Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine Abwandlung des Cauchy-Lipschitzschen Verfahrens bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von Georg Aumann in Frankfurt a. M.

Mit einer Figur.

Vorgelegt von Herrn H. Tietze in der Sitzung vom 5. November 1938.

Einleitung. Die Cauchy-Lipschitzsche Methode bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zum Nachweis eines Integrals, welches bekanntlich die gesuchte Integralkurve durch Streckenzüge, deren Strecken die in ihren Anfangspunkten durch das Differentialgleichungssystem vorgezeichnete Feldrichtung haben, beliebig genau annähert, bezeichnet man häufig als direkt, im Gegensatz zu sogenannten indirekten Beweisen. Allgemein wird man unter einer direkten Methode ein Rezept verstehen, dessen Anwendbarkeit an das Vorliegen eines bestimmten, durch gewisse Bedingungen gekennzeichneten Sachverhaltes S geknüpft ist und welches in der Ausführung einer Reihe bekannter Operationen an S besteht und zu einem eindeutigen Resultat führt. Eine Methode M_1 wird man umfassender nennen als eine Methode M_2, wenn M_1 dasselbe leistet wie M_2, darüber hinaus aber auch noch in Fällen anwendbar ist, wo M_2 versagt. In diesem Sinne ist die Anwendbarkeit des Cauchy-Lipschitzschen Verfahrens an die Vorgabe eines Richtungsfeldes mit einer Lipschitzbedingung gebunden; bei der Behandlung eines nur stetigen Richtungsfeldes dagegen versagt die Cauchy-Lipschitzsche Methode, indem sie keineswegs mehr ein eindeutiges Resultat zu liefern braucht. Dies ist an sich ganz natürlich, weil es ja im genannten Falle mehrere von einem Punkt ausgehende Integralkurven geben kann. Eindeutig ist dagegen in diesem Fall z. B. die Vereinigungsmenge $E(\mathfrak{x})$ aller vom Punkt $\mathfrak{x}$ ausgehenden Integralkurven, die „Emission von $\mathfrak{x}$" nach A. Marchaud.[1] Will man eine die Cauchy-Lipschitzsche

[1] Sur les champs continues de demi-cônes convexes et leurs intégrales, Comp. math. 3 (1936), 89–127.

Methode umfassende ersinnen, die einschränkungslos auf stetige Richtungsfelder anwendbar sein soll, so wird man sie zweckmäßig so einrichten, daß sie als Resultat $E(\mathfrak{x})$ liefert. Um ein solches Verfahren zu erhalten, ist es naheliegend, das Cauchy-Lipschitzsche Verfahren in der Weise abzuändern, daß man nicht einzelne Näherungsstreckenzüge fester Schrittlänge ε nimmt und mit ε gegen Null geht, sondern, daß man von vornherein eine ganze Gesamtheit von Näherungsstreckenzügen einer gewissen Approximationsgüte ins Auge faßt, etwa die abgeschlossene Hülle $V(\mathfrak{x}; \varepsilon)$ der Vereinigungsmenge aller möglichen von $\mathfrak{x}$ ausgehenden Näherungsstreckenzüge einer (innerhalb des einzelnen Streckenzuges nicht notwendig festen) Schrittlänge $\leqq \varepsilon$, wobei die Strecken die in den Anfangspunkten vorgezeichnete Feldrichtung aufweisen. $V(\mathfrak{x}; \varepsilon)$ nimmt mit ε monoton ab; man wird den Durchschnitt $W(\mathfrak{x})$ aller $V(\mathfrak{x}; \varepsilon)$ bilden. Die eben beschriebene Konstruktion ist offenbar bei jedem (auch nicht stetigen) Richtungsfeld durchführbar und gibt in $W(\mathfrak{x})$ ein eindeutiges Resultat. Jedoch enthält, wie einfache Beispiele zeigen, $W(\mathfrak{x})$ nicht immer alle von $\mathfrak{x}$ ausgehenden Integralkurven. Dieser Mangel läßt sich nun leicht beheben, indem man alle möglichen „Näherungsstreckenzüge" überhaupt heranzieht: Man betrachtet, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, die abgeschlossene Hülle $V(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$ der Vereinigungsmenge aller möglichen von $\mathfrak{x}$ ausgehenden Streckenzüge mit einer nicht notwendig festen Schrittlänge $\leqq \varepsilon$ und einer Winkelabweichung $\leqq \delta$ der Strecken von den in ihren Anfangspunkten vorgeschriebenen Feldrichtungen und bildet den Durchschnitt $J(\mathfrak{x})$ aller $V(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$; diese Konstruktion ist anwendbar auf jedes eindeutige, sonst aber beliebige Richtungsfeld und ordnet in eindeutiger Weise jedem Punkt $\mathfrak{x}$ die Menge $J(\mathfrak{x})$ zu, die wir *die von* $\mathfrak{x}$ *ausgehende Emission* des betrachteten Richtungsfeldes nennen wollen. Es zeigt sich nun, daß bei stetigen Richtungsfeldern[2] $J(\mathfrak{x})$ mit $E(\mathfrak{x})$ übereinstimmt, so daß wir (sachlich wenigstens) mit unserer Bezeichnung mit A. Marchaud in Einklang sind und daher im Falle, daß es nur eine einzige von $\mathfrak{x}$ ausgehende Integralkurve gibt, $J(\mathfrak{x})$ gerade diese Kurve darstellt.

---

[2] Von einer nebensächlichen Bedingung abgesehen, vgl. Nr. 3, A_8.

Die Konstruktion von $V(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$ erscheint nach der obigen Definition als reichlich kompliziert; wenn man aber den mengentheoretischen Kern herausschält, so nimmt sie eine denkbar einfache Form an. Mit dieser, von metrischen und linearen Eigenschaften des Raumes absehenden, mengentheoretischen Formulierung ergibt sich die Möglichkeit, „Differentialgleichungen", oder wie ich es nennen werde, „D-Systeme" und ihre „Emissionen" in topologischen Räumen zu definieren. Dies wird in der folgenden Nr. 1 kurz skizziert, jedoch hier nicht weiter ausgestaltet. Nr. 2 bis Nr. 4 behandeln den klassischen Fall des Richtungsfeldes im R_n im Sinne dieser neuen Auffassung.

1. D-Abbildungen in topologischen Räumen. Es sei R ein topologischer Raum. Jedem Punkt $x \in R$ sei in eindeutiger Weise eine Punktmenge $D(x)$ zugeordnet mit

$$x \in D(x) \subseteq R; \tag{1}$$

wir sprechen dann kurz von einer *D-Abbildung* in R. Ist $M \subseteq R$, so werde die Vereinigungsmenge $\sum\limits_{x \in M} D(x)$ mit $D(M)$ bezeichnet; wegen (1) ist

$$M \subseteq D(M) \subseteq R. \tag{2}$$

Die D-Abbildung $D(x)$ heißt *abgeschlossen*, wenn $D(x)$ für jedes $x \in R$ abgeschlossen ist; $D(x)$ heißt *gesättigt*,[3] wenn $D(D(x)) = D^2(x)$ mit $D(x)$ identisch ist für jedes $x \in R$. Es ist $D(x)$ dann und nur dann gesättigt, wenn aus $y \in D(x)$ stets $D(y) \subseteq D(x)$ folgt. Aus jeder D-Abbildung $D(x)$ läßt sich eine gesättigte D-Abbildung herleiten: Für $x \in R$ bildet man $D^2(x)$, allgemein $D^p(x) = D(D^{p-1}(x))$, $p = 2, 3, \ldots$ $(D^1(x) = D(x))$, und dann

$$H(x) = \sum_{p=1}^{\infty} D^p(x).$$

---

[3] Oder *idempotent*, um eine in der Algebra gebräuchliche Bezeichnungsweise zu verwenden.

$H(x)$ ist eine D-Abbildung und in bezug auf $D(x)$ *invariant*, d. h. es gilt $D(H(x)) = H(x)$ für jedes $x \in R$; aus dieser Invarianz folgt $H^2(x) = H(x)$, $H(x)$ ist gesättigt.

Wenn auch die abgeschlossene Hülle $\overline{H(x)}$ von $H(x)$ (wir schreiben dafür kürzer $\overline{H}(x)$) in bezug auf $D(x)$ invariant ist, so nennen wir die erzeugende D-Abbildung *regulär*. Nennt man ferner $D(x)$ *unterhalb-stetig*, wenn $D(\overline{M}) \subseteqq \overline{D(M)}$ für jedes $M \subseteqq R$ gilt, so haben wir den Satz:

Jede unterhalb-stetige D-Abbildung ist regulär, und die zur regulären D-Abbildung $D(x)$ gehörige D-Abbildung $\overline{H}(x)$ ist gesättigt und abgeschlossen.

In der Tat, aus der Unterhalb-Stetigkeit von $D(x)$ folgt $D(\overline{H}(x)) \subseteqq \overline{D(H(x))} = \overline{H(x)} = \overline{H}(x)$, wegen (2) ist aber auch $\overline{H}(x) \subseteqq D(\overline{H}(x))$. Ist andererseits $\overline{H}(x)$ invariant in bezug auf $D(x)$, dann auch in bezug auf $H(x)$, und es gilt $H(\overline{H}(x)) = \overline{H}(x)$; hieraus folgt, wie leicht einzusehen, $\overline{H}(\overline{H}(x)) \subseteqq \overline{H(\overline{H}(x))} = \overline{H}(x)$. Es gilt aber auch $\overline{H}(x) \subseteqq \overline{H}(\overline{H}(x))$.

Man betrachte nun ein D-System $\{D_\varrho(x)\}$ in R, d. h. ein System von D-Abbildungen D_ϱ in R, wobei ρ die beliebige Indizesmenge P durchläuft. Die zu jedem $D_\varrho(x)$ gehörige Abbildung $H(x)$ werde mit $H_\varrho(x)$ bezeichnet. Der Durchschnitt

$$J(x) = \prod_{\rho \in \mathrm{P}} \overline{H}_\varrho(x) \tag{3}$$

ist abgeschlossen und enthält x; er werde die *von x ausgehende Emission des Systems* $\{D_\varrho(x)\}$ genannt. Es gilt der

Satz: *Sind alle $D_\varrho(x)$, $\rho \in \mathrm{P}$, des Systems $\{D_\varrho(x)\}$ regulär, so ist die zugehörige Emission $J(x)$ eine abgeschlossene und gesättigte D-Abbildung.*

Ist nämlich $D_\varrho(x)$ regulär, so ist $\overline{H}_\varrho(x)$ abgeschlossen und gesättigt, und der Satz folgt unmittelbar daraus, daß *der Durchschnitt $S(x) = \prod S_\varrho(x)$ eines Systems abgeschlossener, gesättigter D-Abbildungen $S_\varrho(x)$ wieder eine abgeschlossene, gesättigte D-Abbildung* darstellt. In der Tat: $S(x)$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen; ferner folgt aus $y \in S(x)$ der Reihe nach: $y \in S_\varrho(x)$ für jedes ρ, $S_\varrho(y) \subseteqq S_\varrho(x)$, $S(y) \subseteqq S_\varrho(x)$, $S(y) \subseteqq S(x)$.

Wir wollen diese Gedanken hier nicht weiter entwickeln, sondern uns an dieser Stelle damit begnügen zuzusehen, wie sie sich in der Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden lassen und auswirken.

2. Emissionen eines beliebigen Vektorfeldes. Im m-dimensionalen euklidischen Raum R_m der Punkte $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ betrachten wir ein Gebiet G, in welchem ein eindeutiges Vektorfeld $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$, $|\mathfrak{v}(\mathfrak{x})| = 1$, erklärt ist. Bei vorgegebenen $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\mathfrak{x}_0 \in G$, bezeichne $D(\mathfrak{x}_0) = D(\mathfrak{x}_0; \varepsilon, \delta)$ die Menge aller Punkte $\mathfrak{y}$ mit

$$\mathfrak{y} \in G, \; |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0| \leqq \varepsilon, \quad (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0) \geqq |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0| \cos\delta,$$ [4]

also den Durchschnitt von G mit der Vollkugel vom Radius ε um $\mathfrak{x}_0$ und mit dem massiven Halbdrehkegel mit der Spitze $\mathfrak{x}_0$, der durch $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0)$ bestimmten Halbachse und dem Öffnungswinkel 2δ. $D(\mathfrak{x})$ ist eine D-Abbildung in G. Zur Bildung eines D-Systems nehmen wir zwei absteigende Nullfolgen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \underset{\rightarrow}{>} 0, \quad \delta_1 > \delta_2 > \ldots \underset{\rightarrow}{>} 0,$$

und setzen $D(\mathfrak{x}_0; \varepsilon_n, \delta_n) = D_n(\mathfrak{x}_0)$, $n = 1, 2, \ldots$.[5] Die zu $\{D_n(\mathfrak{x})\}$ gehörige Emission bezeichnen wir wieder mit $J(\mathfrak{x})$; wir nennen sie auch die *zum gegebenen Vektorfeld* $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ *gehörige Emission.* Man überlegt sich leicht, daß die zu $D(\mathfrak{x})$ gehörige Abbildung $\overline{H}(\mathfrak{x})$ nichts anderes darstellt als die in der Einleitung genannte Menge $V(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$.

3. Stetige Vektorfelder. Zu den Voraussetzungen über $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ in 2. nehmen wir jetzt noch hinzu, daß $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ stetig sein soll in G. Für $J(\mathfrak{x})$ gelten dann wichtige Aussagen:

A_1. $J(\mathfrak{x})$ *ist gesättigt.*

---

[4] Wir deuten $\mathfrak{x}$ zugleich als Ortsvektor, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt $\mathfrak{x}$ hinführt. Mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezeichnen wir das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

[5] Wegen der Monotonieeigenschaften von $D(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$ in bezug auf ε und δ hätte man als D-System ebensogut das System aller $D(\mathfrak{x}; \varepsilon, \delta)$ nehmen können.

Denn alle $D_n(\mathfrak{x})$ sind stetig, insbesondere also unterhalb-stetig, und daher regulär; A_1 folgt nun aus dem Satz in 1.

Ferner haben wir, wenn wir unter einer von $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden *Integralkurve* C des Feldes $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ eine stetig differenzierbare Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}_0$, verstehen, deren Tangentenvektor $\frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt}$ in jedem Punkt $\mathfrak{x}(t)$ zu $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}(t))$ parallel und gleichgerichtet ist, den Satz

A_2. *Jede von $\mathfrak{x}_0$ ausgehende Integralkurve C ist in $J(\mathfrak{x}_0)$ enthalten.* In der Tat ist $\mathfrak{y} \in C$, so wird durch $D_n(\mathfrak{y})$ eine ganz rechtsseitige Umgebung von $\mathfrak{y}$ auf C überdeckt. Da $\overline{H}_n(\mathfrak{x}_0)$ und C abgeschlossen sind, so gibt es auf C einen „letzten" Punkt $\mathfrak{x}(t')$, welcher samt seinen Vorgängern $\mathfrak{x}(t)$, $0 \leq t < t'$, noch zu $\overline{H}_n(\mathfrak{x}_0)$ gehört. Wäre $t' < 1$, so würde für alle zu t' hinreichend benachbarten $t > t'$ gelten: $\mathfrak{x}(t) \in D_n(\mathfrak{x}(t')) \subseteq \overline{H}_n(\mathfrak{x}_0)$, im Widerspruch damit, daß $\mathfrak{x}(t')$ der „letzte" Punkt ist. C ist also ganz in $\overline{H}_n(\mathfrak{x}_0)$ enthalten, $n = 1, 2, \ldots$, also auch in $J(\mathfrak{x}_0)$.

Unter geeigneter Gebietseinschränkung gilt auch eine Umkehrung von A_2, nämlich

A_3. *Gibt es einen festen Vektor $\mathfrak{a}$ und ein festes $\eta > 0$, so daß $\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) > \eta$ für alle $\mathfrak{x} \in G$, dann ist $J(\mathfrak{x}_0)$ identisch mit der Vereinigungsmenge $E(\mathfrak{x}_0)$ aller von $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden Integralkurven.*

Es ist klar, daß sich wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ die in A_3 genannte Bedingung dadurch erzwingen läßt, daß man die Betrachtungen auf ein genügend kleines Teilgebiet des ursprünglichen Definitionsbereiches von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ beschränkt. Zum Beweis von A_3 zeigen wir, daß durch jeden Punkt $\mathfrak{y} \in J(\mathfrak{x}_0)$ eine von $\mathfrak{x}_0$ ausgehende Integralkurve C hindurchgeht. Wir bestimmen zu diesem Zweck einen, nach Definition von $J(\mathfrak{x}_0)$ vorhandenen, zu $H_n(\mathfrak{x}_0)$ gehörigen Punkt $\mathfrak{y}_n$ mit $|\mathfrak{y}_n - \mathfrak{y}| < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Zu $\mathfrak{y}_n$ gibt es ein k_n, so daß $\mathfrak{y}_n \in D_n^{k_n}(\mathfrak{x}_0)$, also eine Folge von Punkten $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_{n,0}, \mathfrak{x}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{x}_{n,k_n} = \mathfrak{y}_n$ mit $\mathfrak{x}_{n,k} \in D_n(\mathfrak{x}_{n,k-1})$, $k = 1, \ldots, k_n$. Der Streckenzug $S_n = (\mathfrak{x}_{n,0})(\mathfrak{x}_{n,1}) \ldots (\mathfrak{x}_{n,k_n})$ ist ganz in $H_n(\mathfrak{x}_0)$ enthalten, projiziert sich für alle hinreichend großen n auf eine zu $\mathfrak{a}$ parallele Achse umkehrbar eindeutig und weist gegen $\mathfrak{a}$ gleichmäßig (von

n unabhängig) beschränkte Steigungen und damit auch gleichmäßig beschränkte Bogenlänge auf. Aus der Folge der S_n kann man eine Teilfolge $\{S_{n'}\}$ ausgreifen, welche gegen eine stetige Kurve K konvergiert. Offenbar enthält K die Punkte $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}$. K ist ferner eine Integralkurve. Denn für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in K$ schließt in einer hinreichend kleinen Umgebung U und für alle hinreichend großen n' jede Sehne von $S_{n'}$, soweit ihre Endpunkte in U liegen,[6] mit $\mathfrak{v}(\mathfrak{z})$ einen beliebig kleinen Winkel ein. Diese Eigenschaft überträgt sich beim Grenzübergang $S_{n'} \to K$ auf K selbst, was zeigt, daß K in jedem Punkt $\mathfrak{z}$ eine zu $\mathfrak{v}(\mathfrak{z})$ parallele Tangente im scharfen Sinne[7] besitzt.

4. Vektorfelder mit einer Lipschitzbedingung. Das Vektorfeld $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ genügt in G einer Lipschitz- (kürzer L-) Bedingung, wenn es eine positive Konstante L gibt, so daß

$$|\mathfrak{v}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{v}(\mathfrak{x}'')| \leqq L\,|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''|$$

für alle $\mathfrak{x}' \in G$, $\mathfrak{x}'' \in G$. Die Bedeutung dieser Bedingung zeigt der Satz: *Ist $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ ein einer L-Bedingung genügendes Vektorfeld im Gebiet G und ist $|\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0)| < 1$ für alle $\mathfrak{x} \in G$,[8] so ist $J(\mathfrak{x}_0)$ eine Kurve, und jede von $\mathfrak{x}_0$ ausgehende Integralkurve des Feldes $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ ist Teilbogen von $J(\mathfrak{x}_0)$.*

Beweis: 1. Wir legen das Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_m)$ so, daß $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0)$ die Richtung der positiven x_1-Achse angibt und $\mathfrak{x}_0$ der Ursprung ist, und zeigen, daß $J(\mathfrak{x}_0)$ mit jeder Ebene $x_1 = q > 0$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat, indem wir nachweisen, daß der Durchmesser $d(q)$ des Durchschnittes von $J(\mathfrak{x}_0)$ mit der Ebene $x_1 = q$ Null ist.

Es bezeichne $H_n(\mathfrak{x}'; r)$ den Durchschnitt von $H_n(\mathfrak{x}')$ mit der Kugel $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'| \leqq r$, ferner $K(\mathfrak{x}'; r, \alpha)$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ den Durch-

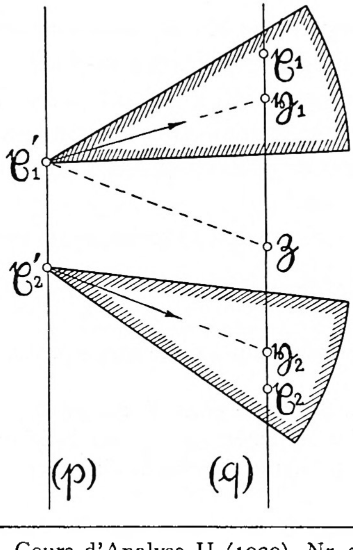
[6] Es handelt sich also nicht nur um die Strecken von S_n, die nur spezielle Sehnen von $S_{n'}$ sind.

[7] Unter der scharfen Tangente einer Kurve im Kurvenpunkte $\mathfrak{z}$ versteht man die Grenzlage der Sekanten $(\mathfrak{p})\,(\mathfrak{q})$ bei beliebiger Annäherung der Kurvenpunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ an $\mathfrak{z}$, soferne eine solche Grenzlage überhaupt vorhanden ist.

[8] Wegen dieser Bedingung vergleiche man die Bemerkung zu der ähnlichen Bedingung in A_3.

schnitt des Kegels $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\,\mathfrak{v}(\mathfrak{x}') \geqq |\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'| \cos\alpha$ mit derselben Kugel. Wir setzen im folgenden α als so klein voraus, daß die Projektion jeder Mantelstrecke von $K(\mathfrak{x}'; r, \alpha)$ auf die x_1-Achse mindestens $\frac{r}{3}$ beträgt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ kann man zu vorgegebenem α ein $N(\alpha)$ und ein $r(\alpha) > 0$ finden, so daß $H_n\big(\mathfrak{x}'; r(\alpha)\big) \subseteqq K\big(\mathfrak{x}'; r(\alpha), \alpha\big)$ für alle $\mathfrak{x} \in G$ und alle $n > N(\alpha)$. Ferner gibt es eine von α abhängige mit α gegen Null gehende Konstante A derart, daß der Durchschnitt von $K(\mathfrak{x}'; r, \alpha)$ mit der Ebene $x_1 = q$ einen Durchmesser $\leqq A\,|q-x_1'|$ besitzt (x_1' die x_1-Koordinate von $\mathfrak{x}'$). Den Durchmesser des Durchschnittes von $\overline{H}_n(\mathfrak{x}_0)$ (oder, was in unserem Falle das gleiche ist, von $H_n(\mathfrak{x}_0)$) mit der Ebene $x_1 = q$ bezeichnen wir mit $d_n(q)$; die $d_n(q)$ streben nicht-steigend nach $d(q)$.

2. Nun verfahren wir nach bekannter Weise:[9] Bei festem α wird $n > N(\alpha)$ gewählt. Sind dann $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ zwei beliebige Punkte von $H_n(\mathfrak{x}_0)$ in der Ebene $x_1 = q > 0$, so gibt es in der Ebene $x_1 = p$, $0 \leqq p < q$, zwei Punkte $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2'$, so daß $\mathfrak{x}_i \in H_n(\mathfrak{x}_i')$, $i = 1, 2$. Ist $s = q - p < \frac{r(\alpha)}{3}$, so gilt $\mathfrak{x}_i \in K\big(\mathfrak{x}_i'; r(\alpha), \alpha\big)$. Nun ist (Figur 1)



[9] Vgl. É. Goursat, Cours d'Analyse II (1929), Nr. 391.

$$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{y}_2) + (\mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_1') + (\mathfrak{z} - \mathfrak{y}_1) + (\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1), \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{y}_i$ den Durchstoßpunkt der Achse von $K\left(\mathfrak{x}_i';\ r(\alpha), \alpha\right)$, $i = 1, 2$, $\mathfrak{z}$ den Durchstoßpunkt der zur Achse von $K\left(\mathfrak{x}_2';\ r(\alpha), \alpha\right)$ parallelen Geraden durch $\mathfrak{x}_1'$ mit der Ebene $x_1 = q$ bezeichnen. Es ist $|\mathfrak{x}_i - \mathfrak{y}_i| \leqq As$, $i = 1, 2$, und wegen der beschränkten Winkel von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ gegen $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0)$ gibt es eine Konstante M, so daß

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}_1| \leqq Ms\, |\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_2') - \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_1')|,$$

also auf Grund der L-Bedingung

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}_1| \leqq MLs\, |\mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_1'|.$$

Wir erhalten somit aus (4)

$$d_n(p + s) \leqq As + d_n(p) + MLs\, d_n(p) + As,$$

oder

$$d_n(p + s) + \frac{2A}{ML} \leqq \left(d_n(p) + \frac{2A}{ML}\right)(1 + MLs)$$

$$\leqq \left(d_n(p) + \frac{2A}{ML}\right) e^{MLs}.$$

Setzen wir nun $s = \frac{q}{\nu}$, ν positiv ganz und hinreichend groß (so daß $3s < r(\alpha)$), so liefert vollständige Induktion

$$d_n(q) + \frac{2A}{ML} \leqq \left(d_n(0) + \frac{2A}{ML}\right) e^{MLq},$$

oder $d_n(q) \leqq \frac{2A}{ML}(e^{MLq} - 1)$, also auch $d(q) \leqq \frac{2A}{ML}(e^{MLq} - 1)$, woraus mit $\alpha \to 0$ ($A \to 0$) die Behauptung $d(q) = 0$ hervorgeht.

3. Daß jede Integralkurve, die von $\mathfrak{x}_0$ ausgeht, ein Teilbogen von $J(\mathfrak{x}_0)$ ist, folgt jetzt aus **3**.