

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft I

Januar- bis Märzszung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über den Taylorschen Lehrsatz für Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. März 1912.

In mehreren vor nahezu zwanzig Jahren von mir publizierten Arbeiten¹⁾ habe ich versucht, die Theorie der Taylorschen Reihe für Funktionen einer reellen Veränderlichen zu einem gewissen Abschlusse zu bringen, einmal durch Aufstellung einwandfreier und möglichst durchsichtig gearteter Beispiele von unbeschränkt differenzierbaren Funktionen, deren Taylorsche Entwicklung an vereinzelter oder auch an überall dicht liegenden Stellen entweder beständig divergent ausfällt oder aber konvergiert, ohne die erzeugende Funktion darzustellen; sodann, indem ich die bis dahin ausschließlich als hinreichend bekannten Gültigkeitsbedingungen des Taylorschen Satzes zu notwendigen und hinreichenden ergänzte.

¹⁾ 1. Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Math. Ann. 42 (1893), p. 153. — 2. Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen. Math. Ann. 44 (1894), p. 41. — 3. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen. Ebendas., p. 57. — 4. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Funktionen einer reellen Variablen nach der Taylorschen Reihe und über nichtentwickelbare Funktionen mit durchweg endlichen Differentialquotienten. Chicago Congress (1893), Math. Papers, p. 288.

Obschon ich das letztere, bei dem damaligen Stande der Frage immerhin einigermaßen überraschende Resultat¹⁾ mit verhältnismäßig einfachen (damals glaubte ich sogar mit den „denkbar einfachsten“) Hilfsmitteln gewonnen hatte, so ist es mir neuerdings gelungen, den wesentlichsten Teil der betreffenden Deduktion, nämlich den Beweis für die Notwendigkeit einer gewissen Bedingung so erheblich zu vereinfachen²⁾, daß er in seiner jetzigen Gestalt in jeder Elementar-Vorlesung über Differentialrechnung Platz finden könnte. Dieser vereinfachte Beweis bildet den Inhalt des ersten Paragraphen der folgenden Mitteilung. In § 2 gebe ich dann auch für den hinreichenden Charakter der fraglichen Bedingung einen nach meinem Dafürhalten durchaus neuen und zugleich äußerst einfachen Beweis, welcher, im Gegensatz zu dem bisherigen, nicht auf der Taylorsche Formel mit einem Restgliede, also schließlich auf dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung, vielmehr auf dem Satze beruht, daß eine Funktion mit verschwindendem vollständigen Differentialquotienten eine Konstante sein muß. Nun pflegt man zwar gewöhnlich diesen letzteren Satz als Folgerung aus dem erwähnten Mittelwertsatze herzuleiten. Indessen läßt er sich, wie hier ausdrücklich hervorgehoben werden möge, auch unabhängig davon und zwar merklich einfacher, als der Mittelwertsatz begründen, zu dessen strenger Herleitung ja der Weierstraßsche Satz über die Existenz eines größten bzw. kleinsten Wertes jeder in einem Intervalle stetigen Funktion oder ein diesen Satz umgehendes, immerhin einigermaßen künstliches Verfahren³⁾ erforderlich ist.

¹⁾ Vgl. die in der vorigen Fußnote unter Nr. 3 angeführte Abhandlung p. 61. (NB. Auf die ebengenannte Abhandlung beziehen sich auch die folgenden Zitate.)

²⁾ Bei dem früheren Beweise benützte ich insbesondere einen für Anfänger wohl ziemlich schwierigen Satz über gleichmäßige Konvergenz von Reihen, die nach Funktionen zweier Variablen fortschreiten. Vgl. a. a. O., p. 65, 80.

³⁾ Vgl. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (Leipzig 1909), p. 69 ff.

Besitzt nämlich $f(x)$ für $x_0 < x < X$ einen vollständigen, bei $x = x_0$ bzw. $x = X$ wenigstens einen rechten bzw. linken¹⁾, beständig verschwindenden Differentialquotienten, so läßt sich nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine Folge wachsender, mit x_0 beginnender Zahlen x_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) so auswählen, daß für $r = 1, 2, 3, \dots$ beständig:

$$\frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} < \varepsilon,$$

also schließlich:

$$f(x_r) - f(x_0) < \varepsilon \cdot x_r - x_0.$$

Bedeutet also x eine ganz beliebige, von x_0 verschiedene Stelle des betreffenden Intervalls, so hätte man analog:

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon \cdot x - x_0 < \varepsilon \cdot X - x_0,$$

d. h. schließlich:

$$f(x) = f(x_0),$$

falls es allemal möglich ist, das Intervall $(x_0 x)$ durch Einschaltung einer endlichen Anzahl von Zwischenwerten x_r ($r = 1, 2, \dots n$) in Teil-Intervalle $(x_{r-1} x_r)$ bzw. $(x_n x)$ zu zerlegen, derart daß für jedes derselben eine Ungleichung von der oben angegebenen Form besteht. Die Annahme des Gegenteils erweist sich aber auf Grund einer bekannten Schlußweise²⁾

¹⁾ Es würde offenbar auch genügen, bei $x = x_0$ bzw. $x = X$ die bloße Stetigkeit nach rechts bzw. links für $f'(x)$ vorauszusetzen.

²⁾ Es ist das diejenige Schlußweise, welche Heine (Journ. f. Math. 74 [1872], p. 188) zum Beweise der gleichmäßigen Stetigkeit einer punktweise stetigen Funktion angewendet hat und deren Resultat in etwas verallgemeinerter Form neuerdings als Heine-Borelsches Theorem bezeichnet zu werden pflegt. Im übrigen verdient bemerkt zu werden, daß der Beweis für die gleichmäßige Stetigkeit im wesentlichen schon ganz in derselben Form bei Dirichlet vorkommt, sofern die von G. Arendt herausgegebenen Vorlesungen über bestimmte Integrale (gehalten im Sommer 1854) als authentisch gelten dürfen (siehe a. a. O., p. 4—6). Dabei bezieht sich der von mir soeben gemachte beschränkende Zusatz: „im wesentlichen“ lediglich darauf, daß Dirichlet, statt mit Ungleichungen von der Form $|f(x_r) - f(x_{r-1})| < \varepsilon$, mit Gleichungen: $f(x_r) - f(x_{r-1}) = \pm \varepsilon$ operiert, so daß er also unnötigerweise

als unmöglich, sobald man in entsprechende Erwägung zieht, daß für jede innere Stelle des Intervalls auch ein rückwärts genommener, verschwindender Differentialquotient existiert.

Im übrigen möchte ich zur Vermeidung jedes Mißverständnisses bemerken, daß ich den von mir in § 2 gegebenen Beweis für die Entwickelbarkeit nach der Taylorschen Reihe nicht etwa als einen förmlichen Ersatz für den auf dem Mittelwertsatze beruhenden angesehen wissen will, da ja dieser letztere Satz zu den unentbehrlichsten Hilfsmitteln der Differentialrechnung gehört und zweifellos die natürlichste Grundlage für die Herleitung des Taylorschen Satzes bildet. Immerhin scheint mir der fragliche Beweis wegen seiner prinzipiellen Einfachheit ein gewisses ästhetisches Interesse zu besitzen.

Die auch schon in meiner früheren Arbeit und zwar dort¹⁾ mit Benützung des Lagrangeschen Restausdruckes erwiesene Möglichkeit, die in § 2 als notwendig und hinreichend erkannte Hauptbedingung noch in gewisser Weise zu reduzieren, wird in § 3 ohne diese Hilfsmittel, lediglich mit Verwendung bekannter Potenzreihen-Eigenschaften begründet. Der Vollständigkeit halber wird dann schließlich in § 4 die Beziehung der Cauchyschen und Lagrangeschen Restausdrücke zu der fraglichen Hauptbedingung in einer gegenüber der früher²⁾ gegebenen Darstellung noch etwas vereinfachter Form erörtert.

die Gültigkeit des sogenannten Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen voraussetzt. Selbstverständlich bleibt dadurch die bemerkenswerte Tatsache unberührt, daß das fragliche Beweisprinzip (samt dem fundamentalen Begriffe der gleichmäßigen Stetigkeit) schon in der genannten Dirichletschen Vorlesung sich findet.

¹⁾ A. a. O., p. 77.

²⁾ A. a. O., p. 73–76.

§ 1.

Eine Koeffizienten-Eigenschaft konvergenter Potenzreihen, welche eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Taylorschen Reihenentwicklung liefert.

Hilfssatz. Bedeutet x_0 eine beliebige reelle Zahl einschließlich der Null, x eine reelle Veränderliche und

$$(1) \quad S(x) = \sum_0^{\infty} c_r (x - x_0)^r$$

eine für $0 < |x - x_0| < R$ konvergierende Potenzreihe, so hat man bei beliebig angenommenem positiven $r < R$:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für:

$$0 < h < r.$$

Beweis. Nach Annahme von $r < R$ läßt sich $\delta > 0$ immer noch so fixieren, daß auch $r + \delta < R$ ausfällt, also $\sum_0^{\infty} c_r \cdot (r + \delta)^r$ noch (absolut) konvergiert. Infolgedessen bleiben die Zahlen $|c_r| \cdot (r + \delta)^r$ durchweg unter einer endlichen Schranke, etwa:

$$(3) \quad |c_r| \cdot (r + \delta)^r < g \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Setzt man sodann $x = x_0 \pm h$, wo $0 < h < r$, so wird:

$$S(x_0 \pm h) = \sum_0^{\infty} c_r (\pm h)^r$$

und daher:

$$S^{(n)}(x_0 \pm h) = \sum_n^{\infty} c_r (\pm 1)^r \cdot r(r-1) \dots (r-n+1) \cdot c_r h^{r-n}.$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} |S^{(n)}(x_0 \pm h)| &< \sum_0^{\infty} r \frac{(n+r)!}{n! \cdot r!} |c_{n+r}| \cdot h^r \\ &= \sum_0^{\infty} r \frac{(n+r)!}{n! \cdot r!} |c_{n+r}| \cdot (r+\delta)^{n+r} \cdot \left(\frac{h}{r+\delta}\right)^r \cdot \frac{1}{(r+\delta)^n} \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung von Ungleichung (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} |S^{(n)}(x_0 \pm h)| &< \frac{g}{(r+\delta)^n} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(n+r)!}{n! \cdot r!} \cdot \left(\frac{h}{r+\delta}\right)^r \\ &= \frac{g}{(r+\delta)^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{h}{r+\delta}\right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit der Gleichung

$$(r-h)^n = r^n \left(1 - \frac{h}{r}\right)^n,$$

so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} |S^{(n)}(x_0 \pm h)| \cdot (r-h)^n &< \frac{g}{1 - \frac{h}{r+\delta}} \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n \cdot \left(\frac{1 - \frac{h}{r}}{1 - \frac{h}{r+\delta}}\right)^n \\ &< \frac{g}{1 - \frac{r}{r+\delta}} \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n. \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n und zwar unabhängig von der Wahl des h beliebig klein wird, so folgt, wie behauptet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$.

Zusatz. Genügt irgend eine Funktion $f(x)$ einer Relation von der Form (2), d. h. hat man bei beliebigem $r < R$:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$, so gilt in demselben Umfange auch die Beziehung:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^{n-1} = 0.$$

Wird nämlich nach Annahme von $r < R$ eine Zahl $\delta > 0$ wieder so fixiert, daß auch noch $r + \delta < R$, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} |f^{(n)}(x_0 \pm h)| (r-h)^{n-1} &= \frac{1}{n!} |f^{(n)}(x_0 \pm h)| \cdot (r+\delta-h)^n \cdot \left(\frac{r-h}{r+\delta-h}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{r+\delta-h} \\ &< \frac{1}{n!} |f^{(n)}(x_0 \pm h)| \cdot (r+\delta-h)^n \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{\delta}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzung (4) läßt sich aber durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n erzielen, daß

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(x_0 \pm h)| \cdot (r+\delta-h)^n < \varepsilon$$

und sodann (nötigenfalls durch entsprechende Erhöhung dieser unteren Schranke) zugleich

$$\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{\delta} < 1$$

wird. Hieraus resultiert aber unmittelbar die Richtigkeit der Beziehung (5) in dem behaupteten Umfange.

Zugleich ist ohne weiteres ersichtlich, daß umgekehrt stets die Gültigkeit von Gleichung (4) aus der Voraussetzung (5) folgen würde.

§ 2.

Bedingungen, welche für die Gültigkeit der Taylorschen Reihenentwicklung notwendig und hinreichend sind.

Hauptsatz. Für die Darstellbarkeit der im Intervall $0 < h < R$ eindeutig definierten Funktion $f(x_0 + h)$ durch die Taylorsche Reihe

$$(6) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r$$

ist notwendig und hinreichend:

(A) daß $f(x)$ für jedes einzelne x des Intervalls $x_0 < x < x_0 + R$ endlich sei und für $x = x_0$ rechtsseitige, für $x_0 < x < x_0 + R$ vollständige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;

(B) daß bei beliebig angenommenem $r < R$ die Beziehung bestehe:

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (A) folgt unmittelbar aus den bekannten Grundeigenschaften jeder Potenzreihe, insbesondere also der Potenzreihe (6); diejenige der Bedingung (B) aus dem in § 1 bewiesenen Hilfssatze.

Um zu zeigen, daß die obigen Bedingungen sich auch als hinreichend erweisen, werde nach Annahme von $r < R$ wieder $\delta > 0$ so fixiert, daß auch noch $r + \delta < R$, so daß also infolge der Voraussetzung (7) die Beziehung besteht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r + \delta - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r + \delta$. Somit bleibt

$$\frac{1}{r!} |f^{(r)}(x_0 + h)| (r + \delta - h)^r$$

in dem ebenbezeichneten Umfange für alle möglichen r unter einer endlichen Schranke g , und man findet daher für $0 < h < r$:

$$\begin{aligned} \sum_n^{\infty} r! \left| \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^r \right| &= \sum_n^{\infty} r! \left| \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r + \delta - h)^r \right| \cdot \left(\frac{r - h}{r + \delta - h} \right)^r \\ &< g \cdot \left(\frac{r - h}{r + \delta - h} \right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{r - h}{r + \delta - h}} \\ &< g \cdot \left(\frac{r}{r + \delta} \right)^{n+1} \cdot \frac{r}{\delta}, \end{aligned}$$

d. h. beliebig klein durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n . Daraus folgt aber, daß die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^r$$

absolut und gleichmäßig konvergiert¹⁾ für alle h des Intervalls $0 < h < r$, und das nämliche gilt offenbar a fortiori für die Reihe

$$(8) \quad \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r,$$

wenn q dem Intervall $0 < q \leq r$ entnommen und h auf das Intervall $0 < h < q$ eingeschränkt wird²⁾.

Die Summe dieser Reihe, für jedes einzelne q als Funktion von h betrachtet, besitzt also einen bestimmten Differentialquotienten, und dieser kann durch gliedweise Differentiation nach h ermittelt werden, sobald sich zeigen läßt, daß die auf diese Weise entstehende Reihe in demselben Umfange gleichmäßig konvergiert, wie die erzeugende. Man findet nun:

$$\begin{aligned} & \sum_n^{n+p} \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r \right) \\ &= \sum_n^{n+p} \left\{ \frac{1}{r!} f^{(r+1)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r - \frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{r-1} \right\} \\ &= - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{n-1} + \frac{1}{(n+p)!} f^{(n+p+1)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{n+p} \end{aligned}$$

¹⁾ Man könnte offenbar auch diese Forderung, als völlig gleichwertig mit der Voraussetzung (B), von vornherein an deren Stelle einführen.

²⁾ Man kann sogar aus dem im Text Gesagten entnehmen, daß die Reihe (8) in Bezug auf die beiden Veränderlichen h und q gleichmäßig konvergiert für das Gebiet $0 \leq h \leq q \leq r$. Ich möchte aber ausdrücklich hervorheben, daß bei der im Texte gegebenen Deduktion, die Summe der Reihe (8) lediglich als Funktion der einzigen (stetigen) Veränderlichen h erscheint, während q die Rolle eines Parameters spielt und das Verhalten der fraglichen Reihensumme als Funktion von h nur für jeden einzelnen, dem Intervalle $0 < q < r$ angehörigen Parameterwert q in Betracht kommt.

und für $\lim p = +\infty$, mit Rücksicht auf den Zusatz des vorigen Paragraphen:

$$\left| \sum_n^r \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q-h)^r \right) \right| = \frac{1}{(n-1)!} |f^{(n)}(x_0 + h)| \cdot (q-h)^{n-1},$$

so daß, wieder mit Rücksicht auf den ebenerwähnten Zusatz, dieser Reihenrest für $0 < h < q$ durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n beliebig klein wird, die fragliche Reihe also in dem erforderlichen Umfange gleichmäßig konvergiert. Infolgedessen ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dh} \sum_0^r \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q-h)^r \\ &= \sum_0^r \frac{1}{r!} f^{(r+1)}(x_0 + h) \cdot (q-h)^r - \sum_1^r \frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q-h)^{r-1} = 0 \end{aligned}$$

und zwar für jedes einzelne positive $q < r$ und alle h des Intervalls $0 \leq h \leq q$. Daraus folgt aber, daß die Reihensumme

$$(8) \quad \sum_0^r \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q-h)^r$$

in dem eben genannten Umfange einen von h unabhängigen Wert hat, der also insbesondere zum Vorschein kommen muß, wenn man einmal $h = q$, das andere Mal $h = 0$ setzt, d. h. man findet:

$$(9) \quad f(x_0 + q) = \sum_0^r \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot q^r,$$

und da diese zunächst unter der Annahme $0 < q < r$ abgeleitete Gleichung offenbar auch noch für $q = 0$ gültig bleibt, so ergibt sich, wenn man schließlich noch h statt q schreibt, wie behauptet:

$$(6) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^r \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < r < R.$$

Zusatz I. Da der Wert der Reihensumme (8) auch für jedes beliebige positive $h < q$ ermittelt werden kann, indem man speziell $h = q$ setzt, so gewinnt man neben der Gleichung (9) noch die allgemeinere:

$$f(x_0 + \varrho) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (\varrho - h)^r \quad \text{für: } 0 \leq h \leq \varrho < R,$$

oder auch, wenn man $\varrho = h + k$ setzt:

$$(10) \quad f(x_0 + h + k) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot k^r \quad \text{für: } 0 \leq h < h + k < R.$$

Da andererseits aus (6) folgt:

$$f(x_0 + h + k) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (h + k)^r \quad \text{für: } 0 \leq h \leq h + k < R,$$

so ergibt sich auf diese Weise ohne jede Rechnung für die letzte nach Potenzen von $h + k$ fortschreitende Reihe die daraus „abgeleitete“, nach Potenzen von k fortschreitende.

Zusatz II. Der oben bewiesene Hauptsatz läßt sich offenbar in ganz analoger Weise für ein links von der Stelle x_0 gelegenes Intervall $x_0 - h$, wo wieder $0 < h < R$, begründen. Bei dem zuvor abgeleiteten Hilfssatze wurden von vornherein die beiden Intervalle $0 \leq h < R$ und $0 \geq -h > -R$ in Betracht gezogen, da es sich hier um gewisse Eigenschaften der Summe einer Potenzreihe handelte, in welchem Falle durch das Verhalten in dem einen jener beiden Intervalle das entsprechende Verhalten in dem anderen von vornherein vollständig bestimmt ist. Anders liegt die Sache, wenn es, wie bei dem Hauptsatze, auf die Darstellbarkeit einer irgendwie definierten Funktion durch eine Potenzreihe ankommt, da ja die erstere auf den beiden verschiedenen Seiten der Stelle x_0 ganz verschiedene Eigenschaften besitzen kann und durch die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung auf der einen Seite, z. B.

$$f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 \leq h < R$$

zwar die Konvergenz von $\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (-h)^r$, dagegen in keiner Weise die Gültigkeit der entsprechenden Entwicklung für $f(x_0 - h)$ präjudiziert wird. Es lassen sich sogar unbe-

schränkt differenzierbare analytische Ausdrücke $f(x)$ herstellen¹⁾, die nur auf einer Seite einer bestimmten Stelle x_0 durch die Taylorsche Reihe darstellbar sind.

Hiernach erscheint es aber angezeigt, die notwendigen Bedingungen für die Entwickelbarkeit nach der Taylorschen Reihe zunächst so zu formulieren, daß dabei nur auf einer Seite der betrachteten Stelle x_0 gewisse Eigenschaften verlangt werden. Die Übertragung des Resultates auf die andere Seite bzw. auf die zweiseitige Umgebung bietet dann keinerlei Schwierigkeit.

§ 3.

Herabsetzung der im vorigen Paragraphen als notwendig und hinreichend erkannten Bedingung (B).

Die im vorigen Paragraphen (in Verbindung mit der Eindeutigkeit, Endlichkeit und unbeschränkten Differenzierbarkeit) als notwendig und hinreichend erkannte Bedingung (B) gestattet noch eine gewisse Herabminderung in dem Sinne, daß es nicht erforderlich ist, sie in ihrem ganzen Umfange in die Voraussetzung aufzunehmen, um die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung nachweisen zu können. Mit anderen Worten, die fragliche Bedingung ist zwar zweifellos insofern eine notwendige, als die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung definitiv ausgeschlossen erscheint, sobald feststeht, daß irgendein Teil jener Bedingung nicht erfüllt ist. Dagegen reicht andererseits ein sogleich anzugebender Teil derselben schon aus, um ihre Existenz in dem ganzen (unter (B) angegebenen) Umfange zu sichern. Es soll nämlich jetzt gezeigt werden:

Ist $f(x)$ im Intervall $x_0 < x < x_0 + R$ eindeutig, endlich und (in dem § 2 unter (A) angegebenen Sinne) unbeschränkt differenzierbar, so gilt die Entwicklung:

$$f(x_0 + h) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < R,$$

¹⁾ Siehe Math. Ann. 44 (1893), p. 54.

wenn für jedes $r < R$ die Beziehung besteht:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot r^n = 0$$

und wenn, nach Annahme von $r < R$, für jedes $\varrho < R - r$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot \varrho^n = 0$$

wird und zwar gleichmäßig für $0 \leq h \leq \varrho$.

(Mit anderen Worten: wenn die früher als notwendig erkannte Bedingung (B) nur für den Anfangswert $h = 0$ vollständig erfüllt ist, so genügt es, wenn sie für die Zwischenwerte $0 < h \leq r$ in dem wesentlich beschränkteren Umfange (b) gesichert ist.)

Beweis. Die Bedingung (a) ist offenbar gleichwertig mit der Aussage, daß die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r$$

für jedes positive $h < R$ (absolut) konvergiert (da es ja wiederum freisteht in der Beziehung (a) jedes beliebige $r < R$ noch durch $r + \delta$ zu ersetzen, wo $r < r + \delta < R$).

Wird sodann nach Annahme von $r < R$ ein positives $\varrho < R - r$ fixiert und h vorläufig auf das Intervall $0 \leq h \leq \varrho$ beschränkt, so besteht infolge der Voraussetzung (b) a fortiori die Relation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (\varrho - h)^n = 0 \quad \text{für: } 0 \leq h \leq \varrho,$$

und daraus folgt auf Grund des im vorigen Paragraphen gegebenen Beweises die Gültigkeit der Beziehung

$$(11) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{zunächst für: } 0 \leq h \leq \varrho,$$

während andererseits die (absolute) Konvergenz dieser Reihe bereits für $0 \leq h \leq r$ feststeht.

Nun werde eine positive ganze Zahl m so groß angenommen, daß:

$$\frac{r}{m+1} < \varrho$$

und daher:

$$(12) \quad \varrho' = \frac{r - \varrho}{m} < \varrho.$$

Schreibt man jetzt in Gleichung (11) $\varrho' + h$ statt h , so gilt die Entwicklung

$$(13) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_r \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (\varrho' + h)^r \quad \text{für: } 0 < h < \varrho - \varrho',$$

während wiederum die betreffende Reihe für $0 < \varrho' + h < R$, also insbesondere für $0 < h < R - \varrho'$ absolut konvergiert und daher in demselben Umfange nach dem gewöhnlichen („Cauchy-schen“) Doppelreihensatze in eine absolut konvergierende Reihe nach Potenzen von h , etwa $\sum_0^\infty c_r h^r$ umgeformt werden kann, so daß also

$$(14) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_0^\infty c_r h^r \quad \text{für: } 0 < h \leq \varrho - \varrho'$$

wird.

Andererseits ergibt sich aber, wenn man von der Stelle $x_0 + \varrho'$ ausgeht, durch dieselbe Schlußweise, welche oben die Beziehung (11) lieferte, die Entwicklung:

$$(15) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + \varrho') \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < \varrho,$$

und die Vergleichung mit Gleichung (14) zeigt dann, daß die dort mit $\sum_0^\infty c_r h^r$ bezeichnete Reihe mit der letztgenannten identisch sein muß, daß sich demnach der Gültigkeitsbereich der Beziehung (14) auf das erweiterte Intervall $0 < h \leq \varrho$ erstreckt. Da aber die Konvergenz¹⁾ der Reihe (13), sowie

¹⁾ Hierauf liegt der Nachdruck. Denn man könnte aus der bloßen Erweiterung des Konvergenzbereiches der Reihe $\sum_0^\infty c_r h^r$ (Gleichung)(14),

ihre Gleichwertigkeit mit der Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (14) auch für diesen erweiterten Bereich bereits feststeht, so erstreckt sich nunmehr auch die Gültigkeit der Relation (13) auf jenes Intervall $0 < h < \varrho$ und man findet daher, wenn man auf die ursprüngliche Entwicklungsform (11) zurückgeht:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < \varrho + \varrho'.$$

Schreibt man hier, analog wie oben, $2\varrho' + h$ statt h , so gilt zunächst:

$$(16) \quad \left. \begin{aligned} f(x_0 + 2\varrho' + h) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (2\varrho' + h)^r \\ &= \sum_0^{\infty} c_r h^r \end{aligned} \right\} \quad \text{für: } 0 < h < \varrho - \varrho',$$

während die Vergleichung mit der für $0 < h < \varrho$ geltenden Entwicklung

$$(17) \quad f(x_0 + 2\varrho' + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + 2\varrho') \cdot h^r$$

wiederum die Gültigkeit der Beziehung (16) für dieses weitere Intervall $0 < h < \varrho$ liefert und somit der Gültigkeitsbereich der Beziehung (11) sich jetzt auf das Intervall $0 < h < \varrho + 2\varrho'$ erstreckt. Durch m malige Anwendung dieser Schlußweise gelingt es also, jenen Gültigkeitsbereich auf das Intervall $0 < h < \varrho + m\varrho' = r$ auszudehnen, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Zusatz. Die Bedingung (b) läßt sich auch durch die folgende ersetzen: Es muß, nach Annahme von $r < R$,

$$\frac{1}{n!} \cdot |f^{(n)}(x_0 + h)| \cdot \varrho_0^n$$

welche sich ja auch ohne jede sonstige Voraussetzung (d. h. insbesondere ohne die Voraussetzung (a)) aus der erweislichen Identität mit der Reihe (15) ergeben würde, keinen Schluß auf eine entsprechende Erweiterung für den Konvergenzbereich der Reihe (13) ziehen.

für ein gewisses $\varrho_0 < R - r$ und $0 < h < \varrho_0$ unter einer endlichen Schranke bleiben, etwa:

$$(c) \quad \frac{1}{n!} \cdot |f^{(n)}(x_0 + h)| \cdot \varrho_0^n < g.$$

Denn offenbar folgt (c) für $\varrho_0 < \varrho$ ohne weiteres aus (b). Nimmt man andererseits $\varrho < \varrho_0$, so folgt auch umgekehrt (b) aus (c).

§ 4.

Das Cauchysche und das Lagrangesche Restglied.

Nach Gleichung (5) (p. 142) kann man der als notwendig für die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung von $f(x_0 + h)$ erkannten Bedingung die Form geben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r-h)^{n-1} = 0 \quad (\text{gleichmäßig für: } 0 < h < r).$$

Setzt man hier:

$$h = \vartheta r, \quad \text{wo also: } 0 < \vartheta < 1, \quad r < R,$$

so geht sie, wenn man noch den offenbar irrelevanten Faktor r hinzufügt, in die folgende über:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta r) \cdot (1-\vartheta)^{n-1} \cdot r^n = 0$$

oder, wenn man schließlich noch h statt r schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1-\vartheta)^{n-1} \cdot h^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für jedes einzelne positive $h < R$ und alle dem Intervall $0 < \vartheta < 1$ angehörigen ϑ .

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber den Grenzwert des bekannten Cauchyschen Restgliedes vor, dessen Verschwinden in dem bezeichneten Umfange also eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Taylorschen Satzes bildet (die dann, in Verbindung mit der Endlichkeit

und unbeschränkten Differenzierbarkeit von $f(x)$ für $x_0 < x < R$, mit Hilfe des Mittelwertsatzes leicht auch als hinreichend erkannt wird¹⁾.

Etwas analoges findet für das Lagrangesche Restglied

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n$$

nicht statt. Hier ist die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für: } 0 < h < R \\ \text{und gleichmäßig für: } 0 \leq \vartheta < 1 \end{array} \right.$$

zwar hinreichend, aber in dem bezeichneten Umfange nicht notwendig.

Setzt man nämlich die als notwendig erkannte Bedingung (B) (p. 144, Gleichung (7)) in die Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot h^n = 0 \quad (\text{gleichmäßig für: } 0 < h < h + k < r)$$

und versteht wieder unter ϑ jede Zahl des Intervalls $0 < \vartheta < 1$, so folgt zunächst, daß die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n = 0$$

jedenfalls erfüllt sein muß für $0 < 2h < r$, d. h. schließlich für $0 < h < \frac{R}{2}$ und zwar gleichmäßig für $0 < \vartheta < 1$.

Somit liefert das Verschwinden des Lagrangeschen Restgliedes eine notwendige Bedingung, solange $0 \leq h < \frac{R}{2}$.

Daß dies aber schon nicht mehr zutrifft, falls $h = \frac{R}{2}$ (und um so mehr für $h > \frac{R}{2}$), zeigt ein Blick auf das einfache Beispiel:

¹⁾ Vgl. a. a. O., p. 73.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \left(\text{also: } f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right).$$

In diesem Falle wird für $x_0 = 0$ (also $R = 1$) und für $\theta = 1$:

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right) \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^n = 2$$

bei beliebigem n , somit auch für $\lim n = \infty$ von Null verschieden. Für $h > \frac{R}{2}$ (d. h. $h > \frac{1}{2}$) wird der entsprechende Grenzwert sogar unendlich groß.
