Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über ein elektronentheoretisches Modell des Supraleiters.

Von H. Welker.

Vorgelegt von Herrn A. Sommerfeld in der Sitzung vom 11. Juni 1938.

Einleitung.

Ein wesentlicher Fortschritt in dem theoretischen Verständnis des supraleitenden Zustandes konnte erst erzielt werden, als Meißner im Jahre 1933 feststellte, daß im Supraleiter grundsätzlich die magnetische Induktion verschwindet. Auf Grund dieses sogenannten Meißner-Ochsenfeld-Effekts formulierten F. und H. London 1935 eine phänomenologische Theorie, welche die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Supraleiters in befriedigender Weise wiedergibt.

Physikalisch besagt diese Theorie, daß das Magnetfeld durch makroskopische „Schirmströme" vom Innern des Supraleiters ferngehalten wird. Für diese soll an Stelle des Ohmschen Gesetzes gelten:

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{\Lambda c}\mathfrak{A}, \quad \Lambda = \frac{m_0}{e^2 n}$$

($\mathfrak{A}$ Vektorpotential, m_0 Elektronenmasse, c Lichtgeschwindigkeit, e Elementarladung, n Anzahl der Elektronen je cm^3). In Verbindung mit den Maxwellschen Gleichungen folgert man hieraus leicht das praktische Verschwinden des Magnetfeldes im Abstand $c\sqrt{\Lambda} = 10^{-5}$ bis 10^{-6} cm von der Oberfläche und das Fließen von Dauerströmen.[1] Somit verbleibt als wichtigste Aufgabe, die Londonschen Gleichungen durch die Elektronentheorie der Metalle zu begründen. Zu dem Zwecke haben wir hier versucht, ein Modell des Supraleiters zu entwerfen, welches gut in den Rahmen der herkömmlichen Metalltheorie paßt und außerdem gestattet, die Aufhebung des supraleitenden Zustandes unter dem Einfluß von Temperatur bzw. Magnetfeld zu diskutieren.[2]

[1] F. und H. London, Physica **2**, 341.

[2] Auch J. C. Slater, Phys. Rev. **51**, 195 und **52**, 214, hat versucht ein solches Modell zu konstruieren.

§ 1. Diamagnetismus freier Elektronen im normalen Leiter.

Um neue Gesichtspunkte zu gewinnen, müssen wir uns über das Versagen der bisherigen Metalltheorie in bezug auf Supraleitfähigkeit Klarheit verschaffen. Dabei genügt es, wenn wir uns auf den Standpunkt der „freien Elektronen“ stellen.[1] Der Diamagnetismus eines unendlich ausgedehnten freien Elektronengases wurde erstmals von Landau behandelt. Wir geben die Rechnung hier wieder für ein in einen endlichen Kasten eingesperrtes Elektronengas im Hinblick auf die für die Supraleitfähigkeit wichtigen Oberflächeneffekte. Aus mathematischen Gründen wählen wir einen Zylinder vom Radius a und beliebiger Höhe b im longitudinalen Magnetfeld $H_z = H$.

Bei Einführung von Zylinderkoordinaten $r\varphi z$ können wir das Magnetfeld H_z darstellen durch

$$H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{A}_\varphi), \tag{1}$$

wobei für die Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A}_\varphi = \frac{Hr}{2},\ \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_z = 0. \tag{1a}$$

Die zu lösende Schrödingergleichung lautet dann:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{\hbar e H}{2 i m_0 c}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(E - \frac{e^2 H^2}{8 m_0 c^2} r^2\right)\right\}\psi = 0 \tag{2}$$

mit der Randbedingung, daß ψ auf der Oberfläche des Zylinders verschwindet. Da in unserem Fall, im Gegensatz zur Landauschen Rechnung, $r \leq a$, können wir bei hinreichend kleinem H das in H quadratische Glied $\frac{e^2 H^2 r^2}{8 m_0 c^2}$ gegen E vernachlässigen. Das bedeutet anschaulich, daß der Radius der Elektronenbahnen im Magnetfeld größer sei als der Zylinderradius a, d. h.

---

[1] Den Einfluß des periodischen Gitterpotentials können wir ja durch Einführung einer scheinbaren Masse m_0^* statt der Elektronenmasse m_0 berücksichtigen. Vgl. H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle Kap. I § 3.

$$\frac{c}{eH}\sqrt{2\,m_0\,E} \gg a. \tag{3}$$

Diese Bedingung ist für $a \approx 1$ cm, $H \approx 1$ Gauß und einer Energie der Elektronen von der Größenordnung der Grenzenergie hinreichend erfüllt.[1]

Separation in Zylinderkoordinaten

$$\psi = R\,(r)\,e^{i m \varphi} \sin\,(k_z\,z) \tag{4}$$

(m ganzzahlige magnetische Quantenzahl, $k_z = \frac{\pi \varkappa}{b}$, $\varkappa$ positive ganze Quantenzahl) führt auf die Differentialgleichung für R:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2\,m_0}\left(\frac{d^2}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d\,r} - \frac{m^2}{r^2} - k_z^2\right) - \frac{\hbar\,e\,H}{2\,m_0\,c}\,m + E\right\} R = 0. \tag{5}$$

Hier haben wir das in H quadratische Glied bereits weggelassen. Machen wir in (5) die Substitution

$$\bar{\rho} = k\,r \tag{6}$$

mit

$$k^2 = \frac{2\,m_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar^2\,k_z^2}{2\,m_0} - \frac{e\,\hbar\,m\,H}{2\,m_0\,c}\right), \tag{6a}$$

so sehen wir, daß $R\,(r)$ eine Besselsche Funktion ist, die wir uns für unser Gebiet $r \leq a$ auf 1 normiert denken:

$$R\,(r) = J_m\,(\bar{\rho}). \tag{7}$$

Das diskrete Spektrum der k ergibt sich aus der Randbedingung:

$$J_m\,(k\,a) = 0. \tag{7a}$$

$k\,a = \rho$ ist eine richtige allerdings nicht-ganze Quantenzahl.

Diese Ergebnisse lassen sich auch im Sinne der Störungsrechnung interpretieren:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2\,m_0}\,(k^2 + k_z^2) \tag{8}$$

[1] A. Papapetrou, Z. f. Phys. **106**, 9.

ist nach (6a) der Energiewert des Elektrons ohne Magnetfeld. Die Störungsenergie ergibt sich also nach (6a) und (8) zu

$$\varepsilon = E - E_0 = \mu_B\, m\, H. \tag{8a}$$

Dabei ist $\mu_B = \frac{e\hbar}{2 m_0 c}$ das Bohrsche Magneton, $\mu_B m$ das zu unserer Eigenfunktion gehörige magnetische Moment. Die Eigenfunktion selbst erleidet keine Störung; vgl. (7) und (7a).

In unserem Fall ist es für die Berechnung der Suszeptibilität bequem, nicht mit der Energie, sondern mit dem magnetischen Moment zu arbeiten. Wir schreiben daher die elektrische Stromdichte an:

$$\mathfrak{j} = \frac{i\hbar e}{2 m_0}(\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*) - \frac{e^2}{m_0 c}\mathfrak{A}\,\psi\,\psi^*. \tag{9}$$

Mit den Ansätzen (4) und (1a) führt das auf:

$$\mathfrak{j}_\varphi = -\frac{e}{m_0}\left(\frac{\hbar m}{r} + \frac{e}{c}\frac{Hr}{2}\right) R^2 \sin^2 k_z z, \quad \mathfrak{j}_r = \mathfrak{j}_z = 0. \tag{9a}$$

Das zu diesem Strom gehörige magnetische Moment lautet, wenn wir uns die von φ und z abhängigen Faktoren der Eigenfunktion auf 1 normiert denken:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2c}\int r\, \mathfrak{j}_\varphi\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\ &= -\frac{e}{2 m_0 c}\int_0^a \left(\frac{\hbar m}{r} + \frac{eH}{2c} r\right) J_m^2(kr)\, r^2\, dr \\ &= M_0 + M_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Hier stellt M_0 das vom Magnetfeld unabhängige, spontane magnetische Moment dar. M_1 ist das beim Einschalten des Magnetfeldes induzierte Moment und kann treffend als Larmormoment bezeichnet werden.

Das erste Integral liefert mit Rücksicht auf die Normierung der Besselfunktion:

$$M_0 = -\mu_B\, m. \tag{11}$$

Dieses Moment führt zur Störungsenergie (8a), nach der bekannten Formel:

Energie = — Moment · Feldstärke.

Das zweite Integral läßt sich nach Watson[1] auswerten:

$$M_1 = -\frac{e^2 H a^2}{6 m_0 c^2}\left(\frac{m^2 - 1}{\rho^2} + \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Um das gesamte magnetische Moment aller Elektronen zu erhalten, haben wir M_0 und M_1 über alle Zustände zu summieren, deren Energie kleiner ist als die sogenannte Grenzenergie ζ, nach (6 a) also über alle Quantenzustände, für welche:

$$\frac{\hbar^2}{2 m_0}(k^2 + k_z^2) + \mu_B m H \leqq \zeta. \tag{13}$$

Aus dieser Ungleichung sehen wir, daß ohne Magnetfeld der Wert $+m$ genau so wahrscheinlich ist wie der Wert $-m$; die magnetische Quantenzahl geht in die Energiebilanz gar nicht ein. Bei der Summation heben sich daher die Momente M_0 gegenseitig auf. Anders, wenn $H \neq 0$. Dann ist es für Elektronen, deren Energie [vgl. (8)] ungefähr gleich ζ ist, möglich, daß der Wert $+|m|$ nicht mehr dem Gebiet (13) angehört, während $-|m|$ noch darinnen liegt. (13) drückt also eine gewisse Bevorzugung negativer magnetischer Quantenzahlen aus, anschaulich gesprochen die Bevorzugung der parallelen Einstellung der magnetischen Bahnmomente gegenüber der antiparallelen Einstellung.

Wir beginnen mit der Summation von M_1 über das Gebiet (13). Dabei haben wir das Glied $\mu_B\, m\, H$ in (13) wegzulassen; seine Berücksichtigung würde ja auf Glieder proportional H^2 führen. Ersetzen wir die Summation näherungsweise durch eine Integration, so können wir für den Beitrag von M_1 zum Gesamtmoment schreiben, vgl. Note 1 des Anhanges:

$$\bar{M}_1 = \int M_1\, d\Phi. \tag{14}$$

mit

$$d\Phi = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \frac{m^2}{\rho^2}}\, d\rho\, dm\, d\varkappa. \tag{14a}$$

---

[1] Theory of Bessel Funktions, S. 138, Gl. 5. 1.

Damit berechnet sich der vom Larmorglied herrührende Beitrag zur magnetischen Suszeptibilität je Volumeneinheit, vgl. Note 3 zu:

$$\chi_1 = -\frac{\pi}{3}\frac{e^2 a^2}{m_0 c^2}\frac{(2 m_0 \zeta)^{3/2}}{h^3}. \tag{15}$$

Verwenden wir die aus der Metalltheorie wohlbekannte Formel[1]

$$n = \frac{8\pi}{3}\frac{(2 m_0 \zeta)^{3/2}}{h^3}, \tag{16}$$

so folgt:

$$\chi_1 = -\frac{1}{8}\frac{e^2 a^2}{m_0 c^2} n. \tag{17}$$

Dasselbe würden wir erhalten, wenn wir unseren Zylinder als großes Atom auffassen und darauf die Langevinsche Formel anwenden. (15) stellt für $a \approx 1$ cm und $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ die riesige diamagnetische Suszeptibilität $\chi_1 \approx -2 \cdot 10^8$ *cgs* dar.

Andererseits ist der von M_0 herrührende Beitrag zum magnetischen Moment gegeben durch

$$\bar{M}_0 = \int M_0 \, d\Phi, \tag{18}$$

wobei jetzt über das Gebiet (13) ohne Vernachlässigung des H-Gliedes zu integrieren ist. Wegen der Bevorzugung negativer m ergibt sich eine Suszeptibilität vom gleichen Betrag wie (15), aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, vgl. Note 4. Die Gesamtsuszeptibilität verschwindet also. Damit rechtfertigt sich nachträglich unsere Annahme eines homogenen Magnetfeldes auch im Innern des Metalls.

Eine genaue Ausführung der Summation an Stelle der Integration hätte ergeben, daß ein kleiner vom Volumen unabhängiger Diamagnetismus übrigbleibt: der Landausche Diamagnetismus — Größenordnung 10^{-6} *cgs*.[2]

---

[1] Die Grenzenergie ζ hängt in unserer Näherung nicht vom Magnetfeld ab. Vgl. Anhang, Note 2 Gl. (54).

[2] In kartesischen Koordinaten wurden die Rechnungen von A. Papapetrou durchgeführt, Z. Phys. **107**, 387.

Die bisherigen Ergebnisse können wir uns physikalisch folgendermaßen näher bringen: Beim Einschalten eines Magnetfeldes werden im Innern des Metalls Ströme induziert, die das Eindringen des Magnetfeldes in das Metall zu verhindern suchen. Da aber die Paralleleinstellung der ursprünglichen Bahnmomente M_0 energetisch günstiger ist als die Antiparalleleinstellung, kehrt eine zu H proportionale Anzahl von Elektronen ihr Bahnmoment um und geht dafür wegen des Pauliverbots in die ohne Magnetfeld höheren benachbarten Zustände über. Die M_0 erzeugenden Ströme heben sich jetzt nicht mehr weg. Sie verursachen einen Strom, der den induzierten Strom gerade aufhebt, so daß das resultierende Moment praktisch verschwindet.

§ 2. Bedingungen für das Zustandekommen eines vollständigen Diamagnetismus.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen geben uns zugleich einen Hinweis, unter welchen Bedingungen ein starker Diamagnetismus zu erwarten ist. Ist ein Mechanismus vorhanden, der dafür sorgt, daß die Gleichberechtigung der Parallel- und der Antiparalleleinstellung der Bahnmomente ohne Feld auch bei Anwesenheit eines Magnetfeldes erhalten bleibt, so wird die einen extrem starken Diamagnetismus darstellende Suszeptibilität χ_1 [Gl. (15)] ihre Wirksamkeit entfalten. Natürlich dürfen wir jetzt nicht mehr mit einem konstanten Magnetfeld im Innern des Metalls rechnen, sondern wir müssen das „self-consistent magnetic field" der Elektronen zu dem äußeren Feld (1a) addieren und mit diesem veränderlichen Magnetfeld Gl. (2) lösen. Dieses bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{B}$ (= rot $\mathfrak{A}$), da es die gemittelte Feldstärke oder, wie man gewöhnlich sagt, die magnetische Induktion darstellt. Nehmen wir nun im Anschluß an § 1 an, daß für ein veränderliches Magnetfeld die Störung der Eigenfunktion in 1. Ordnung zu vernachlässigen ist (bei konstantem Magnetfeld war sie ja exakt gleich Null), so erhalten wir wegen des eben genannten Mechanismus aus (9), vgl. auch (9a), durch Summation über alle Zustände eine Gesamtstromdichte:

$$\mathfrak{J} = \sum \mathfrak{i} = -\sum \frac{e^2}{m_0 c} \mathfrak{A} |\psi|^2$$

oder, wenn wir $\Sigma \mid \psi \mid^2 = n$ (Elektronendichte) setzen:

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{\Lambda c}\,\mathfrak{A} \tag{19}$$

mit

$$\Lambda = \frac{m_0}{n e^2}.$$

Dies ist die Londonsche Verknüpfung zwischen Strom und Magnetfeld für einfach zusammenhängende Körper. Aus ihr kann man unter Hinzunahme der Maxwellschen Gleichungen die folgenden Differentialgleichungen für das Abklingen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ längs der Strecke $c\sqrt{\Lambda}$ im Supraleiter ableiten:[1]

$$\mathfrak{B} = \Lambda c^2 \Delta \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{J} = \Lambda c^2 \Delta \mathfrak{J}. \tag{20}$$

Wir bemerken hier ausdrücklich, daß der vollständige Diamagnetismus auch dann vorhanden ist, wenn die Eigenfunktion eine Störung erfährt. Seine Existenz ist durch die praktisch unendlich große Susceptibilität (vgl. (17)) gesichert, die man mit der Annahme eines homogenen Magnetfeldes erhält.

Wenn wir uns die Frage stellen, wie wir den oben geforderten Mechanismus verwirklichen können, so drängt sich die schon oft diskutierte Analogie zwischen Ferromagnetismus und Supraleitung auf.[2] Bisher leitete man diese Analogie aus dem ähnlichen Verhalten z. B. der spezifischen Wärmen am Curiepunkt mit dem am Sprungpunkt her, ohne daß man angeben konnte, welche atomaren Eigenschaften einander entsprechen sollten. Nach unseren Vorstellungen vom Zustandekommen des vollständigen Diamagnetismus entsprechen den Spins der Elektronen beim Ferromagnetismus die Bahnmomente der Elektronen bei der Supraleitung; der Bevorzugung der Parallelstellung der Spins durch die Forderung einer positiven Austauschkraft entspricht bei uns die Forderung der Gleichberechtigung von Parallel- und Antiparallelenstellung trotz des Magnetfelds infolge einer uns noch unbekannten Kraft.

---

[1] F. u. H. London l. c. Gl. (5a) und (6). Vgl. auch F. London, Nature **140**, 793, Gl. (8). Die hier gegebene Begründung der Gleichung $\mathfrak{J} = -\frac{1}{\Lambda c}\mathfrak{A}$ durch die Annahme reeller Eigenfunktionen [Gl. (1) bis (5)] ist wesentlich von der unseren verschieden.

[2] W. Gerlach, Metallwirtschaft **10** (1930) 1006.

Wir konkretisieren diese Analogie durch den Vorschlag eines speziellen Modells. Dazu sind einige Vorbemerkungen über das Spektrum der Leitungselektronen nach der üblichen Metalltheorie notwendig. Bekanntlich werden die diskreten Niveaus des Atoms im Metall zu Bändern verbreitet. Jedes Band stellt ein Kontinuum von Zuständen dar; jeder Zustand kann von 2 Elektronen antiparallelen Spins besetzt werden. Die unteren Bänder sind immer ganz besetzt; nur das oberste Band, das Band der Leitungselektronen, ist partiell aufgefüllt (beim Na genau bis zur Hälfte), nämlich bis zur Grenzenergie ζ. Oberhalb ζ befindet sich ein unbesetztes Kontinuum von möglichen Energieniveaus. Das wäre der Grundzustand des gewöhnlichen Leiters. Um ein Elektron aus seinem im Grundzustande innegehabten Energieniveau herauszuheben, braucht man ihm nur das Plus an kinetischer Energie erteilen, das dem gehobenen Niveau entspricht. Im Gegensatz dazu soll der Grundzustand des Supraleiters etwa durch irgendeine Wechselwirkung der Elektronen untereinander besonders verfestigt sein; um ein Elektron aus demselben herauszulösen, soll, außer der eben genannten Zufuhr von kinetischer Energie, eine besondere Ablösungsarbeit A notwendig sein.

Wir können demnach die möglichen Energieniveaus des Supraleiters folgendermaßen schematisch darstellen:

$$(21)\qquad E = \begin{cases} \dfrac{p^2}{2\, m_0} & \text{für } E \leq \zeta \\[2ex] \dfrac{p^2}{2\, m_0} + A & \text{für } E > \zeta \end{cases} \qquad p \ldots \text{Impuls}$$

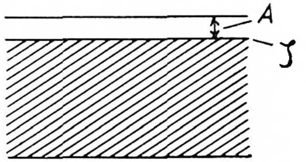


Fig. 1

Übertragen auf das Energiespektrum heißt das (Fig. 1): Oberhalb der Grenzenergie existiert eine Lücke im Energiespektrum von der Breite Δ. Natürlich kann der durch (21) dargestellte unstetige Verlauf des Energiespektrums auch etwas abgeschwächt sein.

§ 3. Ableitung einfacher Eigenschaften aus der Forderung einer Lücke im Energiespektrum.

Wir definieren eine Temperatur T_c durch $k\,T_c = \Delta$, k Boltzmannkonstante. Für $T < T_c$ sind die Zustände oberhalb der Lücke nicht angeregt. Beim Anlegen eines hinreichend schwachen Magnetfeldes (so schwach, daß die magnetische Störungsenergie keine Rolle spielt) gelten die Beziehungen (19) und (20); man hat eine vollständige Abschirmung des Feldes nach dem Innern des Leiters und daher in einem gewissen Abstand von der Oberfläche die Permeabilität $\mu = 0$.[1] Für $T > T_c$ sind die Zustände jenseits der Lücke dagegen merklich angeregt. Da jetzt der Paulische Zwang durch die Temperatur gemildert ist, ist Paralleleinstellung der vorher antiparallelen Momente möglich; es wird $\mu \approx 1$. T_c ist also größenordnungsmäßig die Sprungtemperatur.

Da unser unterhalb der Grenzenergie besetztes Energiespektrum (Fig. 1) große Ähnlichkeit hat mit einem vollbesetzten Band der gewöhnlichen Metalltheorie, könnte man fragen, warum letzteres im allgemeinen keinen vollständigen Diamagnetismus aufweist. Die Antwort gibt die Theorie der Elektronenbewegung im periodischen Potentialfeld. Nach dieser erhält man die Beschleunigung $\dot{v}$ eines durch einen bestimmten Wert der Wellenzahl k charakterisierten Elektrons im Gitter beim Anlegen eines elektrischen Feldes aus der Beschleunigung $\dot{v}_F$ des entsprechenden freien Elektrons mit Hilfe einer Freiheitszahl f_k:[2]

$$\dot{v} = f_k\,\dot{v}_F. \tag{22}$$

Die f_k sind im unteren Teil eines Bandes positiv, im oberen Teil negativ und zwar so, daß $\Sigma f_k = 0$ für ein voll besetztes Band. Daher kann in einem solchen die Gesamtheit der Elek-

---

[1] Für einfach zusammenhängende Körper ist die Beschreibung durch $\mu = 0$ zulässig.

[2] Von hier aus gelangt man auch zur Definition der scheinbaren Masse, vgl. S. 116 Anm. 1, vermöge $m^* = m/f_k$.

tronen überhaupt nicht beschleunigt werden. Wenn wir uns nun daran erinnern, daß der Larmorstrom durch ein elektrisches Feld erzeugt wird, das während des Einschaltens des Magnetfeldes im Stromkreis induziert wird, so sehen wir, daß er für ein vollbesetztes Band verschwindet. Im Fall des Supraleiters trifft das nicht zu, da hier wie bei einem normalen Leiter die Freiheitszahlen f_k der besetzten Zustände überwiegend positiv sind. Aus denselben Gründen verschwindet auch die Leitfähigkeit bei unserem Modell nicht, im Gegensatz zu den vollbesetzten Bändern der normalen Leiter und der sog. Halbleiter.

Um die Leitfähigkeit zu diskutieren, brauchen wir nicht den nicht-stationären Beschleunigungsvorgang zu untersuchen, sondern müssen uns nur davon überzeugen, daß ein stationärer Dauerstrom ohne elektrisches Feld und ohne äußeres Magnetfeld fließen kann. Durch London haben wir gelernt, daß für das Fließen eines solchen das von ihm selbst erzeugte Magnetfeld wesentlich ist. An Hand unseres Modells müßten wir darüber hinaus lediglich zeigen, daß ein Dauerstrom thermodynamisch stabil oder wenigstens quasistabil ist.

Ferner folgt aus unserem Modell das Verschwinden der linearen Elektronenwärme in Übereinstimmung mit Experimenten von Kock[1] und Keesom und van Laer[2]. Wir sehen dies am einfachsten ein, wenn wir beachten, daß für $T < T_c$ die Elektronen nicht merklich angeregt werden können, also auch keine Wärme bei Temperaturerhöhung verbrauchen. Für $T \approx T_c$ kann wegen des Auftretens von Phasenumwandlungen nur die thermodynamische Behandlung unseres Modells genauere Aussagen liefern.

§ 4. Die Aufhebung der Supraleitfähigkeit unter dem Einfluß eines Magnetfeldes.

In den Betrachtungen des § 3 hatten wir angenommen, daß die magnetische Störungsenergie ε [Gl. (8a)] vernachlässigt werden könne. Für die Berechnung der Schwellwertkurve ist sie aber ausschlaggebend.

---

[1] Physica I, 1003.
[2] Physica V, 193.

ε hängt wie M_0 vom Vorzeichen der magnetischen Quantenzahl ab, ist also trotz der Lücke im Energiespektrum imstande, bei entsprechend starkem Magnetfeld zu einer Bevorzugung der Zustände mit $-|m|$ zu führen und damit die Supraleitfähigkeit aufzuheben. Somit bestimmt ε den Mechanismus der Einstellung der magnetischen Momente. Eine wesentliche Erschwerung gegenüber den gewöhnlichen Problemen mit kleinem Diamagnetismus besteht darin, daß ε bei irgendeiner Temperatur T und einem angelegten äußeren Feld H im „self-consistent magnetic field" zu berechnen ist.

Ferner hat die magnetische Induktion B im Supraleiter nicht überall denselben Wert Null, sondern sie verschwindet allmählich. Für thermodynamische Betrachtungen ist also der allgemeinere, für nicht-konstantes μ gültige Ausdruck für die magnetische Feldenergie maßgebend.

$$\frac{1}{4\pi}\int H\,dB\,d\tau.$$

Die Integration bezieht sich auf das vom Körper eingenommene Volumen. Da wir uns weiterhin auf den unendlich langen Zylinder und das achsenparallele, longitudinale Feld H beschränken, ist H im Innern des Zylinders homogen mit $H_z = H$ (Entmagnetisierungsfaktor gleich Null). Wir können genau so rechnen wie im Fall konstanter Permeabilität, wenn wir statt B den räumlichen Mittelwert $\bar{B}$ einführen.

Unser Ziel ist, H als Funktion von $\bar{B}$ für jede Temperatur wenigstens qualitativ anzugeben. Zu diesem Zweck untersuchen wir das Matrixelement der magnetischen Störungsenergie. Einfache Verhältnisse haben wir nur in den beiden Grenzfällen $\mu \approx 1$ und $\mu \approx 0$. Im ersten Fall gilt, Gl. (8a), der Index n an ε soll an Normalleiter erinnern:

$$\varepsilon_n = \mu_B\, m\, H. \tag{23}$$

Den maximal möglichen Wert für m erhalten wir für Elektronen der Grenzenergie ζ, wenn wir $k_z = 0$ und gemäß Gl. (14a) $\rho = k\,a = m$ setzen. Das liefert wegen (8)

$$\frac{\hbar^2}{2\,m_0}\,\frac{m^2}{a^2} = \zeta,$$

also

$$(24)\qquad m = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2 m_0 \zeta}.$$

Daraus erhalten wir unter Benutzung von (16)

$$(24\,\mathrm{a})\qquad m = a \sqrt[3]{3\pi^2 n}$$

und daher größenordnungsmäßig

$$(25)\qquad \varepsilon_n = \mu_B H a \sqrt[3]{3\pi^2 n}.$$

Dies stellt für $a = 1$ cm, $H = 1$ Gauß ($\mu_B = 0{,}9 \cdot 10^{-20}$, $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$) einen Energiebetrag von

$$(25\,\mathrm{a})\qquad \varepsilon_n = 8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{erg}$$

dar.

Anders im Falle $\mu \approx 0$ unter der Annahme einer vollständigen Abschirmung nach dem Innern des Zylinders; es ergibt sich

$$(26)\qquad \varepsilon_s = 2\, m\, \mu_B \int \mathfrak{A}_\varphi(r)\, R^2(r)\, dr.$$

Der Index s soll Supraleiter bedeuten. (26) ist einfach das Matrixelement des Operators der Störungsenergie $\frac{\hbar e}{i\, m_0 c}\frac{\mathfrak{A}_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Dabei ist das Vektorpotential $\mathfrak{A}_\varphi$ aus der Lösung der Gl. (20) für den Zylinder zu gewinnen. Ist der Zylinderradius $a \gg c\sqrt{\Lambda}$, so können wir näherungsweise setzen

$$(27)\qquad B_z = B_a\, e^{\frac{r-a}{c\sqrt{\Lambda}}}, \quad B_a = H.$$

Damit wird das richtig geeichte Vektorpotential

$$(27\,\mathrm{a})\qquad \mathfrak{A}_\varphi = c\sqrt{\Lambda}\, H e^{\frac{r-a}{c\sqrt{\Lambda}}}.$$

Mit diesem Ausdruck gehen wir in (26) ein und erhalten

$$(28)\qquad \varepsilon_s = 2\,\mu_B\, m\, c\sqrt{\Lambda}\, H \int\limits_{r=0}^{a} e^{\frac{r-a}{c\sqrt{\Lambda}}} R^2\, dr.$$

Um dieses Integral abzuschätzen, beachten wir, daß nur die Umgebung von $r = a$ einen wesentlichen Beitrag liefert. R^2 ist die stark modulierte Dichte. Für die Berechnung des Integrals glätten wir R^2 aus, setzen also mit Rücksicht auf die Normierung $R^2 = \frac{1}{\pi a^2}$.

Damit erhalten wir, wenn wir $a - r = \xi$ setzen und ξ von o bis ∞ laufen lassen,

$$\varepsilon_s = 2\, \mu_B\, m\, \Lambda\, c^2 \frac{H}{\pi a^2} \tag{29}$$

und durch Vergleich mit (23):

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_n} = \frac{2}{\pi a^2} \Lambda c^2. \tag{29a}$$

Bei Berücksichtigung der Abschirmung verkleinert sich also die magnetische Störungsenergie um den Faktor $\frac{2 \Lambda c^2}{\pi a^2}$ d. i. für $a = 1\, cm$ um 10^{-10} bis 10^{-12}.

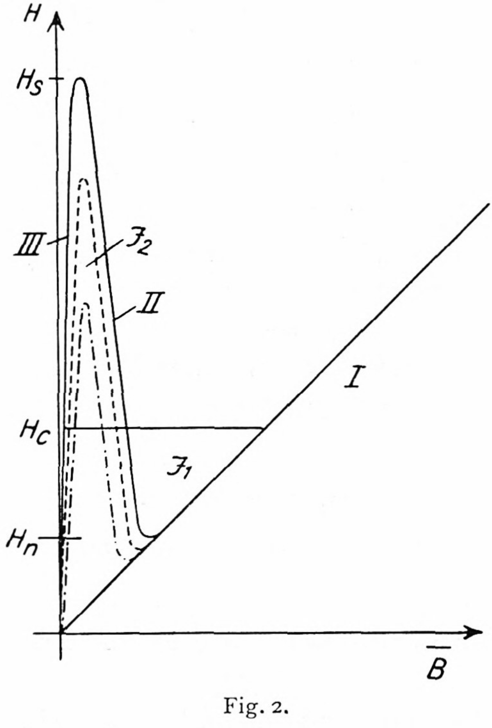


Fig. 2.

Dieses Ergebnis setzt uns in den Stand, qualitativ die Kurven

$T = \text{Const}$ im $H - \bar{B}$-Diagramm bei vorgegebenem a zu zeichnen (Fig. 2).

Wir betrachten zunächst den Fall $T = 0$. Für extrem große Feldstärken ist die magnetische Störungsenergie $\varepsilon_n \gg A$. Die Lücke im Energiespektrum wird überwunden, und es gilt $\mu \approx 1$. Die $H - \bar{B}$-Kurve ist die Winkelhalbierende durch den Nullpunkt (Kurve I). Nimmt $\bar{B}$ ab, so auch ε_n bis schließlich $\varepsilon_n \approx A$. Für $T_c = 5^0$ $\left(k = 1{,}4 \cdot 10^{-16}\ \frac{\text{erg}}{\text{grad}}\right)$ wird $A = 7 \cdot 10^{-16}$ erg. Dann tritt dieser Fall ein bei einer Feldstärke $H_n = \frac{A}{m\,\mu_B} \approx 10^{-3}$ Gauß. Verkleinern wir $\bar{B}$ noch mehr, so gilt sicher nicht mehr $\mu \approx 1$, da sich jetzt die Lücke bemerkbar macht.

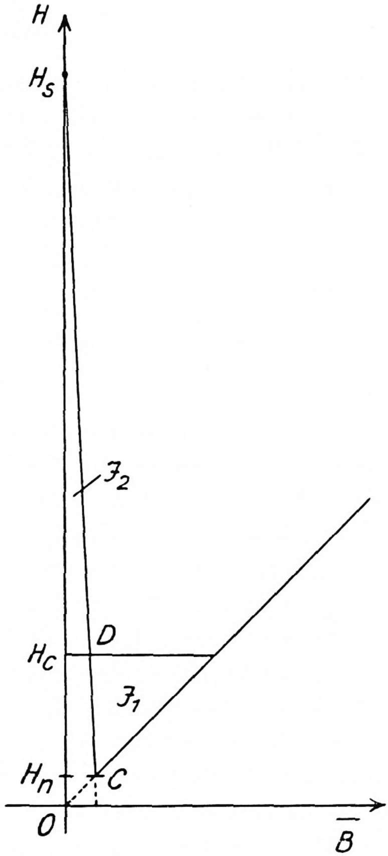
Ein weiteres Stück der Kurve erhalten wir, wenn wir von $H = 0$ ausgehen. Steigern wir die Feldstärke, so ist zunächst $\bar{B}$ praktisch Null. Die Kurve steigt fast vertikal in die Höhe, um so steiler je größer a, bis $\varepsilon_s \approx A$ (Kurve III); bei der dazugehörigen Feldstärke H_s wird der vollständige Diamagnetismus zerstört. Für $a = 1$ cm ist dieser Wert $\frac{\pi}{2\Lambda c^2}$ mal größer wie der Wert H_n für das Kurvenstück I, also H_s etwa 10^7 bis 10^8 Gauß. Da Rechnungen mit der Fermischen Verteilungsfunktion stetige Kurven liefern, muß ein Zwischengebiet existieren (Kurve II), in welchem $\bar{B}$ mit zunehmendem H abnimmt. Wir können es in der Figur nur qualitativ zeichnen. Man überlegt sich leicht, daß für $T > 0$ die Isothermen durch die gestrichelten Kurven dargestellt werden.

Unser $H - \bar{B}$-Diagramm erinnert an das $p - v$-Diagramm des Van der Waalschen Gases. Wie dort entsprechen auch hier die Isothermen für das Einphasen-System nicht dem wahren Verlauf des physikalischen Geschehens. Nach einem thermodynamischen Flächenprinzip, welches im $H - \bar{B}$-Diagramm genau so gilt wie im $p - v$-Diagramm, muß die Kurve I mit der Kurve III durch eine horizontale Gerade verbunden werden; die Höhe ist so zu wählen, daß die Flächen J_1 und J_2 einander gleich werden.[1] Dieselben Überlegungen wie bei der Van der

[1] Vgl. G. C. Wick, Phys. Rev. **52**, 526. Ähnliche Betrachtungen macht auch F. Hund in seinen „Rechnungen über das magnetische Verhalten kleiner Metallstücke", Ann. d. Phys. **32**, 102.

Waalschen Gleichung zeigen, daß wir es nach unserem Modell mit einem Phasengleichgewicht 1. Ordnung zu tun haben. Längs der horizontalen Geraden können supraleitende und nicht-supraleitende Phase koexistieren.

Wir benützen unser Prinzip der Flächengleichheit, um den magnetischen Schwellwert H_c für $T = 0$ abzuschätzen. Dazu schematisieren wir die Kurve $T = 0$ unseres $H - \bar{B}$-Diagramms für große a, wie Figur 3 andeutet. Lassen wir a gegen Unendlich



Figur 3.

wandern, so geht die Höhe des Dreiecks J_2 gegen Unendlich, die Breite gegen Null. Die Höhe ist nach (29) gegeben durch

(30) $$H_s = \frac{\pi\, a^2\, A}{2\, \mu_B\, m\, \Lambda\, c^2} \quad \text{proportional } a.$$

Auf das endliche Stück $O\,H_c$ kommt es dabei offenbar nicht an. Die Breite ist nach (23) gegeben durch

(31) $$H_n = \frac{A}{\mu_B\, m} \quad \text{proportional } \frac{1}{a}.$$

Damit wird, wenn wir m aus (24a) entnehmen,

(32) $$J_2 = \frac{1}{2} H_s\, H_n = \frac{1}{2} \frac{\pi\, A^2}{2\, \mu_B^2\, \Lambda\, c^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{3\, \pi^2\, n})^2}.$$

a ist herausgefallen, d. h. J_2 strebt einem endlichen Grenzwert zu.

Nach unserem Prinzip der Flächengleichheit muß dieser Wert gleich J_1 sein. Da es auf das unendlich kleine Flächenstück $O H_c D C O$ nicht ankommt, können wir setzen:

(33) $$J_1 = \frac{1}{2} H_c^2.$$

Wir erhalten somit für den Schwellwert:

(34) $$H_c = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{A}{\mu_B\, c\, \sqrt{\Lambda}\, \sqrt[3]{n}}.$$

Wegen $A = k\, T_c$ wird:

$$H_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k\, T_c\, e}{\mu_B\, c\, \sqrt{m_0}} \sqrt[6]{n}$$
$$\approx 100 \text{ Gauß}.$$

Dieser Wert stimmt größenordnungsmäßig mit den gemessenen Werten überein. Der wichtigste Punkt bei der ganzen Rechnung ist, daß die Abmessungen des Körpers in der Formel für H_c herausfallen.

Es ist bemerkenswert, daß sich bei der Herleitung von (34) leicht der Einfluß des periodischen Gitterpotentials berücksichtigen läßt. Dazu brauchen wir das in (30) und (31) auftretende m nur durch (24) und nicht durch (24a) zu ersetzen. Wir erhalten dann:

(35) $$H_c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\mu_B\, c\, \sqrt{\Lambda}} \frac{\hbar}{\sqrt{2\, m_0\, \zeta}}.$$

Setzt man hierin die Werte von μ_B und Λ ein, ferner $\Delta = k\,T_c$, so ergibt sich:

$$H_c = \sqrt{\pi}\, k\, T_c \sqrt{\frac{n}{\zeta}}. \tag{35a}$$

Wie in der Formel für die spezifische Wärme der Metallelektronen je Volumeneinheit:[1]

$$c = \gamma\, T,\ \gamma = \frac{\pi^2}{2} k^2 \frac{n}{\zeta} \tag{36}$$

tritt auch hier die charakteristische Verbindung $\frac{n}{\zeta}$ auf. Nach der verfeinerten Theorie ist $\frac{n}{\zeta}$ zu ersetzen durch:

$$\frac{n}{\zeta} = \frac{4}{3} F(\zeta) \tag{36a}$$

wo F die Anzahl der Quantenzustände bedeutet, die auf die Einheit der Energieskala an der Stelle $E = \zeta$ entfallen. Also:

$$H_c = \sqrt{\pi}\, k\, T_c \sqrt{\frac{4}{3} F(\zeta)}, \tag{37}$$

Mit Hilfe von (36) läßt sich (37) noch umformen:

$$\frac{H_c}{T_c \sqrt{\gamma}} = \alpha,\ \alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{38}$$

α ist eine universelle Konstante von der Größenordnung Eins. Leider reichen die bisherigen experimentellen Ergebnisse nicht aus, um diese Beziehung zu prüfen.

Bei genauer Kenntnis unseres $H - \bar{B}$-Diagramms auch für $T > 0$ können wir quantitativ, auf Grund unserer Annahme einer Lücke im Energiespektrum von der Breite Δ, alle den Supraleiter betreffenden Fragen beantworten. Als Beispiele erwähnen wir die Zunahme von H_c bei sehr kleinen Abmessungen a des Supraleiters, das Verhalten der spezifischen Wärmen bei der Phasenumwandlung, die Übergangswärme und die Form der Schwellwertkurve. Zwischen all diesen Größen bestehen einfache

[1] A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **28**, 1, 1937; vgl. insbesondere die Gln. (5), (6) und (9).

thermodynamische Beziehungen von der Art, wie sie bereits von Gorter und Casimir[1] aufgestellt wurden.

Zusammenfassung.

Ausgehend von der Hypothese freier Elektronen im Metall und von der Londonschen Theorie der Supraleitung wird ein elektronentheoretisches Modell des Supraleiters vorgeschlagen: An das für $T = 0$ ausgefüllte Kontinuum von Energieniveaus soll nach oben hin eine Lücke $A = k\,T_c$ grenzen, in der keine zulässigen Energieniveaus liegen. Dieses Modell scheint die kalorischen und elektromagnetischen Eigenschaften des Supraleiters in befriedigender Weise wiederzugeben. Den Übergang zwischen dem supraleitenden und dem normalleitenden Zustand im Magnetfeld charakterisiert es als Phasenumwandlung erster Ordnung. Für den Fall $T = 0$ kann der magnetische Schwellwert H_c abgeschätzt, nämlich durch T_c ausgedrückt werden. Er stimmt befriedigend mit dem Experiment überein.

Meinem hochverehrten Lehrer A. Sommerfeld danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge bei der Durchsicht des Manuskripts; ebenso meinem Freunde L. Waldmann für anregende Diskussionen und die Hilfe bei den thermodynamischen Betrachtungen.

Anhang.

Summationen über die besetzten Zustände bei Quantelung in Zylinderkoordinaten.

1. Verteilung der Quantenzustände im Raum ($\rho\, m\, \varkappa$).

Wir charakterisierten jeden Zustand des Elektrons durch die 3 Quantenzahlen ρ, m, $\varkappa$ [vgl. (4) und (7a)]. m und $\varkappa$ sind ganzzahlig; daher ist auch die Anzahl der Quantenzustände zwischen m und $m + dm$ bzw. $\varkappa$ und $\varkappa + d\varkappa$ gegeben durch dm bzw. $d\varkappa$. Um die Anzahl der Quantenzustände zwischen ρ und $\rho + d\rho$ zu erhalten, müssen wir Gl. (7a) explizit lösen. Für unsere stati-

[1] Physica I, 306. Vgl. auch M. v. Laue, Ann. d. Phys. **32**, 71.

stischen Betrachtungen dürfen wir die für $\rho < m$, $m \to \infty$ gültige Darstellung der Zylinderfunktionen verwenden:[1]

$$J_m(\rho) = \ldots\ldots \cos\left(m(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) + \frac{3\pi}{4}\right) \tag{39}$$

$$\text{mit} \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\rho}{m}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Die n-te Nullstelle ist gegeben durch

$$m(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) = \left(\frac{2n+1}{2} - \frac{3}{4}\right)\pi = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Daraus:

$$n = \frac{1}{\pi}\left(m(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) + \frac{\pi}{4}\right). \tag{40}$$

Die Anzahl der zwischen ρ und $\rho + d\rho$ fallenden Zustände ergibt sich damit zu

$$dn = \frac{dn}{d\rho}\,d\rho. \tag{41}$$

Wegen

$$\frac{dn}{d\rho} = \frac{dn}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\rho}\,d\rho = \frac{m}{\pi}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha}{m\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\pi}$$

wird unser $d\Phi$ von Gl. (14a), (der Faktor 2 kommt wegen des Spins dazu):

$$d\Phi = 2\,dn\,dm\,d\varkappa = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \frac{m^2}{\rho^2}}\,d\rho\,dm\,d\varkappa. \tag{42}$$

2. Berechnung von $\int d\Phi$.

Mit Hilfe von (42) können wir die Anzahl der Elektronen in unserem Zylinder in Abhängigkeit von der Grenzenergie ζ ausrechnen. Sie ist:

$$n\cdot\pi a^2 b = \int d\Phi = \frac{2}{\pi}\int\int\int\sqrt{1 - \frac{m^2}{\rho^2}}\,d\varkappa\,d\rho\,dm \tag{43}$$

---

[1] Courant-Hilbert, Methoden der math. Phys. Bd. I, 2. Aufl. S. 458 Gl. (94).

zu erstrecken über das Gebiet (13):

$$\frac{\hbar^2}{2\,m_0}\left(\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\,\varkappa^2\right)+\mu_B\,m\,H\leq\zeta. \tag{44}$$

Hieraus folgt als obere Grenze $\varkappa_1$ für das Integral nach $\varkappa$ in (43):

$$\varkappa_1^2=\frac{b^2}{\pi^2}\left\{\frac{2\,m_0}{\hbar^2}\,(\zeta-\mu_B\,m\,H)-\frac{\rho^2}{a^2}\right\}. \tag{45}$$

Mit der Abkürzung:

$$\rho_1^2=\frac{2\,m_0\,a^2}{\hbar^2}\,(\zeta-\mu_B\,m\,H) \tag{46}$$

wird

$$\varkappa_1=\frac{b}{\pi\,a}\sqrt{\rho_1^2-\rho^2}. \tag{47}$$

An Stelle des dreifachen Integrals in (43) erhält man daraufhin, wenn wir zur Ausführung der Integration nach ρ den Residuensatz verwenden:

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2\,\pi\,a}\int\int\limits_{\rho^2=m^2}^{\rho_1^2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{(\rho^2-m^2)\,(\rho_1^2-\rho^2)}\;d(\rho^2)\,d\,m\\&\qquad=\frac{b}{4\,a}\int\limits_{m=m_1}^{m_2}(\rho_1-|m|)^2\,d\,m.\end{aligned} \tag{48}$$

Die Integrationsgrenzen m_2 und m_1 sind nach (44) so zu wählen, daß der Integrand verschwindet. Wegen $\mu_B\;m\,H\ll\zeta$ können wir entwickeln:

$$\rho_1=\frac{a}{\hbar}\sqrt{2\,m_0\,\zeta}\left(1-\frac{\mu_B\,H}{2\,\zeta}\,m\right). \tag{49}$$

Hieraus ergibt sich durch Nullsetzen des Integranden auf der rechten Seite von (48):

$$\frac{a}{\hbar}\sqrt{2\,m_0\,\zeta}\left(1-\frac{\mu_B\,H}{2\,\zeta}\,m\right)-|m|=0. \tag{50}$$

Vernachlässigen wir hierin $\mu_B H m/2\zeta$, so erhalten wir für die obere und untere Integrationsgrenze in nullter Ordnung:

$$\left.\begin{matrix} m_2^0 \\ m_1^0 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{a}{\hbar} \sqrt{2 m_0 \zeta}. \tag{51}$$

Bei Berücksichtigung des H-Gliedes ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{a}{\hbar} \sqrt{2 m_0 \zeta} \left(1 - \frac{\mu_B H}{2}\right) \\ m_1 &= \frac{a}{\hbar} \sqrt{2 m_0 \zeta} \left(-1 - \frac{\mu_B H}{2}\right). \end{aligned} \tag{52}$$

Eine elementare Rechnung liefert bei konsequenter Vernachlässigung von Gliedern 2. und höherer Ordnung in H:

$$\frac{b}{4a} \int (\rho_1 - |m|)^2 \, dm = \frac{b}{4a} \tag{53}$$

$$\int \left\{ \frac{2 m_0 a^2}{\hbar^2} (\zeta - \mu_B m H) - 2 \frac{a}{\hbar} \sqrt{2 m_0 \zeta} \left(1 - \frac{\mu_B H m}{2\zeta}\right) |m| + m^2 \right\} dm$$

$$= \frac{b}{4a} \frac{2}{3} \frac{a^3}{\hbar^3} (2 m_0 \zeta)^{3/2}.$$

Damit wird nach (43):[1]

$$n = \frac{8\pi}{3} \frac{(2 m_0 \zeta)^{3/2}}{h^3}. \tag{54}$$

In (54) kommt das Magnetfeld nicht mehr vor, trotzdem wir es bei der Rechnung berücksichtigt hatten; also erleidet die Grenzenergie durch das Magnetfeld keine Störung erster Ordnung (vgl. Anm. 1 S. 120).

3. Berechnung von $\int M_1 \, d\Phi$.

Da nur die großen Werte der Quantenzahlen wesentliche Beiträge zum Integral liefern, können wir das Glied $\frac{m^2 - 1}{\rho^2}$ in (12)

---

[1] In Übereinstimmung mit Sommerfeld-Bethe, Handb. d. Phys. Bd. XXIV/2 S. 336 Gl. (23).

vereinfachen zu $\frac{m^2}{\rho^2}$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= \int M_1 d\Phi \\ &= -\frac{e^2 H a^2}{6 m_0 c^2}\frac{2}{\pi}\int\int\int\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{m^2}{\rho^2}}\,d\rho\,dm\,d\varkappa.\end{aligned}$$

Das Integrationsgebiet ist, vgl. (44) und die Bemerkungen vor Gl. (14):

$$\frac{\hbar^2}{2 m_0 a^2}\left(\rho^2+\left(\frac{a\pi}{b}\right)^2\varkappa^2\right)\leq\zeta. \tag{56}$$

Man berechnet:

$$\int\int\int_{m=-\rho}^{\rho}\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{m^2}{\rho^2}}\,dm\,d\rho\,d\varkappa \qquad \frac{m}{\rho}=\sin\varphi$$

$$= 2\int\int\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\varphi+\frac{1}{2}\right)\cos^2\varphi\,d\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varkappa$$

$$= \frac{3\pi}{8}\int\int_{\rho=0}^{\rho_2}\rho\,d\rho\,d\varkappa \qquad \rho_2^2=\frac{2 m_0 a^2}{\hbar^2}\zeta-\left(\frac{a\pi}{b}\right)^2\varkappa^2$$

$$= \frac{3\pi}{16}a^2\int_{\varkappa=0}^{\varkappa_2}\left(\frac{2 m_0}{\hbar^2}\zeta-\frac{\pi^2}{b^2}\varkappa^2\right)d\varkappa \qquad \varkappa_2^2=\frac{2 m_0\zeta}{\hbar^2}\frac{b^2}{\pi^2}$$

$$= \pi a^2 b\cdot\pi^2\frac{(2 m_0\zeta)^{3/2}}{h^3}.$$

Also

$$\bar{M}_1 = -\pi a^2 b\cdot\frac{e^2 H a^2}{3 m_0 c^2}\pi\frac{(2 m_0\zeta)^{3/2}}{h^3}. \tag{57}$$

Wegen $\chi_1=\frac{\bar{M}_1}{H\cdot\pi a^2 b}$ erhalten wir (15).

4. Berechnung von $\int M_0\,d\Phi$.

Nach (11) ist

$$\bar{M}_0=\int M_0\,d\Phi \tag{58}$$

$$= -\mu_B \cdot \frac{2}{\pi} \int\int\int m \sqrt{1 - \frac{m^2}{\rho^2}}\, d\varkappa\, d\rho\, dm.$$

zu erstrecken über das Gebiet (44).

Der Integrand dieses Integrals unterscheidet sich von dem Integranden in (43) nur um den Faktor m. Wir können daher die Integrationen nach $\varkappa$ und ρ genau so ausführen wie in Note 2 Gl. (43) bis (48) und erhalten damit für das 3fache Integral auf der rechten Seite von (58) statt (53):

$$(59) \qquad \int_{m_1}^{m_2} m\,(\rho_1 - |m|)^2\, dm = -\frac{1}{3}\frac{a^2}{\hbar^3}(2\, m_0\, \zeta)^{3/2} \frac{e\,H}{2\,\hbar\, c}\, a^2.$$

Wegen des Faktors m im Integranden haben sich hier die Glieder nullter Ordnung in H weggehoben ganz in Übereinstimmung mit der anschaulichen Tatsache, daß die Momente der Elektronen $m\,\mu_B$ ohne Magnetfeld sich gegenseitig aufheben.

Aus (58) und (59) ergibt sich

$$(60) \qquad \overline{M}_0 = \pi\, a^2\, b\, \frac{e^2\, H\, a^2}{3\, m_0\, c^2}\, \pi\, \frac{(2\, m_0\, \zeta)^{3/2}}{h^3} = -\overline{M}_1.$$

wie auf Seite 120 behauptet wurde.