

Sitzungsberichte
der
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Klasse
der
Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Ein zweiter Beweis eines Satzes über Partitionen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Der Satz, um den es sich handelt und für den letzthin ein Beweisverfahren kurz geschildert wurde¹, lautet:

Seien m und k zwei ganze positive Zahlen. Dann ist die Anzahl derjenigen Partitionen von m , bei denen kein Summand durch k teilbar ist, ebenso groß wie die Anzahl derjenigen Partitionen von m , bei denen unter den Summanden kein System von k einander gleichen Zahlen vorkommt.

Wenn wir dabei kurz von Partitionen erster Art und solchen zweiter Art sprechen, so genügt es zu zeigen, daß sich den Partitionen der ersten Art eineindeutig jene der zweiten Art zuordnen lassen. Und es kann offenbar $1 < k < m$ angenommen werden, da die Fälle $k = 1$ und $k \geq m$ trivial sind. Man stützt sich nun einerseits auf die eindeutige Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl l im System mit der Basis k , also

$$l = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \dots \quad \text{mit } 0 \leq c_s \leq k-1,$$

andererseits auf die eindeutige Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl in der Gestalt $a k^s$, wo a nicht durch k teilbar ist.

Seien nun $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ die positiven Zahlen $\not\equiv 0 \pmod{k}$. In einer gegebenen Partition erster Art möge a_v genau l_v -mal als Summand auftreten, wobei

$$l_v = \sum_s c_{vs} k^s \quad (\text{mit } 0 \leq c_{vs} \leq k-1) \quad \text{sei und } a_v k^s = b_{vs} \quad \text{gesetzt}$$

werde. Dann ist

$$m = \sum_v l_v a_v = \sum_{vs} c_{vs} b_{vs}$$

¹ „Eine Verallgemeinerung des Satzes, daß jede natürliche Zahl ebenso viele Partitionen in lauter ungerade wie in lauter verschiedene Summanden hat“, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Bericht über die Sitzung am 7. Februar 1947, Punkt 3.

und letzteres liefert eine Partition von m mit Summanden $= b_{\nu, s}$, von denen wegen $c_{\nu, s} \leq k-1$ keiner k -mal oder öfter auftritt, und wobei zu beachten ist, daß zu verschiedenen Wertepaaren ν, s auch verschiedene Zahlen $b_{\nu, s}$ gehören. Umgekehrt erhält man aus einer Partition zweiter Art $\sum C_{\mu} b_{\mu}$ mit verschiedenen b_{μ} und $C_{\mu} < k$, so daß jeder Summand b_{μ} höchstens $(k-1)$ -mal auftritt, nach rückwärts die zugehörige Partition erster Art, indem man $b_{\mu} = a_{\mu} k^{s_{\mu}}$ setzt mit $a_{\mu} \not\equiv 0 \pmod{k}$, wobei die verschiedenen b_{μ} , die für a_{μ} denselben Wert a_{ν} liefern, auf verschiedene Potenzen $k^{s_{\mu}}$ führen. Dann ist $m = \sum C_{\mu} a_{\mu} k^{s_{\mu}} = \sum a_{\nu} l_{\nu}$ die gewünschte Partition erster Art, wo $l_{\nu} = \sum_{\mu} C_{\mu} k^{s_{\mu}}$ ist, wenn die Summe über alle jene μ erstreckt wird, für die a_{μ} den Wert a_{ν} hat.