Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Im Laufe meiner Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie bin ich zu der Überzeugung gelangt, daß sowohl in der hyperbolischen wie auch in der elliptisch-sphärischen Geometrie als prinzipiell einfache und zugleich für die verschiedensten Aufgaben verwendbare Grundlage eine gewisse, für beide Geometrien scheinbar völlig verschiedene Zuordnung von rechtwinkligen Dreiecken gewählt werden kann.

Diese Zuordnung wird in der elliptisch-sphärischen Geometrie aus dem „Pentagramma mirificum“ von Gauß abgeleitet[1]), in der hyberbolischen auf einem ganz anderen Weg[2]). Beidesmal besteht ihre Tragweite darin, daß mit ihrer Hilfe gewisse Konstruktionsaufgaben sich lösen lassen, z. B. die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln[3]), daß sie zur Ableitung der Metrik (Trigonometrie) verwendet werden können[4]) und endlich, daß mit ihrer Hilfe auf der einen Seite die Eigenschaften der hyperbolischen (Lobatschefskijschen), auf der anderen die der elliptischen (Cliffordschen) Parallelen ohne

[1]) Gauß' Werke III, S. 481.

[2]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912 (i. F. zitiert mit N. E. G.), S. 37—41.

[3]) N. E. G., S. 42 und S. 156.

[4]) N. E. G., S. 73 und S. 163.

jede trigonometrische oder analytisch-geometrische Entwicklung erkannt werden können[1]).

Ich möchte nunmehr zeigen, daß diese Zuordnungen in beiden Geometrien im engsten Zusammenhang stehen (§ 1), außerdem aber, daß der grundlegende Satz von Study in seiner Theorie der Abbildung der orientierten Geraden (Speere) des elliptischen Raumes auf die Punktepaare einer Kugel ebenfalls hier eingeordnet werden kann; auch dieser Satz, auf den wir später zurückkommen, ergibt sich durch eine einfache Konstruktion, die durch das Pentagramma mirificum nahegelegt wird (§ 2).

§ 1.

Das Pentagramma mirificum und die Zuordnung rechtwinkliger Dreiecke.

Wir gehen, an eine elementare Konstruktion anknüpfend, von der elliptisch-sphärischen Geometrie aus und werden sodann, indem wir die Klein-Cayleysche Maßbestimmung einführen, leicht den Übergang finden zur hyperbolischen Geometrie, wobei es wohl nicht überflüssig ist, für diesen zweiten Fall nochmals auf alle Einzelheiten der Zuordnung einzugehen.

1. Das Pentagramma mirificum.

Wir betrachten auf der Kugel vom Radius Eins ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $BC = a$, $CA = b$ der Hypotenuse c und den Winkeln

$$\sphericalangle CBA = \mu, \quad \sphericalangle BAC = \lambda.$$

Der Kürze halber bezeichnen wir allgemein mit s' die zu s komplementäre Strecke und mit φ' den Komplementwinkel von φ. Verlängert man jetzt BA um c' bis D und BC um a' bis E, so ist im Viereck $ACED$:

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle CED = \sphericalangle EDA = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle DAC = \pi - \lambda$$
$$AC = b, \quad CE = a', \quad ED = \mu, \quad DA = c'.$$

[1]) N. E. G., S. 40 und S. 164—166.

Dieses Viereck mit drei rechten Winkeln (dreirechtwinkliges Viereck) nennen wir dem rechtwinkligen Dreieck zugeordnet.

Verlängert man jetzt CA und ED bis zum Schnittpunkt F, so entsteht ein zweites, dem ersten zugeordnetes rechtwinkeliges Dreieck mit den Bestimmungsstücken

$$\lambda_1 = \sphericalangle FAD = \lambda, \quad \mu_1 = \sphericalangle AFD = \alpha'$$
$$a_1 = FD = \mu', \qquad b_1 = AD = c', \quad c_1 = AF = b'.$$

Setzt man diese Konstruktion fort, so ergibt sich eine geschlossene Kette von fünf rechtwinkligen Dreiecken, die ein „Pentagramm" bilden, d. h. die Figur der Diagonalen eines Fünfecks[1]). Sie veranschaulicht sämtliche aus dem einen Dreieck ableitbaren Dreiecke und dreirechtwinkligen Vierecke.

Wie schon bemerkt worden ist, kann hier auf die Theorie der Cliffordschen Parallelen begründet werden (N. E. G. § 30, 1), aus der wir hier nur die für den folgenden Paragraphen notwendigen Sätze anführen wollen, die a. a. O. bewiesen sind:

Man erhält im elliptischen Raum die beiden Cliffordschen Parallelen zu g durch P, indem man von P das Lot PF auf g fällt und durch P die Ebene E' senkrecht zu PF legt und mit der Ebene E (Ebene durch P und g) zum Schnitt bringt (g_1). Die beiden Geraden durch P in E', welche mit g_1 den Winkel l einschließen, der der Strecke PF gleich ist, sind die gesuchten Parallelen.

Orientiert man mit Study g in bestimmtem Sinn, so wird man die beiden Parallelen, jenachdem sie durch Linksschraubung oder Rechtsschreibung längs der Achse FP aus g hervorgehn, als orientierte Links- und Rechts-Parallele zum Speer g bezeichnen.

Ferner führen wir noch den Satz an[2]):

Sind zwei Speere einem und demselben dritten rechtsparallel (linksparallel), so sind sie zueinander rechtsparallel (linksparallel).

[1]) Gauß' Werke III, S. 481. — Hessenberg, Trigonometrie (Sammlung Göschen), S. 115.

[2]) N. E. G., S. 188. — Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen, Leipzig 1909, S. 13.

2. Übergang zur Cayley-Kleinschen Massbestimmung.

Das Gerüst des Pentagramma mirificum ist für die Kugel ein Oktant: BE, EF und FB sind drei Quadranten von Hauptkreisen der Kugel, und es wird F mit einem Punkt C von von BE, B mit einem Punkt D von EF verbunden; BD und FC schneiden einander in A, und damit haben wir unmittelbar zwei zugeordnete Dreiecke BCA und FAD sowie ein zugeordnetes Viereck $ACDE$.

Führen wir jetzt in der Ebene elliptische Maßbestimmung ein, wobei ein nullteiliger Kegelschnitt zu Grunde zu legen ist, so wird BEF ein Polardreieck dieses Kegelschnitts.

Zeichnen wir ein Polardreieck für einen reellen Fundamentalkegelschnitt K, gehn wir also zur hyperbolischen Geometrie über, und liegt dabei B im reellen Gebiet der hyperbolischen Maßbestimmung (innerhalb von K), so liegen E und F außerhalb, also im imaginären Gebiet der Maßbestimmung.

Verbinden wir F mit einem reellen Punkt C von BE, B mit einem Punkt D von EF, so wird zwar das Dreieck BAC reell, das zugeordnete Viereck $CAED$ aber hat zwei imaginäre Ecken.

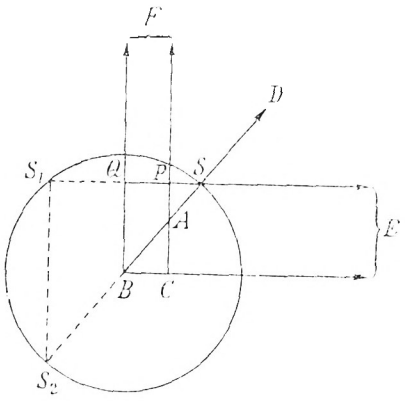

Fig. 1.

Es genügt aber eine einzige Hilfslinie, um wieder ein reelles Viereck zu erhalten: Wir verbinden E mit dem unendlich fernen Punkt S von BA, d. h. mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von BA mit dem Fundamentalkegelschnitt, und schneiden ES mit $BF(Q)$ und $CF(P)$.

Dieses Viereck $BCPQ$ nennen wir „dem rechtwinkligen Dreieck ABC zugeordnet".

In Fig. 1 ist zum Fundamentalkegelschnitt ein Kreis gewählt und B als Mittelpunkt des Kreises angenommen, wodurch die Konstruktion sehr vereinfacht wird.

Man erkennt aus der Figur auch sofort, daß (QP) im hyperbolischen Maß gemessen gleich (AB) ist, denn das Doppelverhältnis (S_1QPS) ist gleich dem Doppelverhältnis (S_2BAS); und hieraus folgt die bekannte Konstruktion der hyperbolischen Parallelen BS zu QS[1]).

3. Berechnung aller Bestimmungsstücke der zugeordneten Figuren.

Ist die Gleichung des reellen Fundamentalkegelschnitts in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten gegeben durch

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

so wird die hyperbolische Entfernung

$$s = (P_1 P_2)$$

zweier Punkte $P_1(x_1 y_1)$ und $P_2(x_2 y_2)$ gegeben durch

$$1) \qquad \mathfrak{Cof}\, s = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}},$$

wobei $\mathfrak{Cof}\, s$ den hyperbolischen Cosinus bedeutet:

$$\mathfrak{Cof}\, s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}.$$

Die Formel ergibt sich leicht aus der bekannten Definition des hyperbolischen Entfernungsmaßes $(P_1 P_2)$ als halber Lo-

[1]) F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig. 1906, S. 101.

garithmus des Doppelverhältnisses, das P_1 und P_2 mit den Punkten bilden, in denen ihre Verbindungslinie den Fundamentalkegelschnitt trifft.

Der (hyperbolische) Winkel (S) zweier orientierten[1]) Geraden g_1 und g_2, die in cartesischen Koordinaten gegeben sind, durch die Gleichungen

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$
$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

ist dann bestimmt durch

$$\cos \varphi = \frac{\cos (\alpha_2 - \alpha_1) - p_1 p_2}{\sqrt{1 - p_1^2}\sqrt{1 - p_2^2}}.$$

Diese Formel folgt aus der Definition des hyperbolischen Winkelmaßes als der durch $2i$ dividierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die beiden orientierten Geraden mit den durch ihren Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten bilden.

Für den Koordinatenanfang fällt euklidische und hyperbolische Winkelbestimmung zusammen, ferner stehen zwei Gerade, von denen die eine durch den Koordinatenanfang geht und zur anderen im Sinne der euklidischen Maßbestimmung senkrecht steht, auch im Sinn der hyperbolischen Maßbestimmung aufeinander senkrecht. Man erkennt dies sofort, wenn man einmal $p_1 - p_2 = 0$ setzt, und dann $p_1 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Wir nehmen jetzt zur x-Achse die Gerade BE, zur y-Achse die Gerade BD, ferner sei

$$BC = u, \quad CA = v,$$

dann bekommen wir für die cartesischen Koordinaten die Tabelle

[1]) W. Blaschke, Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen der Ebene. Math. Annalen 69 (1910), S. 205.

	x	y
A	u	v
B	o	o
C	u	o
P	u	$\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$
Q	o	$\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

Für die hyperbolischen Entfernungen

$(BC) = a$, $(CA) = b$, $(BA) = c$, (QP) und (BQ)

finden wir hiernach:

$$\mathfrak{Cof}\, a = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ also } u = \mathfrak{Tang}\, a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

$$\mathfrak{Cof}\, b = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \text{ also } v = \frac{\mathfrak{Tang}\, b}{\mathfrak{Cof}\, a},$$

$$\mathfrak{Cof}\, c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{Cof}\, a\ \mathfrak{Cof}\, b;$$

die Grundformel für das rechtwinklige Dreieck.

Endlich folgt noch

$$\mathfrak{Cof}\,(CP) = \frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2+v^2}}{u\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\mathfrak{Cof}\,(BQ) = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} = \frac{1}{\cos\mu} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}$$

und

$$\mathfrak{Cof}\,(QP) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{Cof}\, c.$$

Die letzte Formel zeigt wieder, daß $(QP) = (BA)$ ist, wie schon oben (S. 277) gezeigt wurde, die vorletzte gibt die Beziehung zwischen einer Strecke (BQ) und dem zu ihr als

Lot gehörigen Parallelwinkel $\frac{\pi}{2} - \mu$ an, d. h. dem Winkel $\sphericalangle QBS$, den die Parallele BS zu der auf BQ in Q errichteten Senkrechten QS mit BQ einschließt.

Bezeichnen wir eine Strecke und den zugehörigen Parallelwinkel immer durch die entsprechenden lateinischen und griechischen Buchstaben, ferner die zu einer Strecke a, b, m ... *komplementäre*, d. h. diejenige, zu der als Parallelwinkel das Komplement von α, β, μ ... gehört, und a', b', m' ..., so ist in unserer Figur

$$(BQ) = m'$$

und wir haben die allgemeine Beziehung zwischen Lot (a) und Parallelwinkel (α):

$$3) \qquad \mathfrak{Lot}\, a = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Um jetzt noch die fehlenden Winkel

$$\lambda = \sphericalangle BAC \text{ und } \sphericalangle QPC$$

zu berechnen, brauchen wir die Gleichungen der drei orientierten Geraden BA, CP und QP; die jedesmal angegebenen Punkte geben den Sinn der Orientierung an, und man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} x \sin \mu - y \cos \mu &= 0 \\ x - u &= 0 \\ -y + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Die Formel 2) ergibt dann

$$\cos \sphericalangle QPC = \frac{v}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ also}$$

$$\sin \sphericalangle QPC = \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2}} = \frac{1}{\mathfrak{Lot}\, b},$$

d. h. nach 3)

$$\sphericalangle QPC = \beta.$$

Schließlich wird noch

$$\cos\lambda = \cos \sphericalangle BAC = \frac{\sin\mu}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{1-u^2}},$$

also

$$\sin\lambda = \frac{u\sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}(CP)},$$

d. h.

$$(CP) = l.$$

Damit sind alle Stücke des Dreiecks ABC und des Vierecks $BCPQ$ wirklich berechnet.

4. Zusammenstellung.

Durch Übertragung des Gerüstes, das zum Pentagramma mirificum führt, nämlich eines Polardreiecks des Fundamentalkegelschnitts haben wir somit gefunden:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck der hyperbolischen Geometrie mit den Katheten a, b, der Hypotenuse c und den Winkeln λ und μ gehört ein Viereck mit drei rechten Winkeln, mit den Seiten

$$(BC) = a,\ (CP) = l,\ (PQ) = c,\ (CB) = m'$$

und dem spitzen Winkel

$$\sphericalangle CPQ = \beta.$$

(Die Beziehung zwischen l und λ, b und β, m' und m ist oben angegeben.)

Aus diesem Viereck ist dann ein zweites rechtwinkliges Dreieck abzuleiten usw., sodaß wir gewissermaßen ein hyperbolisches „Pentagramma mirificum“ erhalten, als Gegenstück zu dem von Gauß.

Es sei hier noch eine beiläufige Bemerkung gestattet: Wir haben mit den Formeln der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung gerechnet und nur die eine Beziehung

$$(QP) = (BA)$$

ohne Rechnung gefunden, freilich doch mit metrischen Hilfsmitteln und durch spezielle Wahl der Lage.

Daneben müßte aber die Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und dreirechtwinkligem Viereck in diesem Zusammenhang ohne jede Rechnung verfolgt werden (wie N. E. G. S. 37—41). Die Hilfsmittel dazu liegen vor, denn die Gleichheit zweier Strecken (AB) und $(A'B')$ ist ja auch ohne Formel definierbar: (AB) ist gleich $(A'B')$, wenn es eine hyperbolische Bewegung, d. h. eine projektive Transformation der Ebene gibt, bei der der Fundamentalkegelschnitt in sich übergeht und zugleich das Punktepaar A, B in A', B'. Ebenso ist $\sphericalangle(g_1, g_2)$ gleich dem Winkel $\sphericalangle(g_1', g_2')$, wenn es eine hyperbolische Bewegung gibt, bei der g_1 und g_2 in g_1' und g_2' übergehen. Endlich ist die Beziehung zwischen komplementären Strecken auch durch Konstruktionen aus der Geometrie der Lage definierbar.

Es handelt sich darum, die hierbei zu verwendenden Sätze festzustellen, worauf aber an dieser Stelle wegen des so einfachen in der N. E. G. wiedergegebenen elementargeometrischen Beweises wohl verzichtet werden kann.

§ 2.

Studys Abbildung der Speere des elliptischen Raumes.

In Nr. 1 des ersten Paragraphen haben wir die Bedeutung des Pentagramma mirificum und der damit verknüpften Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks zum Viereck mit drei rechten Winkeln für die elliptisch-sphärische Geometrie gezeigt, wir wollen diese Zuordnung jetzt noch weiter in der Liniengeometrie des elliptischen Raumes anwenden.

1. Der Studysche Satz.

Study hat den folgenden Satz bewiesen, aus dem für die darin erwähnte Abbildung der Speere des elliptischen Raumes sich eine Reihe weiterer, zu inhaltreichen und eleganten geometrischen Untersuchungen führender Sätze ergeben[1]):

[1]) E. Study, Beiträge zur nichteuklidischen Liniengeometrie. Am. J. of Math. XXIX. 2 (1907). S. 130.

Bildet man die Speere (g) des elliptischen Raumes in der Weise auf die Punktepaare R, L einer Kugel ab, daß man durch den Mittelpunkt O der Kugel die orientierte Rechtsparallele (r) und Linksparallele (l) zu g zieht und mit der Kugel zum Schnitt bringt (R, L), so gelten für die sphärischen Abstände

$$(R_1 R_2) = \sphericalangle R_1 O R_2$$
$$\text{und } (L_1 L_2) = \sphericalangle L_1 O L_2$$

der Bilder zweier Speere g_1 und g_2 die Beziehungen

$$(R_1 R_2) = \psi - \varphi$$
$$(L_1 L_2) = \psi + \varphi .$$

Dabei ist φ das eine gemeinsame Lot der beiden Speere, ψ der Winkel $g_1 g_2$.

Zur Erläuterung fügen wir hinzu, daß zwei Speere, wenn sie nicht parallel sind (also lauter gemeinsame Lote haben), zwei gemeinsame Lote besitzen: Ist $F_1 F_2 = \varphi$ das eine gemeinsame Lot, ψ der Winkel, durch den man g_1 um $F_1 F_2$ als Achse drehen muß, damit es mit g_2 in einer Ebene liegt, so sind die Fußpunkte $F_1' F_2'$ des zweiten gemeinsamen Lots dadurch bestimmt, daß

$$F_1 F_1' = F_2 F_2' = \frac{\pi}{2}$$

ist. Ferner ist dann $F_1' F_2' = \psi$ und der Winkel der Drehung bzw. Schraubung um die Achse $F_1' F_2'$, welche g_1 in g_2 überführt, ist gleich φ [1]).

2. Beweis des Studyschen Satzes.

Nach dem Satz in § 1, 1 sind zwei einem dritten rechts- oder linksparallele Speere zueinander rechts- oder linksparallel. Demnach ist der Bildpunkt L für alle zueinander linksparallen Speere derselbe.

[1]) N. E. G., S. 187. — W. Vogt, a. a. O., S. 5.

Hiervon wollen wir bei der Studyschen Abbildung Gebrauch machen. Wir fällen zunächst vom Mittelpunkt O der Bildkugel das Lot OF auf das gemeinsame Lot F_1F_2 der beiden Speere g_1 und g_2, die abgebildet werden sollen, und führen die Bezeichnungen ein:

$$OF = u, \quad FF_1 = \varphi_1, \quad FF_2 = \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi.$$

Sodann legen wir durch F die zu g_1 und g_2 linksparallelen Speere h_1 und h_2; sie stehen auf dem Lot F_1F_2 in F senkrecht und schließen mit der Verlängerung von OF die Winkel ein

$$\psi_1 + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 + \varphi_2,$$

wobei ψ_1 und ψ_2 die Winkel der Speere g_1 und g_2 mit ihren senkrechten Projektionen auf die Ebene OFF_1F_2 sind, und

$$\psi_1 - \psi_2 = \psi$$

der Winkel von g_1 und g_2 ist.

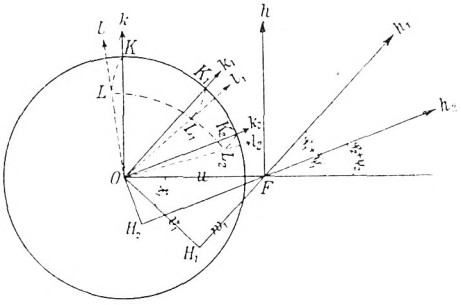

Fig. 2.

Wir betrachten jetzt zuerst den Speer h_1 und führen als Hilfslinie den Speer h ein (s. Fig. 2), der von F ausgeht und mit OF und h die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1$ einschließt, er liegt mit OF, h_1 und h_2 in einer Ebene. Es sei ferner $OH_1 = v_1$ das Lot von O auf h_1, außerdem seien k und k_1 die zu OF und H_1O senkrechten, in der Ebene OFH_1 gelegenen von O

ausgehende Speere, K und K_1 die Punkte, in denen sie die Bildkugel treffen, L und L_1 die Schnittpunkte der orientierten Linksparallelen durch O zu h und h_1 (also auch h und g_1) mit der Bildkugel.

Wir betrachten jetzt das sphärische Viereck KK_1LL_1, in dem nach der Definition der Linksparallelen

$$\sphericalangle LKK_1 = \sphericalangle KK_1L_1 = \frac{\pi}{2}$$

ist, und die sphärischen Abstände $(KL) = \sphericalangle KOL$ und $K_1L_1 = \sphericalangle K_1OL_1$ die Werte haben[1]):

$$(KL) = OF = u$$
$$(K_1L_1) = OH_1 = v_1;$$

außerdem ist

$$(KK_1) = \sphericalangle (k, k_1) = \sphericalangle FOH_1 = \chi_1.$$

Jetzt ist das Pentagramma mirificum anzuwenden. Zu dem rechtwinkligen Dreieck OH_1F mit den Bestimmungsstücken

$$a = H_1F = w_1, \quad b = OH_1 = v_1, \quad c = OF = u$$
$$\mu = \sphericalangle OFH_1 = \varphi_1 + \psi_1, \quad \lambda = \sphericalangle H_1OF_1 = \chi_1$$

gibt es ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck mit den Stücken

$$a_1 = c' = \frac{\pi}{2} - u, \quad b_1 = \mu' = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1, \quad c_1 = b' = \frac{\pi}{2} - v_1$$

$$\lambda_1 = a' = \frac{\pi}{2} - w_1, \quad \mu_1 = \lambda = \chi_1$$

und, diesem zugeordnet, ein Viereck mit drei rechten Winkeln und den Seiten

$$u, \ \chi_1, \ v_1, \ \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1,$$

von denen die beiden letzten den Winkel $\frac{\pi}{2} + w_1$ einschließen.

[1]) Wir messen also den sphärischen Abstand zweier Punkte auf der Kugel durch den Winkel, den die vom Mittelpunkt nach den Punkten gezogenen Radien miteinander einschließen.

Dieses Viereck stimmt also mit LKK_1L_1 überein in den drei Stücken

$$(LK) = u, \quad (KK_1) = \chi_1, \quad (K_1L_1) = v_1,$$

außerdem sind in beiden Vierecken die Winkel zwischen u und χ_1, χ_1 und v_1 rechte, und hieraus folgt dann die Übereinstimmung in den noch übrigen Stücken, d. h. es ist

$$\sphericalangle LOL_1 = \sphericalangle (l, l_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1, \quad \sphericalangle KLL_1 = \frac{\pi}{2},$$

und endlich

$$\sphericalangle LL_1K_1 = \frac{\pi}{2} + w_1.$$

Man sieht, daß der Winkel LOL_1 von u unabhängig ist, der Hauptkreis aber, auf dem L_1 liegt, von φ_1 und ψ_1 unabhängig.

Bilden wir jetzt in derselben Weise h_2 ab, so liegt der Bildpunkt L_2 auf LL_1, und zwar ist

$$(LL_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2 - \psi_2,$$

daher ist:

$$4) \qquad (L_1L_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2 - \psi_2 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1\right)$$
$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \psi_1 - \psi_2 = \varphi + \psi.$$

Für die orientierten Rechtsparallelen und ihre Bilder R_1 und R_2 finden wir, wenn wir als Hilfslinien Rechtsparallelen zu g_1 und g_2 durch F benützen und mit R den Durchdringungspunkt des zum Speer h rechtsparallelen Speeres durch O mit der Kugel bezeichnen:

$$(RR_1) = \frac{\pi}{2} - (\psi_1 - \varphi_1)$$

$$(RR_2) = \frac{\pi}{2} - (\psi_2 - \varphi_2)$$

und endlich

$$5) \qquad (R_1R_2) = \psi_1 - \psi_2 - (\varphi_1 - \varphi_2) = \psi - \varphi.$$

Mit den Formeln 4) und 5) ist der Satz von Study bewiesen, und die hier gegebene Ableitung, welche ohne trigonometrische[1]) oder analytisch-geometrische Entwicklungen zu verwenden, allein der ganz elementaren, durch das „Pentagramma mirificum“ gegebenen Grundlage bedarf, gewährt durch die dabei gebrauchten Konstruktionen zugleich einen Einblick in die Entstehung der Study schen Abbildung.

[1]) An anderer Stelle (N. E. G., S. 189—191) hatte ich noch trigonometrische Formeln benützt zur Ableitung der Beziehungen (4) und (5).