Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über eine dem Lambertschen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1912.

In drei Standpunkten Q_i $(i = 1, 2, 3)$ werden die Winkel gemessen, welche die Visierlinien nach fünf Zielpunkten R_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ miteinander bilden. Gesucht ist die gegenseitige Lage der acht Punkte Q_i und R_k[1]).

[1]) Bei dem eigentlichen Lambertschen Problem der acht Punkte sind die Winkel bekannt, welche die Strahlen von vier Standpunkten nach vier Zielpunkten unter sich einschließen. Lambert hat die Aufgabe, hieraus die Figur der acht Punkte zu finden, analytisch durch Zurückführung auf eine Gleichung 2. Grades gelöst (J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, 1. Bd., Berlin 1765, § 270 u. f.). Etwas veränderte analytische Lösungen gaben später J. A. Grunert (Archiv für Mathematik und Physik, 1. Bd., 1841, p. 89) und W. Laska (Monatshefte für Mathematik und Physik, 12. Bd., 1901, p. 172). Der zuletzt genannte Autor hat wohl zuerst ausdrücklich auf das hier behandelte Problem aufmerksam gemacht, ohne indessen seine Lösung zu fördern. Neuerdings hat die Aufgabe in der Photogrammetrie Beachtung gefunden und wurde von Th. Scheimpflug (Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf der „IIa" zu Frankfurt, herausgegeben von R. Wachsmuth, Berlin 1910, p. 190) und J. Tschamler (Mitteilungen der K. u. K. Geographischen Gesellschaft in Wien, Heft 8, 1911) durch graphische Näherung gelöst.

Das eigentliche Lambertsche Problem kann geometrisch in ganz ähnlicher Weise wie das hier behandelte gelöst werden. Legt man die Standpunkte auf vier Kreispaare fest, so ergeben sich die Zielpunkte als Restschnitt je zweier Kurven 3. Ordnung mit sieben bekannten Schnittpunkten.

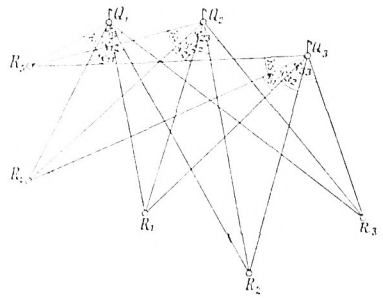

Fig. 1.

Die im folgenden festgehaltene Bezeichnung ist aus der Figur 1 ersichtlich. Alle Winkel werden von den Zielinien nach R_4 aus gemessen; und zwar ist $R_4 Q_i R_5 = \lambda_i$ gesetzt; die Winkel, welche einen nach R_1, R_2 oder R_3 gehenden Schenkel haben, also $R_i Q_i R_k$ $(k = 1, 2, 3)$ heißen φ_{ik}.

Da der Maßstab der ganzen Konfiguration, ebenso ihre Lage in der Ebene, unbestimmt und willkürlich ist, können zwei von den acht Punkten beliebig angenommen werden; und zwar sollen R_5 und R_4 auf der y-Achse im Abstand $\pm a$ vom Anfangspunkt des Koordinatensystems liegen.

Dann ist die Lage des Punktes Q_1 auf die beiden durch R_4 und R_5 gehenden Kreise beschränkt, in welchen über der Sehne $R_4 R_5$ der Peripheriewinkel λ_1 steht; ebenso ist der geometrische Ort für Q_2 und Q_3 von je zwei durch R_4 und R_5 gehenden Kreisen gebildet.

Für die weitere Behandlung der Aufgabe kann also als geometrischer Ort eines jeden der drei Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 wahlweise einer von zwei Kreisen angenommen werden; mithin zerfallen die sämtlichen Lösungen des Problems in acht gleich große Gruppen, entsprechend den acht Kombinationen von je dreien der Kreise $[K_1 K_2 K_3$, $K_1' K_2 K_3$, $K_1 K_2' K_3$, $K_1 K_2 K_3'$, $K_1' K_2' K_3$, $K_1' K_2 K_3'$, $K_1 K_2' K_3'$, $K_1' K_2' K_3']$.

Im Interesse einer exakten Vorstellung wird für die folgende Untersuchung eine beliebige, aber fest gewählte Gruppe herausgegriffen: Q_1, Q_2 und Q_3 sollen auf denjenigen drei Kreisen angenommen werden, deren Mittelpunkte auf dem positiven Teil der x-Achse liegen.

Durchläuft einer dieser Punkte Q_i den ihm zugeordneten Kreis, so wird seine Verbindungslinie mit dem gesuchten Punkt R_k durch einen festen Punkt P_{ik} des Kreises gehen müssen,

da der gegebene Winkel $R_4 Q_i R_5 = \varphi_{ik}$ als konstanter Peripheriewinkel auftritt und mithin über einer festen Sehne $R_4 P_{ik}$ stehen muß (Fig. 2).

So ist zunächst auf jeder der fünfzehn Ziellinien $Q_i R_k$ ein Punkt P_{ik} bekannt, der leicht zu konstruieren ist.

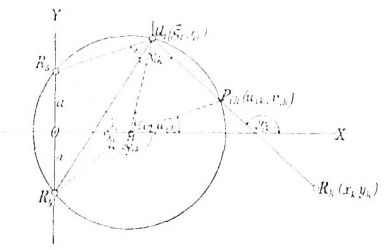

Fig. 2.

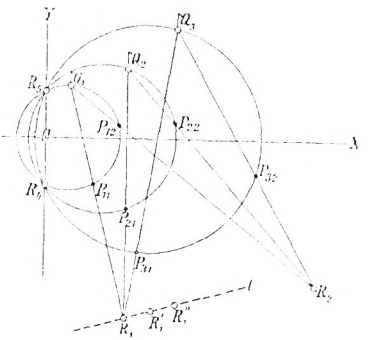

Fig. 3.

Es soll nun versucht werden, unter Benutzung der gegebenen Punkte R_4 und R_5 und der konstruierten Punkte P_{ik} zu einem beliebig angenommenen Punkt R_1 den Punkt R_2 zu konstruieren (Fig. 3).

Die Verbindungslinien $R_1 P_{11}$, $R_1 P_{21}$, $R_1 P_{31}$ liefern die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 als zweite Schnittpunkte mit den drei Kreisen. Dann sind $Q_1 P_{12}$, $Q_2 P_{22}$, $Q_3 P_{32}$ die Ziellinien nach R_2. Diese drei Ziellinien werden sich jedoch im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden. Es ist deshalb zu untersuchen, welcher Bedingung R_1 genügen muß, damit überhaupt ein zugehöriger Punkt R_2 existiert.

Wenn der Punkt R_1 eine beliebige Gerade l der Ebene durchläuft und dabei die Lagen R_1', R_1'' usw. annimmt, so entstehen drei perspektive Strahlenbüschel mit den Trägern P_{11}, P_{21}, P_{31}:

$$P_{11}(R_1 R_1' R_1'' \ldots) \wedge P_{21}(R_1 R_1' R_1'' \ldots) \wedge P_{31}(R_1 R_1' R_1'' \ldots).$$

Wenn hiebei Q_1 die Lagen Q_1', Q_1'' usw. annimmt, so sind die Büschel $P_{11}(Q_1 Q_1' Q_1'' \ldots)$ und $P_{12}(Q_1 Q_1' Q_1'' \ldots)$ kongruent und also projektiv.

Analoges gilt für die beiden anderen Kreise. Folglich sind folgende drei Strahlenbüschel zueinander projektiv:

$$P_{12}(Q_1 Q_1' Q_1'' \ldots) \wedge P_{22}(Q_2 Q_2' Q_2'' \ldots) \wedge P_{32}(Q_3 Q_3' Q_3'' \ldots).$$

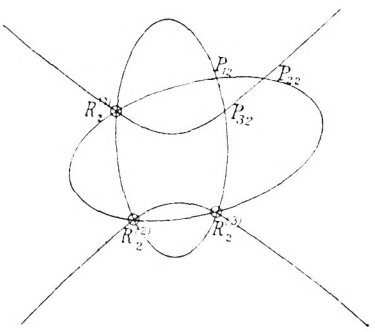

Fig. 4.

Da zwei projektive Strahlenbüschel als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt erzeugen, auf dem auch die beiden Träger der Büschel liegen, ergeben sich für R_2 drei geometrische Örter, nämlich drei Kegelschnitte, von denen jeder durch zwei von den drei Punkten P_{12}, P_{22}, P_{32} geht (Fig. 4). Weil sich in jedem weiteren Schnittpunkt zweier dieser Kegelschnitte entsprechende Strahlen aller drei Büschel schneiden, geht auch der dritte Kegelschnitt durch ihn hindurch. (Für die Punkte P_{i2} gilt dieser Schluß nicht.) Weil endlich je zwei der drei Kegelschnitte einen der Punkte P_{i2} gemeinsam haben, schneiden sie sich noch in weiteren drei Punkten $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$, $R_2^{(3)}$, welche die gemeinsamen Schnittpunkte aller drei Kegelschnitte sind.

Es gibt also drei Punkte $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)}$ der Geraden l, welchen überhaupt ein Punkt R_2 entspricht. Weil das für jede Gerade der Ebene gilt, liegen alle Punkte R_1, zu denen ein entsprechender Punkt R_2 existiert, auf einer Kurve 3. Ordnung.

Der Verlauf dieser Kurve 3. Ordnung muß nun studiert werden.

Wenn der Punkt R_1 in einen der Schnittpunkte der drei Kreise fällt (Fig. 3), etwa nach R_1', so fallen auch die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 nach R_1'. Die drei Zielstrahlen nach R_2, nämlich $Q_1 P_{12}$, $Q_2 P_{22}$, $Q_3 P_{32}$, schneiden sich dann ebenfalls in R_1'.

Zu einem Punkt R_1, der in einen Schnittpunkt der drei Kreise des Büschels fällt, existiert also ein zugehöriger Punkt R_2, und zwar fällt er mit R_1 zusammen in denselben Schnittpunkt.

Folglich sind die vier Schnittpunkte des Kreisbüschels, nämlich R_4, R_5 und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte U_1, U_2 Punkte der Kurve 3. Ordnung.

Fällt ferner R_1 in den Punkt P_{11}, so ist die Gerade $R_1 P_{11}$ unbestimmt; Q_1 kann ein beliebiger Punkt des ersten Kreises sein je nach der Richtung, in welcher R_1 nach P_{11} rückt; Q_2 und Q_3 dagegen sind bestimmte Punkte des zweiten und dritten Kreises. $Q_2 P_{22}$ und $Q_3 P_{32}$ schneiden sich in einem Punkt R_2, der, wie sogleich gezeigt wird, dem Punkt P_{11} entspricht. Denn verbindet man R_2 mit P_{12}, so erhält man den bisher unbestimmten Punkt Q_1; und dessen Verbindung mit P_{11} gibt die Richtung, in welcher R_1 nach P_{11} rücken muß, damit ein zugehöriger Punkt R_2 existiert.

P_{11} ist also ein Punkt der Kurve 3. Ordnung und ihre Tangente in ihm ist bekannt. Gleiches gilt für die Punkte P_{21} und P_{31}.

Mithin sind von der Kurve 3. Ordnung sieben Punkte R_4, R_5, U_1, U_2, P_{11}, P_{21}, P_{31} bekannt und in dreien von ihnen, nämlich P_{11}, P_{21}, P_{31}, auch die Tangenten an die Kurve. Das entspricht einer Kenntnis von zehn Punkten der Kurve, die folglich mehr als genügend bestimmt ist; und die auch dann hinreichend bestimmt ist, wenn zufällig neun von den Punkten in der speziellen Lage wären, in welcher sie die Schnittpunkte eines Kurvenbüschels sind. Das umständliche Ermitteln weiterer Punkte auf konstruktivem Weg ist keinesfalls notwendig.

Damit ist die Frage nach der Lage derjenigen Punkte R_1, zu welchen ein entsprechender Punkt R_2 existiert, erledigt. Soll nun ebenso einem Punkt R_1 ein Punkt R_3 entsprechen, in welchem sich die drei Strahlen $Q_1 P_{13}$, $Q_2 P_{23}$, $Q_3 P_{33}$ schneiden, so muß in vollständiger Analogie mit dem vorausgehenden R_1 auf einer zweiten Kurve 3. Ordnung liegen, welche, wenn auch mit anderen Tangentenrichtungen, durch dieselben sieben Punkte R_4, R_5, U_1, U_2, P_{11}, P_{21}, P_{31} geht. Die noch fehlenden zwei Schnittpunkte der beiden Kurven 3. Ordnung sind Lösungen des Problems, da ihnen sowohl ein Punkt R_2 als ein Punkt R_3 zugehört. Ihre Konstruktion führt auf eine Aufgabe 2. Grades

und wird mittels der Steinerschen Konstruktion der gemeinsamen Elemente von zwei projektiven Gebilden erledigt.

Ist ein Punkt R_1 eine Lösung der Aufgabe, so erfordert die Konstruktion der Punkte R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3 nur lineare Operationen. Im ganzen hat das Problem acht Gruppen von je zwei Lösungen, also sechszehn Lösungen, die mit Zirkel und Lineal gefunden werden können[1]).

Weil im vorliegenden Fall die beiden Kurven 3. Ordnung durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen, vereinfacht sich die Konstruktion der noch fehlenden zwei Schnittpunkte. Legt man durch die vier Schnittpunkte R_4, R_5, P_{11}, P_{21} der beiden Kurven 3. Ordnung ein Kegelschnittbüschel, so schneidet jeder Kegelschnitt dieses Büschels jede der beiden Kurven 3. Ordnung in noch zwei weiteren Punkten. Die Verbindungslinien dieser Punkte bilden zwei Strahlenbüschel, deren Träger S und S' je auf einer der Kurven 3. Ordnung liegen und die zu dem Kegelschnittbüschel und also auch untereinander projektiv sind. Ihr Erzeugnis ist also ein Kegelschnitt, auf welchem die Punkte S und S' liegen und welcher durch die noch übrigen fünf Schnittpunkte der beiden Kurven 3. Ordnung, nämlich P_{31}, U_1, U_2 und die beiden gesuchten Schnittpunkte hindurchgeht; dieser Kegelschnitt ist, weil er durch die unendlich fernen Kreispunkte U_1, U_2 geht, der durch S, S' und P_{31} gehende Kreis.

Die zu dieser Konstruktion notwendigen Punkte S und S' lassen sich mittels zweier zerfallender Kegelschnitte des Büschels, nämlich der Geradenpaare R_4P_{11}, R_5P_{21} und R_4P_{21}, R_5P_{11} erhalten. Diese schneiden jede der Kurven 3. Ordnung in zwei Punktepaaren, deren Verbindungslinien S bzw. S' zum Schnittpunkt haben. Um den dritten Schnittpunkt einer dieser Geraden, etwa von R_4P_{11} mit einer der Kurven 3. Ordnung zu finden, hat man auf die Untersuchung der Punkte R_1 einer Geraden l zurückzugreifen, welchen überhaupt ein Punkt R_2 entspricht. Da für alle Punkte von R_4P_{11} (mit Ausnahme von P_{11}) der Punkt Q_1 nach R_4 fällt, tritt die Gerade R_4P_{12}

[1]) Hierin sind auch die Nebenlösungen eingeschlossen, bei welchen an Stelle einzelner Winkel φ_i ihre Supplemente treten.

an die Stelle des ersten der drei bei dieser Frage auftretenden projektiven Strahlenbüschel mit den Trägern P_{12}, P_{22}, P_{32}, und nur die beiden letzten bestimmen einen Kegelschnitt, der durch R_4 geht. Dem zweiten Schnittpunkt dieses Kegelschnitts mit der Geraden $R_4 P_{12}$ entspricht als zugehöriger Punkt R_1 der dritte Schnittpunkt von $R_4 P_{11}$ mit der Kurve 3. Ordnung.

Legt man nun ein zweites Kegelschnittbüschel durch die vier Schnittpunkte R_4 R_5 P_{11} P_{31}, so liefert dieselbe Konstruktion einen zweiten Kreis, der den ersten in den zwei gesuchten noch fehlenden Schnittpunkten der beiden Kurven 3. Ordnung schneidet.

Im folgenden gebe ich einen analytischen Ansatz der Aufgabe, dessen vollständige Durchführung mir wegen rechnerischer Schwierigkeiten nicht gelungen ist, der aber immerhin gestattet, das Problem auf die Lösung einer Gleichung zurückzuführen.

Es sollen die Koordinaten von Q_i mit ξ_i, η_i, die von R_k mit x_k, y_k, die von P_{ik} mit u_{ik}, v_{ik} bezeichnet, außerdem die Richtungswinkel der nach Q_i und P_{ik} führenden Radien a_i bzw. μ_{ik} genannt werden (Fig. 2).

ϑ_{ik} sei der Richtungswinkel der Geraden $Q_i R_k$.

Nach dem Satz vom Peripheriewinkel ist

$$\sphericalangle R_1 M P_{ik} = 2\varphi_{ik};$$

also

$$\lambda_i + 2\varphi_{ik} = 180^0 + \mu_{ik}$$
$$\mu_{ik} = \lambda_i + 2\varphi_{ik} - 180^0.$$

Ferner ist

$$\sphericalangle M Q_i P_{ik} = \sphericalangle M P_{ik} Q_i = \mu_{ik} + 180^0 - \vartheta_{ik}$$
$$\sphericalangle Q_i M P_{ik} = a_i - \mu_{ik}.$$

Also ist die Winkelsumme im Dreieck $M Q_i P_{ik}$

$$2(\mu_{ik} + 180^0 - \vartheta_{ik}) + a_i - \mu_{ik} = 180^0$$
$$\mu_{ik} + 180^0 - 2\vartheta_{ik} + a_i = 0$$
$$\vartheta_{ik} = \tfrac{1}{2}(\mu_{ik} + a_i + 180^0)$$

oder mit Benützung des obigen Ausdrucks für μ_{ik}:

$$\vartheta_{ik} = \frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} + \varphi_{ik}.$$

Da der Radius des durch Q_i gehenden Kreises $r_i = \frac{a}{\sin \lambda_i}$ und die Abszisse seines Mittelpunktes $a \operatorname{cotg} \lambda_i$ bekannt sind, lassen sich jetzt die Koordinaten von Q_i und P_{ik} angeben:

$$\xi_i = a \operatorname{cotg} \lambda_i + \frac{a}{\sin \lambda_i} \cos \alpha_i$$

$$\eta_i = \frac{a}{\sin \lambda_i} \sin \alpha_i$$

$$u_{ik} = a \operatorname{cotg} \lambda_i + \frac{a}{\sin \lambda_i} \cos \mu_{ik} = \frac{a}{\sin \lambda_i} (\cos \lambda_i - \cos (\lambda_i + 2 \varphi_{ik}))$$

$$v_{ik} = \frac{a}{\sin \lambda_i} \sin \mu_{ik} = \frac{-a}{\sin \lambda_i} \sin (\lambda_i + 2 \varphi_{ik}).$$

Die Koordinaten von Q_i sind damit durch die Veränderliche α_i ausgedrückt; P_{ik} ist ein fester Punkt.

Es soll nun die Gleichung der Geraden $Q_i R_k$ aufgestellt, dabei aber nicht α_i selbst, sondern $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} = \tau_i$ als veränderlicher Parameter eingeführt werden.

$$\frac{y_k - v_{ik}}{x_k - u_{ik}} = \operatorname{tg} \vartheta_{ik} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} + \varphi_{ik} \right) = \frac{\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}}{1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}}$$

$$y_k (1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - x_k (\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}) = v_{ik} (1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - u_{ik} (\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}).$$

Durch Einsetzen von u_{ik} und v_{ik} und eine Reihe von trigonometrischen Umformungen der rechten Seite ergibt sich

$$1) \quad (y_k - a)(1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - x_k (\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}) + 2a (1 + \operatorname{cotg} \lambda_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) = 0.$$

Für die neun Geraden $Q_i R_k$ ergeben sich neun Gleichungen dieser Form mit den neun Unbekannten x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, τ_1, τ_2, τ_3. Um dieses Gleichungssystem zu reduzieren und aufzulösen, lassen sich zwei Wege beschreiten. Man kann zunächst dem Gedankengang der geometrischen Lösung folgen und in zwei Schritten zuerst die drei Veränderlichen τ_1, τ_2, τ_3, dann die vier Veränderlichen x_2, x_3, y_2, y_3 eliminieren. Hie-

durch erhält man mit Leichtigkeit in Determinantenform die Gleichungen der zwei Kurven 3. Ordnung, welche als geometrische Örter für den Punkt R_1 bereits bekannt sind. Jedoch die Aufstellung der Resultante 9. Grades dieser zwei kubischen Gleichungen, der Nachweis, daß sie reduzibel ist, und die Abspaltung der sieben Wurzelfaktoren, die den geometrisch bereits bekannten Schnittpunkten der beiden Kurven 3. Ordnung entsprechen, scheint äußerst umständlich zu werden.

Hier soll ein anderer Weg eingeschlagen werden. Bemerkt man, daß die zwei Veränderlichen x_k und y_k (für jeden bestimmten Wert von k) nur in drei Gleichungen und immer mitsammen vorkommen, so erhält man durch Elimination dieser drei Größenpaare drei Gleichungen zwischen τ_1, τ_2 und τ_3 von der folgenden Form:

$$2)\quad \begin{vmatrix} 1-\tau_1 \operatorname{tg} \varphi_{1k} & \tau_1+\operatorname{tg}\varphi_{1k} & 1+\operatorname{cotg}\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi_{1k} \\ 1-\tau_2 \operatorname{tg} \varphi_{2k} & \tau_2+\operatorname{tg}\varphi_{2k} & 1+\operatorname{cotg}\lambda_2 \operatorname{tg}\varphi_{2k} \\ 1-\tau_3 \operatorname{tg} \varphi_{3k} & \tau_3+\operatorname{tg}\varphi_{3k} & 1+\operatorname{cotg}\lambda_3 \operatorname{tg}\varphi_{3k} \end{vmatrix} = 0 \quad (k=1,2,3).$$

Durch Entwickeln nach Elementen der letzten Reihe ergibt sich:

$$2')\quad \begin{aligned} \sum (1+\operatorname{cotg}\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi_{1k}) \,[&(\tau_3-\tau_2)(1+\operatorname{tg}\varphi_{2k}\operatorname{tg}\varphi_{3k}) \\ &+(1+\tau_2\tau_3)(\operatorname{tg}\varphi_{3k}-\operatorname{tg}\varphi_{2k})] = 0 \end{aligned}$$

wobei die Summation nach zyklischen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 auszuführen ist.

Löst man diese drei Gleichungen (2') nach $1+\tau_2\tau_3$, $1+\tau_3\tau_1$, $1+\tau_1\tau_2$ auf, so erhält man ein Gleichungssystem von folgender Form:

$$3)\quad \begin{aligned} 1+\tau_2\tau_3 &= a_1(\tau_2-\tau_3)+a_2(\tau_3-\tau_1)+a_3(\tau_1-\tau_2) \\ 1+\tau_3\tau_1 &= b_1(\tau_2-\tau_3)+b_2(\tau_3-\tau_1)+b_3(\tau_1-\tau_2) \\ 1+\tau_1\tau_2 &= c_1(\tau_2-\tau_3)+c_2(\tau_3-\tau_1)+c_3(\tau_1-\tau_2). \end{aligned}$$

Diese Auflösung ist möglich, da, wie man sich leicht überzeugt, in der dabei auftretenden Nennerdeterminante z. B. der Koeffizient von $\operatorname{cotg}\lambda_1$ nicht verschwindet.

Die Einführung allgemeiner Koeffizienten a, b, c hat den Zweck, die umständliche Auflösung des Gleichungssystems (2') zu vermeiden; sie bringt jedoch den Übelstand mit sich, daß etwa vorhandene Relationen zwischen den Koeffizienten des aufgelösten Gleichungssystems und mithin auch zwischen den Wurzeln verloren werden können und auch tatsächlich verloren werden.

In jeder der Gleichungen (3) ist die Summe der Koeffizienten von τ_1, τ_2 und τ_3 Null; man kann also die Bezeichnung in folgender Weise ändern:

$$3') \qquad \begin{aligned} 1 + \tau_2\tau_3 &= (\alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 - \alpha_2\tau_2 - \alpha_3\tau_3 \\ 1 + \tau_3\tau_1 &= -\beta_1\tau_1 + (\beta_1 + \beta_3)\tau_2 - \beta_3\tau_3 \\ 1 + \tau_1\tau_2 &= -\gamma_1\tau_1 - \gamma_2\tau_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\tau_3 \end{aligned}$$

oder auch

$$3'') \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad 1 + \tau_2\tau_3 = \alpha_2(\tau_1 - \tau_2) + \alpha_3(\tau_1 - \tau_3) \\ &\text{b)}\quad 1 + \tau_3\tau_1 = \beta_1(\tau_2 - \tau_1) + \beta_3(\tau_2 - \tau_3) \\ &\text{c)}\quad 1 + \tau_1\tau_2 = \gamma_1(\tau_3 - \tau_1) + \gamma_2(\tau_3 - \tau_2). \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichung (b) von (a) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tau_3(\tau_2 - \tau_1) &= (-\beta_1 - \alpha_2)(\tau_2 - \tau_1) + \alpha_3(\tau_1 - \tau_3) - \beta_3(\tau_2 - \tau_3) \\ &= (-\beta_1 - \beta_3 - \alpha_2)(\tau_2 - \tau_1) + (\beta_3 - \alpha_3)(\tau_3 - \tau_1) \end{aligned}$$

$$\tau_3 = -(\beta_1 + \beta_3 + \alpha_2) + (\beta_3 - \alpha_3)\frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Ebenso ergibt sich durch Subtraktion der Gleichung (c) von (a):

$$\tau_2 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_3) + (\gamma_2 - \alpha_2)\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_3 - \tau_1}.$$

Durch Elimination von $\dfrac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$ erhält man:

$$[\tau_2 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_3)]\,[\tau_3 + (\beta_1 + \beta_3 + \alpha_2)] = (\beta_3 - \alpha_2)(\gamma_2 - \alpha_2)$$

oder

$$\tau_2\tau_3 + \tau_2(\beta_1 + \beta_3 + \alpha_2) + \tau_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_3) + A = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\Delta = \alpha_2\beta_3 + \beta_3\gamma_1 + \gamma_1\alpha_2 + \alpha_3\beta_1 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_2\alpha_3 + \beta_1\gamma_1 + \gamma_2\alpha_2 + \alpha_3\beta_3$$

gesetzt ist.

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten des Systems (3'), so ergibt sich:

$$4) \quad \tau_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \tau_2(\beta_1 + \beta_3) + \tau_3(\gamma_1 + \gamma_2) + \Delta - 1 = 0.$$

Mittels dieser linearen Gleichung können die Gleichungen (3') so umgeformt werden, daß jede nur zwei Veränderliche enthält:

$$5) \quad \begin{aligned} &\tau_2\tau_3 + (\alpha_2 + \beta_1 + \beta_3)\tau_2 + (\alpha_3 + \gamma_1 + \gamma_2)\tau_3 + \Delta = 0 \\ &\tau_3\tau_1 + (\beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)\tau_3 + \Delta = 0 \\ &\tau_1\tau_2 + (\gamma_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)\tau_2 + \Delta = 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander; eliminiert man nämlich aus zweien von ihnen die beiden gemeinsame Veränderliche, so erhält man die dritte Gleichung. Erst mit der linearen Gleichung (4) zusammen ergeben zwei beliebige von ihnen wieder ein Gleichungssystem, das den Gleichungen (3') äquivalent ist.

Nach diesen Umformungen kann man zur Elimination von zwei Veränderlichen τ_2 und τ_3 schreiten und eine Resultante in τ_1 aufstellen. Aus den beiden letzten Gleichungen (5) erhält man:

$$\tau_2 = -\frac{(\gamma_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + \Delta}{\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)}$$

$$\tau_3 = -\frac{(\beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + \Delta}{\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in (4) ein, so erhält man folgende Resultante in τ_1:

$$6) \quad \begin{aligned} &\tau_1(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{(\gamma_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + \Delta}{\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)}(\beta_1 + \beta_3) \\ &- \frac{(\beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau_1 + \Delta}{\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)}(\gamma_1 + \gamma_2) + \Delta - 1 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom 3. Grade und ergibt drei Lösungen der Aufgabe, indem sich zu jeder Wurzel der Gleichung (6) zunächst τ_2 und τ_3 und dann die übrigen sechs Unbekannten des Gleichungssystems (1) linear und eindeutig berechnen lassen.

Der Widerspruch mit der geometrischen Lösung, nach welcher die Resultante eine quadratische Gleichung sein müßte, ist bereits oben begründet worden; durch Einführung der allgemeinen Koeffizienten in (3) oder (3') ist das Problem verallgemeinert worden. Die hier gegebene analytische Lösung würde erst voll befriedigen, wenn es gelänge, die rechnerischen Schwierigkeiten zu überwinden und die Resultante auf den 2. Grad zu reduzieren.