Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Ein zweiter Beweis eines Satzes über Partitionen.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Der Satz, um den es sich handelt und für den letzthin ein Beweisverfahren kurz geschildert wurde[1], lautet:

Seien m und k zwei ganze positive Zahlen. Dann ist die Anzahl derjenigen Partitionen von m, bei denen kein Summand durch k teilbar ist, ebenso groß wie die Anzahl derjenigen Partitionen von m, bei denen unter den Summanden kein System von k einander gleichen Zahlen vorkommt.

Wenn wir dabei kurz von Partitionen erster Art und solchen zweiter Art sprechen, so genügt es zu zeigen, daß sich den Partitionen der ersten Art eineindeutig jene der zweiten Art zuordnen lassen. Und es kann offenbar $1 < k < m$ angenommen werden, da die Fälle $k = 1$ und $k \geqq m$ trivial sind. Man stützt sich nun einerseits auf die eindeutige Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl l im System mit der Basis k, also

$$l = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \dots \quad \text{mit } 0 \leqq c_s \leqq k-1,$$

andererseits auf die eindeutige Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl in der Gestalt $a\,k^s$, wo a nicht durch k teilbar ist.

Seien nun $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ die positiven Zahlen $\not\equiv 0 \pmod{k}$. In einer gegebenen Partition erster Art möge a_ν genau l_ν-mal als Summand auftreten, wobei

$l_\nu = \sum\limits_s c_{\nu s}\, k^s$ (mit $0 \leqq c_{\nu s} \leqq k-1$) sei und $a_\nu\, k^s = b_{\nu s}$ gesetzt werde. Dann ist

$$m = \sum_\nu l_\nu\, a_\nu = \sum_{\nu s} c_{\nu s}\, b_{\nu s}$$

[1] „Eine Verallgemeinerung des Satzes, daß jede natürliche Zahl ebensoviele Partitionen in lauter ungerade wie in lauter verschiedene Summanden hat", Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Bericht über die Sitzung am 7. Februar 1947, Punkt 3.

und letzteres liefert eine Partition von m mit Summanden $= b_{\nu s}$, von denen wegen $c_{\nu s} \leqq k-1$ keiner k-mal oder öfter auftritt, und wobei zu beachten ist, daß zu verschiedenen Wertepaaren ν, s auch verschiedene Zahlen $b_{\nu, s}$ gehören. Umgekehrt erhält man aus einer Partition zweiter Art $\sum C_\mu b_\mu$ mit verschiedenen b_μ und $C_\mu < k$, so daß jeder Summand b_μ höchstens $(k-1)$-mal auftritt, nach rückwärts die zugehörige Partition erster Art, indem man $b_\mu = a_\mu k^{s_\mu}$ setzt mit $a_\mu \not\equiv 0 \pmod{k}$, wobei die verschiedenen b_μ, die für a_μ denselben Wert a_ν liefern, auf verschiedene Potenzen k^{s_μ} führen. Dann ist $m = \Sigma C_\mu a_\mu k^{s_\mu} = \Sigma a_\nu l_\nu$ die gewünschte Partition erster Art, wo $l_\nu = \sum\limits_\mu C_\mu k^{s_\mu}$ ist, wenn die Summe über alle jene μ erstreckt wird, für die a_μ den Wert a_ν hat.