Diese Menge m_0 wird in Klassen zerlegt, wenn wir jedem Element a eine Teilmenge von m_0 zuordnen, die a enthält, und wenn dabei zwei beliebige dieser Untermengen entweder identisch oder fremd sind.

Bezeichnet man mit $c(a)$ die Klasse, die das Element a enthält, so muß die Menge $c(a)$ jedenfalls folgenden zwei Bedingungen genügen:

$$(1. 1) \quad a \in c(a)$$

$$(1. 2) \quad \text{aus } b \in c(a) \text{ folgt } c(b) = c(a).$$

Ordnet man umgekehrt jedem Element a aus m_0 eine Teilmenge $c(a)$ von m_0 zu, für welche die Bedingungen (1. 1) und (1. 2) bestehen, so liegt eine Zerlegung von m_0 in Klassen vor. Haben in der Tat zwei der Mengen $c(a)$ und $c(b)$ auch nur ein einziges gemeinsames Element e , so folgt aus $e \in c(a)$ und $e \in c(b)$, daß $c(a)$ und $c(b)$ beide gleich $c(e)$ sind, und man hat daher $c(a) = c(b)$.

2. Es sei n_0 eine beliebige Teilmenge von m_0 . Wir bezeichnen mit n die Gesamtheit der Elemente a von m_0 , für welche der Durchschnitt $n_0 c(a)$ nicht leer ist. Man hat dann

$$(2. 1) \quad n_0 \prec n,$$

und mit jedem Element a sind auch alle übrigen Elemente b von $c(a)$ in n enthalten. Die Menge n wird also auch durch diese ihre Untermengen in Klassen zerlegt; sie ist eine Menge von Klassen $c(a)$.

Ist $p(a)$ irgendeine Menge von Klassen $c(a)$, für welche $n_0 \prec p$ ist, so ist auch $p \prec n$, d. h. n ist die kleinste Menge von Klassen $c(a)$, die n_0 als Teilmenge enthält.

Wir können die Klassen $\mathfrak{c}(a)$, $\mathfrak{c}(b)$, ... als neue mathematische Objekte ansehen; wir werden diese neuen Objekte mit großen lateinischen Buchstaben A , B , ... bezeichnen und etwa setzen

$$(2. 2) \quad A = \mathfrak{c}(a).$$

Die Elemente a , a' , ..., die in $\mathfrak{c}(a)$ enthalten sind, werden Repräsentanten von A genannt.

Jeder Menge von Klassen $\mathfrak{n}(a)$ entspricht dann eine Menge $\mathfrak{N}(A)$ von Elementen A und umgekehrt. Wir werden in diesem Falle schreiben

$$(2. 3) \quad \mathfrak{N}(A) = \mathfrak{n}(a),$$

und insbesondere

$$(2. 4) \quad \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{m}_0$$

setzen.

Mit dieser Bezeichnung folgen aus

$$(2. 5) \quad \mathfrak{N}_j(A) = \mathfrak{n}_j(a) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

die Formeln

$$(2. 6) \quad \mathfrak{N}_1(A) \dot{+} \mathfrak{N}_2(A) \dot{+} \dots = \mathfrak{n}_1(a) \dot{+} \mathfrak{n}_2(a) \dot{+} \dots$$

$$(2. 7) \quad \mathfrak{N}_1(A) \mathfrak{N}_2(A) \dots = \mathfrak{n}_1(a) \mathfrak{n}_2(a) \dots$$

3. Teilweise geordnete Mengen. Wir nehmen jetzt an, daß die Menge $\mathfrak{m}_0$, die wir im § 1 betrachtet haben, nach der Bezeichnung von Hausdorff teilweise geordnet ist. D. h. zwischen gewissen Paaren von Elementen a , b aus $\mathfrak{m}_0$ soll eine Beziehung bestehen, die wir mit „ a ist kleiner oder gleich b “, ansprechen und mit

$$(3. 1) \quad a \leq b$$

bezeichnen. Diese Bezeichnung soll reflexiv und transitiv sein, d. h. sie soll den Bedingungen genügen.

$$(3. 2) \quad \text{Es ist immer } a \leq a,$$

$$(3. 3) \quad \text{aus } a \leq b \text{ und } b \leq c \text{ folgt } a \leq c.$$

Eine beliebige Menge m_0 kann man auf folgende Weise teilweise ordnen: jedem Element a aus m_0 soll eine Teilmenge $p(a)$ von m_0 eindeutig entsprechen. Für zwei Elemente a und b schreiben wir $a \leq b$ dann und nur dann, wenn

$$(3.4) \quad p(b) \supset p(a)$$

ist. Man verifiziert sofort, daß hier die Bedingungen (3.2) und (3.3) bestehen.

Jede mögliche teilweise Ordnung der Elemente von m_0 kann auf diese Weise hergestellt werden. Wir bezeichnen mit $m(a)$ diejenige Teilmenge von m_0 , die aus allen Elementen b besteht, für welche (3.1) gilt. Dann ist die Forderung

$$(3.5) \quad b \in m(a)$$

nur eine andere Ausdrucksweise für (3.1). Wegen (3.2) und (3.3) hat man dann

$$(3.6) \quad a \in m(a),$$

$$(3.7) \quad \text{aus } b \in m(a) \text{ folgt } m(b) \supset m(a).$$

Nun bemerke man, daß nach (3.6) auch $b \in m(b)$ ist; daher folgt aus

$$(3.8) \quad m(b) \supset m(a)$$

die Relation $b \in m(a)$. Die beiden Forderungen (3.5) und (3.8) sind also hier völlig äquivalent, so daß wir an Stelle von $p(a)$ die Menge $m(a)$ setzen können.

Wenn man jedem Element a eine Menge $m(a)$ zuordnet, für welche (3.6) und (3.7) gelten, und wenn man die Relation $a \leq b$ durch (3.8) definiert, so sieht man, daß die Menge $m(a)$ gerade aus denjenigen Elementen b besteht, für welche $a \leq b$ ist.

4. Wir ordnen nun jedem Element a aus m_0 diejenige Teilmenge $c(a)$ von m_0 zu, die aus allen Elementen a' besteht, für welche

$$(4.1) \quad m(a') = m(a)$$

ist. Hierdurch wird m_0 in Klassen zerlegt: in der Tat ist erstens immer $a \in c(a)$, und zweitens hat man, wenn e ein gemeinsames Element von zwei Klassen $c(a)$ und $c(b)$ ist,

$$m(a) = m(e), \quad m(b) = m(e).$$

Dann ist aber auch $m(a) = m(b)$, und die beiden Klassen $c(a)$ und $c(b)$ müssen aus denselben Elementen bestehen.

Es sei

$$(4. 1) \quad b \in m(a), \quad b' \in c(b);$$

dann hat man

$$(4. 2) \quad b' \in m(b'), \quad m(b') = m(b) \rightarrow m(a)$$

und folglich $b' \in m(a)$. Es folgt hieraus

$$(4. 3) \quad c(b) \rightarrow m(a),$$

und wir sehen, daß $m(a)$ eine Menge von Klassen $c(b)$ ist.

5. Nach dem § 2 schreiben wir jetzt

$$(5. 1) \quad A = c(a), \quad \mathfrak{M}_0 = m_0, \quad \mathfrak{M}(A) = m(a).$$

Bezeichnet man mit b irgendeinen Repräsentanten von B , so sieht man, daß jede der beiden Relationen

$$(5. 2) \quad B \in \mathfrak{M}(A), \quad b \in m(a)$$

aus der anderen folgt.

Die Menge $\mathfrak{M}_0$ der Elemente A wird teilweise geordnet, wenn man jedem Element A die Teilmenge $\mathfrak{M}(A)$ zuordnet. Denn die Relationen

$$(5. 3) \quad A \in \mathfrak{M}(A),$$

$$(5. 4) \quad \text{aus } B \in \mathfrak{M}(A) \text{ folgt } \mathfrak{M}(B) \rightarrow \mathfrak{M}(A)$$

sind direkte Folgerungen von (3. 6) und (3. 7).

6. Die Axiome der Somentheorie. Die Elemente $A, B, \dots$ der Menge $\mathfrak{M}_0$ sollen Somen genannt werden, wenn die Mengen $\mathfrak{M}(A) = m(a)$ gewissen zusätzlichen Bedingungen genügen,

die durch die weiter unten angegebenen Axiomen festgelegt werden.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: das Soma A soll Teil des Somas B genannt werden, wenn

$$(6. 1) \quad \mathfrak{M}(B) \prec \mathfrak{M}(A),$$

oder, was dasselbe ist, wenn für zwei Repräsentanten a, b dieser Somen

$$(6. 2) \quad m(b) \prec m(a)$$

ist. Wir schreiben dann

$$(6. 3) \quad A \subseteq B$$

und bemerken, daß wir haben

$$(6. 4) \quad A \subseteq A,$$

$$(6. 5) \quad \text{aus } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C \text{ folgt } A \subseteq C.$$

Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so ist nach (6. 2) für zwei Repräsentanten a, b der beiden Somen $m(b) \prec m(a)$ und $m(a) \prec m(b)$, also $m(a) = m(b)$. Nach Voraussetzung ist dann auch $\mathfrak{c}(a) = \mathfrak{c}(b)$ oder $A = B$. Es gilt also der

Satz 1. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.

7. Die Existenz der Vereinigung von Somen wird durch folgendes Axiom festgelegt.

Axiom 1. Ist eine Folge $A_j (j = 1, 2, \dots)$ von endlich oder unendlich vielen Somen gegeben, so gibt es mindestens ein Soma V , für welches erstens

$$(7. 1) \quad A_j \subseteq V \quad (j = 1, 2, \dots)$$

gilt, und welches zweitens der Bedingung

$$(7. 2) \quad V \subseteq B.$$

genügt, vorausgesetzt, daß das Soma B , alle Beziehungen

$$(7. 3) \quad A_j \subseteq B \quad (j = 1, 2, \dots)$$

befriedigt.

Dieses Soma V ist eindeutig bestimmt, denn für jedes weitere Soma V' , das die gleichen Eigenschaften haben würde, müßte man gleichzeitig $V' \subseteq V$ und $V \subseteq V'$ haben. Es wird die Vereinigung der Somen A_j genannt und mit

$$(7.4) \quad V = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$$

bezeichnet.

Wir betrachten Repräsentanten a_j und v der Somen A_j und V . Aus (7.1) folgt

$$(7.5) \quad m(v) \prec m(a_j),$$

und da dies für alle Werte $j = 1, 2, \dots$ gelten soll, ist mit der Bezeichnung

$$(7.6) \quad d = m(a_1) m(a_2) \dots$$

immer auch

$$(7.7) \quad m(v) \prec d.$$

Ist b irgendein Element von d , so ist $b \in m(a_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) und also auch $m(b) \prec m(a_j)$. Setzt man also $B = c(b)$, so ist $A_j \subseteq B$ für $j = 1, 2, \dots$ und nach Voraussetzung $V \subseteq B$. Es soll also sein $m(b) \prec m(v)$ und daher auch $b \in m(v)$. Da dies für jedes Element b von d gelten muß, ist

$$(7.8) \quad d \prec m(v),$$

und wir haben schließlich

$$(7.9) \quad m(v) = m(a_1) m(a_2) \dots$$

Ist umgekehrt v ein Element von m_0 , für welches (7.9) besteht, und setzt man $V = c(v)$, $A_j = c(a_j)$, so sind für diese Somen die Forderungen des Axioms 1 erfüllt, und es besteht auch (7.4).

Satz 2. Das Axiom 1 ist gleichbedeutend mit der Forderung: Jeder Folge $a_1, a_2, \dots$ von Elementen aus m_0 kann man mindestens ein Element v zuordnen, für welches die Gleichung (7.9) gilt.

Aus der Gleichung (7. 9) sieht man sofort, daß die Operation der Vereinigung von Somen kommutativ und assoziativ im weitesten Sinne ist; es gilt außerdem die Gleichung

$$(7. 10) \quad A \dot{+} A = A.$$

Sind a, b Repräsentanten von Somen A, B , so ist $A \subseteq B$ gleichbedeutend mit $m(b) \prec m(a)$. Man hat aber dann

$$(7. 11) \quad m(a) \cap m(b) = m(b)$$

und folglich

$$(7. 12) \quad A \dot{+} B = B.$$

Umgekehrt folgt aus (7. 12) die Gleichung (7. 11), die gleichbedeutend mit $m(b) \prec m(a)$ oder $A \subseteq B$ ist.

Satz 3. Jede der Relationen $A \subseteq B$ und $A \dot{+} B = B$ kann durch die andere ersetzt werden.

8. Die übrigen Axiome der Somentheorie können jetzt unverändert aus meiner früheren Arbeit entnommen werden.

Axiom 2. Es gibt mindestens ein Soma O , das leere Soma, das Teil eines beliebigen Somas ist.

Ist dann o ein Repräsentant von O , so muß für jedes Element a aus m_0 immer $m(a) \prec m(o)$ sein, woraus folgt

$$(8. 1) \quad m(o) = m_0.$$

Umgekehrt ist jedes Element o , für welches (8. 1) gilt, Repräsentant des leeren Somas. Enthält das betrachtete System von Somen außer O mindestens noch ein anderes Soma, so hat die Relation

$$(8. 2) \quad X \subseteq A$$

für jedes von O verschiedene Soma A mindestens zwei Lösungen in X . Für zwei verschiedene Somen A und B kann es aber vorkommen, daß das System

$$(8. 3) \quad X \subseteq A, \quad X \subseteq B$$

nur eine Lösung in X besitzt, nämlich $X = O$. Dann sagt man, daß A und B fremd sind, und man schreibt

$$(8.4) \quad A \circ B.$$

Axiom 3. Ist ein Soma B fremd allen Somen $A_1, A_2, \dots$ einer Folge, so ist B ebenfalls fremd der Vereinigung $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$ dieser Somen.

Axiom 4. Sind A und B zwei beliebige Somen, so gibt es immer mindestens ein Soma B_1 , das den Bedingungen

$$B_1 \circ A, \quad B_1 \subseteq B, \quad B_1 \dot{+} A = B \dot{+} A$$

gleichzeitig genügt.