Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung vom 2. Dezember 1911.

Bekanntlich hat Euler in dem „De transformatione serierum“ überschriebenen Kapitel seiner Differentialrechnung[1]) sich der Transformation $x = \frac{y}{1+y}$ bedient, um eine Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ insbesondere auch für Divergenz-Stellen x zu „summieren“, präziser gesagt, in eine andere Reihe zu transformieren, welche nach heutiger Ausdrucksweise die analytische Fortsetzung der ursprünglichen darstellt[2]). In der Tat erweist sich die fragliche Transformation in einer Anzahl zwar verhältnismäßig spezieller, jedoch besonders wichtiger und markanter Fälle als ein überaus einfaches und wirksames Hilfsmittel, um die analytische Fortsetzung einer Potenzreihe zu studieren, zumal wenn man statt der oben angegebenen die (im folgenden ebenfalls schlechthin als „Eulersche“ Transformation bezeichnete) etwas allgemeinere Form $x = \frac{sy}{1+y}$ zu Grunde legt, unter s eine beliebige Konstante bzw. einen veränderlichen Parameter verstanden. Auf den Nutzen dieser Methode habe ich bereits vor einer längeren Reihe von Jahren aufmerksam gemacht[3]), veröffentlichte jedoch damals lediglich aus einer ganz bestimmten Veranlassung ein auf diese letztere

[1]) Institutiones calculi differentialis. Pars posterior, Caput I. (In der Petersburger Ausgabe von 1755, p. 281 ff.)

[2]) Die Eulerschen Schlüsse lassen sich, auch bei Beschränkung von x auf das reelle Gebiet und ohne Benützung des Begriffes der analytischen Fortsetzung, durch Herstellung eines passenden Restgliedes legitimieren; s. Poncelet, Journ. f. Math. 13 (1835), p. 1 ff.

[3]) Math. Ann. 50 (1898), p. 458.

bezügliches Einzelergebnis, während ich von der vollständigen Durchführung und Publikation der im Anschlusse hieran bereits angekündigten allgemeineren Untersuchungen Abstand nahm, da ungefähr um dieselbe Zeit die Herren Fabry[1]) und Lindelöf[2]), völlig unabhängig von mir und wohl auch voneinander, auf die Benützung desselben Grundgedankens verfallen waren. Erst aus Anlaß der von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1907 veranstalteten Euler-Festsitzung kamen mir diese Untersuchungen wieder in Erinnerung, und eine kurze Darstellung ihrer wesentlichsten Ergebnisse bildete den Inhalt eines bei dieser Gelegenheit von mir gehaltenen Vortrages. Die betreffenden Resultate sind nun freilich in der Zwischenzeit, seit ich die genannten Untersuchungen begonnen, zumeist auch auf anderen Wegen gewonnen, zum Teil sogar durch allgemeinere überholt worden. Dagegen scheint mir die fragliche Methode bisher noch niemals genügend ausgenützt, andererseits allerdings in Bezug auf ihre Tragweite gelegentlich auch überschätzt worden zu sein. Aus diesem Grunde hielt ich es für zweckmäßig, einmal ihre wichtigsten Anwendungen in ausführlicher und systematischer Darstellung zusammenzufassen. Geschah dies zunächst auch nur für die Zwecke einer im laufenden Semester von mir abgehaltenen Vorlesung, so hoffe ich immerhin, daß diese Darstellung auch für weitere Kreise einiges Interesse bieten dürfte, als ein modernisiertes Kapitel „De transformatione serierum“, in welchem eine Reihe bemerkenswerter und für die Funktionenlehre charakteristischer Sätze, mögen dieselben im wesentlichen auch schon mit verschiedenartigen anderen, meist komplizierteren Hilfsmitteln gefunden worden sein, aus einem völlig einheitlichen Prinzip in möglichst elementarer Weise hergeleitet werden.

Zu einer vorläufigen Orientierung über den Gang und die Ziele dieser Abhandlung diene im übrigen die folgende Inhalts-Übersicht.

---

[1]) Par. C. R. 125 (1897), p. 1086. — Journ. de Math. (5), 4 (1898), p. 317 ff.

[2]) Par. C. R. 126 (1898), p. 632. — Acta Soc. Fennicae 24 (1898), Nr. 7, p. 6 ff.

Inhalts-Übersicht.

§ 1. Der Konvergenzbereich der Eulerschen Transformation.

1. Die Form der Koeffizienten.
2. Die verschiedenen Möglichkeiten für die Gestaltung des Konvergenzbereichs.
3. Allgemeine Bemerkungen über die Tragweite der Eulerschen Transformation.

§ 2. Eindeutige Funktionen mit einer einzigen Singularität bzw. einer endlichen Anzahl singulärer Stellen.

1. Reihen von der Form $\sum \nu^{\varkappa} \cdot x^{\nu}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$.
2. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \cdot x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ eine ganze rationale Funktion.
3. Digression über die Herstellung ganzer transzendenter Funktionen mit vorgeschriebenen Werten.
4. Fortsetzung.
5. Ein Hilfssatz aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen.
6. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \cdot x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ eine höchstens dem Minimaltypus der 1ten Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion bedeutet.
7. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \,.\, x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ einem Typus $\gamma > 0$ der 1ten Ordnung angehört.
8. Besonderer Fall eines Hadamardschen Satzes über die Singularitäten einer Reihe von der Form $\sum a_{\nu}\, b_{\nu}\, x^{\nu}$.

§ 3. Funktionen, welche in der Ebene mit dem geradlinigen Schnitte $(1 \cdots + \infty)$ regulär sind.

1. Koeffizienten-Bedingung für das reguläre Verhalten einer analytischen Funktion in der längs $(1 \cdots + \infty)$ zerschnittenen Ebene.
2. Reihen von der Form $\sum (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^{\nu}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$.
3. Reihen von der Form $\sum \mathfrak{P}\left(\dfrac{1}{\nu - a}\right) \cdot x^{\nu}$.
4. Reihen von der Form $\sum \int\limits_0^1 \varphi(t) \cdot t^{p+\nu} \cdot dt \,.\, x^{\nu}$.
5. Anderer Beweis für die Fundamental-Eigenschaften der in Nr. 4 betrachteten Reihen.

§ 4. Über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit den Anfangs-Elementen $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ und $\sum a_\nu x^\nu$, $\sum b_\nu x^\nu$.

1. Andere Auffassung der Eulerschen Transformation.
2. Verallgemeinerung der Eulerschen Transformation zur Darstellung von Reihen der Form $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$.
3. Der Satz über die Zusammensetzung der Singularitäten für den besonderen Fall, daß a_ν eine höchstens dem Minimaltypus der 1ten Ordnung angehörige ganze Funktion ist.
4. Über die Unmöglichkeit, den Satz in seiner Allgemeinheit lediglich mit Hilfe der in Nr. 2 angegebenen Transformation zu beweisen.
5. Behandlung eines weiteren besonderen Falles des fraglichen Satzes.

§ 5. Potenzreihen, welche den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben.

1. Herstellung einer zweckmäßigen hinreichenden Bedingung für den singulären Charakter einer beliebigen Stelle des Konvergenzkreises.
2. Fortsetzung.
3. Reihen von der Form $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$, wo $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{m_{\nu+1} - m_\nu}{m_\nu} > 0$.
4. Reihen von der Form $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$, wo $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{m_\nu}{\nu} = \infty$.

§ 1.

Der Konvergenzbereich der Eulerschen Transformation.

1. Es besitze die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu \tag{1}$$

einen endlichen Konvergenzradius, welcher ja dann ohne wesentliche Beschränkung $= 1$ angenommen werden kann. Ferner werde mit s eine von 0 verschiedene, im übrigen ganz beliebig zu denkende komplexe Zahl bezeichnet und eine neue Variable z durch die Substitution eingeführt:

$$x = \frac{s\,z}{1+z}, \qquad \text{also: } z = \frac{x}{s-x}, \tag{2}$$

so daß also aus (1) resultiert:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \left(\frac{s\,z}{1+z}\right)^\nu = (1+z)\cdot \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu s^\nu z^\nu \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\nu+1}. \tag{3}$$

Diese Reihe konvergiert in der vorliegenden Anordnung dann und nur dann, wenn[1]):

$$\left|\frac{s\,z}{1+z}\right| < 1, \qquad \text{also: } \left|\frac{1}{z}+1\right| > |s|, \tag{4}$$

und die letztere Beziehung ist offenbar a fortiori erfüllt, wenn:

$$\left|\frac{1}{z}\right| - 1 > |s|, \quad \text{d. h. } |z| < \frac{1}{1+|s|}, \tag{5}$$

also für alle z im Innern eines Kreises um $z = 0$ mit dem

[1]) Hätte die Reihe (1) statt des Konvergenzradius 1 den Konvergenzradius R, so würden an die Stelle der Ungleichungen (4) und (5) die folgenden treten:

$$\left|\frac{x}{R}\right| = \left|\frac{\frac{s}{R}\cdot z}{1+z}\right| = \left|\frac{s\,z}{R+R\,z}\right| < 1, \qquad |z| < \frac{R}{R+|s|},$$

und alle weiteren Schlüsse bleiben bis auf die hieraus erwachsende Modifikation unverändert.

Radius $\varrho_0 = \frac{1}{1+|s|}$. Da für den auf der Peripherie dieses Kreises liegenden Punkt $z = -\frac{1}{1+|s|}$ sich ergibt:

$$|x| = \left| \frac{-s}{(1+|s|)\left(1 - \frac{1}{1+|s|}\right)} \right| = \left| \frac{-s}{s} \right| = 1,$$

so ist unter allen möglichen Kreisen um den Punkt $z = 0$, welche ganz in den durch Ungleichung (4) definierten wahren Konvergenzbereich der Reihe (3) fallen, der durch Ungleichung (5) definierte der größte.

Entwickelt man die Glieder der Reihe (3) nach Potenzen von z, so wird zunächst:

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^{\nu+1} = \sum_0^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda \cdot (\nu+\lambda)_\lambda \cdot z^\lambda = \sum_0^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda (\nu+\lambda)_\nu \cdot z^\lambda,$$

wo:

$$(\nu+\lambda)_\lambda = \frac{(\nu+\lambda)!}{\lambda!\ \nu!} = (\nu+\lambda)_\nu,$$

und daher:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+z) \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu s^\nu \sum_0^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda (\lambda+\nu)_\nu \cdot z^{\lambda+\nu} \\ (6) \qquad &= (1+z) \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu s^\nu \cdot \sum_\nu^\infty{}^\lambda (-1)^{\lambda-\nu} (\lambda)_\nu \cdot z^\lambda. \end{aligned}$$

Da die Reihe (3), also auch (6), für $|z| \leq \varrho' < \frac{1}{1+|s|}$ gleichmäßig konvergiert, so gestattet der Weierstraßsche Doppelreihen-Satz, die Reihe (6) nach Potenzen von z zu ordnen, etwa:

$$f(x) = (1+z) \cdot \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot z^\lambda \qquad \left(\text{für: } |z| < \frac{1}{1+|s|}\right),$$

also, nach Rücksubstitution von x:

$$(7) \quad f(x) = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda \quad \left(\text{für: } \left|\frac{x}{s-x}\right| < \frac{1}{1+|s|}\right)$$

Für die Bestimmung des Koeffizienten $A_\lambda(s)$ von z^λ ist maßgebend, daß nur diejenigen Glieder der Reihe (6) einen Beitrag mit dem Faktor z^λ liefern, für welche $\lambda > \nu$, also $\nu < \lambda$, so daß sich ergibt:

$$(8)\quad A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^{\lambda-\nu} (\lambda)_\nu a_\nu s^\nu = \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu (\lambda)_\nu a_{\lambda-\nu} s^{\lambda-\nu}$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ (also insbesondere $A_0(s) = a_0$).

Der vorläufige Konvergenz- und Gültigkeitsbereich der Entwickelung (7) ist durch die Beziehung

$$(9)\qquad \left|\frac{x}{s-x}\right| < \frac{1}{1+|s|}$$

gegeben. Der wahre Konvergenzradius ϱ resultiert andererseits aus der Gleichung:

$$(10)\qquad \frac{1}{\varrho} = \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|},$$

so daß also unter allen Umständen die Relation besteht:

$$(11)\qquad \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} \leqq 1 + |s|.$$

2. Um die Gestalt eines durch eine Beziehung von der Form

$$\left|\frac{x}{s-x}\right| < \varrho$$

charakterisierten Bereiches zu erkennen, gewinnt man durch die Substitution:

$$x = \xi + \eta i \qquad s = \sigma + \tau i,$$

je nachdem $\varrho \lesseqgtr 1$, eine der folgenden drei Beziehungen:

$$(12\text{a})\quad \left(\xi + \frac{\varrho^2\sigma}{1-\varrho^2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\varrho^2\tau}{1-\varrho^2}\right)^2 < \left(\frac{\varrho\cdot|s|}{1-\varrho^2}\right)^2, \quad \text{wenn: } \varrho < 1,$$

$$(12\text{b})\qquad \sigma\xi + \tau\eta < \frac{|s|^2}{2} \qquad\qquad \text{,, } \varrho = 1,$$

$$(12\text{c})\quad \left(\xi - \frac{\varrho^2\sigma}{\varrho^2-1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\varrho^2\tau}{\varrho^2-1}\right)^2 > \left(\frac{\varrho\cdot|s|}{\varrho^2-1}\right)^2 \qquad \text{,, } \varrho > 1.$$

Für den speziellen Fall: $\varrho = \dfrac{1}{1 - |s|}$ nimmt zunächst Ungleichung (12a) die Form an:

$$\left(\xi + \frac{\sigma}{|s| \cdot (2 + |s|)}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\tau}{|s| \cdot (2 + |s|)}\right)^2 < \left(\frac{1 + |s|}{2 + |s|}\right)^2,$$

somit ist der durch Ungleichung (9) definierte Minimal-Konvergenzbereich der Reihe (7) das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte:

$$c = \frac{1}{2 + |s|} \cdot \frac{-s}{|s|}$$

und mit dem Radius:

$$r = \frac{1 + |s|}{2 + |s|}.$$

Da c den absoluten Betrag $\dfrac{1}{2 + |s|} < r$ und den Richtungskoeffizienten $\dfrac{-s}{|s|}$ besitzt, so liegt einerseits der Punkt $x = 0$ im Innern des Kreises, andererseits der Mittelpunkt c auf der rückwärtigen Verlängerung des Strahles $0s$. Da ferner:

$$|c| + r = 1,$$

so berührt der betreffende Kreis, den wir kurz als den Kreis (c, r) bezeichnen wollen, den Kreis $|x| = 1$ im Punkte $x = \dfrac{-s}{|s|}$ von innen und schneidet den Strahl $\overline{0s}$ noch in einem Punkte b, dessen Entfernung vom Nullpunkte durch die Beziehung

$$|b| = r - |c| = \frac{|s|}{2 + |s|} < |s|$$

gegeben ist. Der Punkt s liegt also außerhalb des Kreises.

Jener Kreis (c, r) ist aber offenbar dann der wahre Konvergenzbereich der Reihe (7), falls die Stelle $\dfrac{-s}{|s|}$ eine singuläre für $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$ ist. Aber auch nur in diesem Falle. Ist nämlich $f(x)$ regulär im Punkte $x = \dfrac{-s}{|s|}$, so gilt offenbar das gleiche für $f\left(\frac{s z}{1+z}\right)$ als Funktion von z in dem entsprechenden Punkte:

$$z = \left(\frac{x}{s-x}\right)_{x=\frac{-s}{|s|}} \qquad \text{d. h. } z = -\frac{1}{1+|s|}.$$

Dann muß aber der wahre Konvergenzbereich der Reihe $\sum A_\lambda(s)\cdot z^\lambda$, der sich ja bis zu einem Grenzpunkte des Regularitätsbereiches von $f\left(\frac{s z}{1+z}\right)$ zu erstrecken hätte, einen Radius besitzen, der größer als $\frac{1}{1+|s|}$ ist.

Hieraus gewinnt man mit Rücksicht auf die Beziehung (10) unmittelbar das folgende wichtige Ergebnis:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $x = \frac{-s}{|s|}$ ein singulärer für $\sum a_\nu x^\nu$ ist, lautet:

$$\text{(13)} \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1 + |s|.$$

Und, wenn man speziell $s = -e^{\varphi i}$ setzt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $x = e^{\varphi i}$ ein singulärer für $\sum a_\nu x^\nu$ ist, besteht in der Beziehung:

$$\text{(14)} \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(-e^{\varphi i})|} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \left|\sum_0^\lambda{}_\nu (\lambda)_\nu a_\nu e^{\nu\varphi i}\right|^{\frac{1}{\lambda}} = 2.$$

Ist nun $\varrho > \frac{1}{1+|s|}$, aber immerhin noch $\varrho < 1$, so tritt an die Stelle des Kreises (c, r) ein Kreis (c', r') mit den Bestimmungsstücken:

$$\text{(15)} \qquad c' = -\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}\cdot s \qquad r' = \frac{\varrho}{1-\varrho^2}\cdot |s|$$

und der oben mit b bezeichnete Schnittpunkt rückt auf dem Strahle $0s$ nach derjenigen Stelle b', welche bestimmt wird durch die Beziehung:

$$(16)\qquad |b'| = r' - |c'| = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot |s| < \tfrac{1}{2}|s|.$$

Zugleich muß aber

$$|b'| \leq 1$$

sein, da anderfalls der Einheitskreis ganz in das Innere des Kreises (c', r') fiele, somit nicht der wahre Konvergenzbereich von $\sum a_\nu x^\nu$ wäre. Darnach muß also stets sein:

$$\frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot |s| < 1,$$

d. h.

$$(17)\qquad \frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} > |s| - 1.$$

Diese Beziehung gibt somit im Falle $|s| > 1$ eine obere Schranke für den Konvergenzradius ϱ (so daß in diesem Falle

$$\left. \frac{1}{|s|+1} < \varrho < \frac{1}{|s|-1} \right).$$

Im Falle $|s| < 1$ findet eine analoge Beschränkung nicht statt, da ja dann ohne weiteres

$$|b'| = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot |s| < 1$$

ausfällt.

Läßt man in Gleichung (15) ϱ gegen 1 konvergieren, so wird $r' = \infty$, während gleichzeitig der Mittelpunkt c' auf der rückwärtigen Verlängerung von $\overline{0s}$ ins Unendliche rückt und (s. Gl. (16)) $|b'| = \frac{1}{2}|s|$ wird. Der Kreis artet also in diesem Falle in eine Gerade aus, welche auf $\overline{0s}$ im Halbierungspunkte senkrecht steht. Als Konvergenzbereich der Reihe (7) erscheint dann diejenige von der genannten Geraden begrenzte Halbebene, welche den Punkt $x = 0$ enthält.

Genau dasselbe Resultat würde sich offenbar aus der auf den Fall $\varrho = 1$ bezüglichen Gleichung (12b) ergeben.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten des Falles $\varrho = 1$, also für die Konvergenz der Entwickelung (7) in einer den Punkt $x = 0$ enthaltenden Halbebene ergibt sich sodann nach Gleichung (10) die Beziehung:

$$\text{(18)} \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1,$$

welche offenbar insbesondere stets dann befriedigt wird, wenn die $|A_\lambda(s)|$ unter einer endlichen Schranke bleiben.

In dem noch übrig bleibenden Falle $\varrho > 1$ konvergiert nach Gleichung (12c) die Reihe (7) für alle x außerhalb des Kreises (c', r') mit den Bestimmungsstücken:

$$\text{(19)} \qquad c' = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cdot s \qquad r' = \frac{\varrho}{\varrho^2 - 1} \cdot |s|.$$

Der Mittelpunkt c' liegt jetzt also auf der (direkten) Verlängerung des Strahles $\overline{0s}$ und zwar um so entfernter, je weniger ϱ die Einheit übersteigt. Das Konvergenzgebiet enthält (wegen: $|c'| = \varrho \cdot r' > r'$) den Nullpunkt, zugleich aber auch den Punkt $x = \infty$, während der Punkt s wieder außerhalb liegt (nämlich, wegen:

$$|c'| - r' = \frac{\varrho}{\varrho + 1} \cdot |s| < |s|,$$

in das Innere des Kreises (c', r') fällt).

Wächst ϱ ins Unendliche, so konvergiert c' nach s, während r' unendlich klein wird. Der Konvergenzbereich der Reihe (7) besteht also in diesem offenbar durch die Beziehung

$$\text{(20)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 0$$

charakterisierten Falle aus der gesamten x-Ebene mit einzigem Ausschluß der Stelle s, welche ja eo ipso für die Reihe

$$\sum A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s - x}\right)^\lambda$$

eine singuläre sein muß. Da aber schon auf dem Einheitskreise, als dem wahren Konvergenzbereiche der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$, mindestens eine singuläre Stelle liegen muß, so ist das Eintreten dieses Falles nur möglich, wenn s selbst der Peripherie des Einheitskreises angehört; mit anderen Worten, die Beziehung (20) kann, wenn überhaupt, nur dann zustande kommen, falls $s = e^{\varphi i}$ ist. Weiter unten wird gezeigt werden, daß sie bei ganz bestimmter Beschaffenheit der a_ν auch wirklich stattfindet.

3. Als Hauptresultat der vorstehenden Betrachtung ergibt sich also, daß die aus der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ durch eine Eulersche Transformation hervorgehende Reihe

$$f(x) = \frac{s}{s-x} \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda$$

einen durch die Beziehung

$$\left|\frac{x}{s-x}\right| < \varrho = \left(\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|}\right)^{-1}$$

charakterisierten, stets also den Punkt $x = 0$ im Innern enthaltenden Konvergenzbereich besitzt, der durch einen — in gewissen Grenzfällen (s. Gl. (18), (20)) in eine unbegrenzte Gerade bzw. einen Punkt ausartenden — Kreis begrenzt wird und der, sofern nur jene Zahl ϱ das ihr zustehende Minimum $\frac{1}{1+|s|}$ überschreitet, über den ursprünglichen Konvergenzkreis $|x| = 1$ der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ allemal hinausragt, für $\varrho \geq 1$ sich sogar ins Unendliche erstreckt. Da die betreffende Reihe in jedem innerhalb ihres Konvergenzbereiches liegenden abgeschlossenen Bereiche ihrer Natur nach stets gleichmäßig konvergiert, so liefert sie also eine analytische Fortsetzung von $\sum a_\nu x^\nu$, gerade so, wie die Transformation von $\sum a_\nu x^\nu$ in eine „abgeleitete" Potenzreihe (Taylorsche Formel), von welcher die vorliegende Methode unter geeigneten Umständen merkliche Vorteile bietet: einmal, weil jeder der Koeffizienten $A_\lambda(s)$ nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten a_ν enthält (nämlich $\lambda + 1$) und infolgedessen einer Abschätzung des infinitären Verhaltens weniger Schwierigkeiten bereitet, als die stets alle a_ν enthaltenden Koeffizienten der Taylorschen Reihe; sodann aber, weil sich das Konvergenzgebiet eventuell ins Unendliche erstreckt (was ja bei der Transformation durch die Taylorsche Formel niemals eintreten kann). Selbstverständlich wird es immerhin nur bei besonderer Verteilung der singulären Stellen möglich sein, durch geeignete Wahl bzw. Variation des Parameters s Entwickelungen zu gewinnen, deren Konvergenzbereich ein unendliches oder auch nur einigermaßen ansehnliches Gebiet der Ebene umfaßt. Und es bedarf wohl kaum der Bemerkung (welche ich lediglich im Hinblick auf eine später [§ 4] zu machende Anwendung nicht unterdrücken möchte), daß es im allgemeinen nicht möglich ist, durch irgend eine Wahl des Parameters s eine beliebig angenommene Stelle x_0 dem Innern oder auch nur der Grenze des Konvergenzbereiches einzuverleiben. Man überzeugt sich leicht, daß es schon in Fällen äußerst einfacher Art (z. B. wenn der Einheitskreis drei oder mehr ungefähr äquidistante singuläre Stellen enthält) ausgeschlossen erscheint, eine Eulersche Transformation herzustellen, deren (ja allemal die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltender) Konvergenzkreis auch nur so weit reicht, wie derjenige einer passend gewählten Taylorschen Entwickelung. Dagegen wird sich der Nutzen der Eulerschen Transformation insbesondere dann bewähren, wenn die Singularitäten der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ und ihrer analytischen Fortsetzung durchweg in einer den Punkt $x = 0$ ausschließenden Halbebene liegen. Hierhin gehören die in den beiden folgenden Paragraphen behandelten, besonders einfachen und prägnanten Fälle.

§ 2.

Eindeutige Funktionen mit einer einzigen Singularität bzw. einer endlichen Anzahl singulärer Stellen.

1. Eine Potenzreihe von der Form

$$(21) \qquad f_\varkappa(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \nu^\varkappa \cdot x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

besitzt den Konvergenzradius $|x| = 1$ und definiert, wie leicht erkannt wird, eine rationale Funktion mit dem Nenner $(1-x)^{\varkappa+1}$. Denn man hat zunächst:

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x}$$

und sodann:

$$f_1(x) = x \cdot Df_0(x), \qquad f_2(x) = x \cdot Df_1(x) \text{ usf.},$$

so daß also $f_\varkappa(x)$ durch $\varkappa$-malige Anwendung der Operation $x \cdot D_x$ aus $f_0(x)$ entsteht, woraus sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht.

Für unsere weiteren Schlüsse erscheint es indessen erforderlich, die Form der rationalen Funktion $f_\varkappa(x)$ genauer festzustellen, was sich mit Hilfe der Eulerschen Transformation leicht bewerkstelligen läßt. Dabei erscheint es auf Grund der zuvor gemachten Bemerkung über den Charakter von $f_\varkappa(x)$ von vornherein angezeigt, den Parameter $s = 1$ zu wählen.

Setzt man die vorgelegte Potenzreihe in die Form:

$$f_\varkappa(x) = x \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \nu^\varkappa \cdot x^{\nu-1} = x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu (\nu+1)^\varkappa \cdot x^\nu,$$

so findet man durch Anwendung der Formeln (7) und (8) (p. 16, 17) auf die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu (\nu+1)^\varkappa \cdot x^\nu$:

$$(22) \qquad f_\varkappa(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda^{(\varkappa)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$(23) \quad A_\lambda^{(\varkappa)} = A_\lambda^{(\varkappa)}(1) = \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu \cdot (\lambda)_\nu \cdot (\nu+1)^\varkappa \quad (\text{speziell: } A_0^{(\varkappa)} = 1).$$

Um die Natur der Koeffizienten $A_\lambda^{(\varkappa)}$ näher zu bestimmen, bemerke man, daß für $\nu \geqq 1$, $\varkappa \geqq 1$:

$$\nu^\varkappa = (D^\varkappa e^{\nu t})_{t=0}$$

und daher:

$$(24) \quad A_\lambda^{(\varkappa)} = D^\varkappa \left(\sum_0^\lambda{}_\nu (-1)^\nu (\lambda)_\nu \, e^{(\nu+1)t}\right)_{t=0} = D^\varkappa \{e^t (e^t - 1)^\lambda\}_{t=0}.$$

Die Formel gilt übrigens, wegen:

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda^{(0)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1}$$

auch noch für $\varkappa = 0$ (bei $\lambda \geqq 1$), wenn man dem Symbol $D^{(0)} y$ die Bedeutung von y beilegt.

Hiernach ist aber offenbar $A_\lambda^{(\varkappa)}$ identisch mit dem Koeffizienten von $\frac{t^\varkappa}{\varkappa!}$ in der Mac Laurinschen Entwickelung von $e^t(e^t-1)^\lambda$, so daß also:

$$(25) \qquad e^t (e^t - 1)^\lambda = \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} A_\lambda^{(\varkappa)} \cdot t^\varkappa.$$

Da aber andererseits:

$$e^t (e^t - 1)^\lambda = \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right) \cdot t^\lambda \cdot \left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3^2} + \cdots\right)^\lambda,$$

so folgt, daß die betreffende Entwickelung als niedrigste Potenz von t das Glied t^λ (mit dem Koeffizienten 1) enthält und daß die Koeffizienten aller höheren Potenzen reelle positive Zahlen sind. Man findet somit:

$$(26) \quad \begin{cases} A_\lambda^{(\varkappa)} = 0, & \text{wenn } \varkappa < \lambda, \\ \frac{1}{\lambda!} A_\lambda^{(\lambda)} = 1, & A_\lambda^{(\varkappa)} \text{ reell positiv, wenn } \varkappa > \lambda, \end{cases}$$

so daß also:

$$(27) \qquad e^t (e^t - 1)^\lambda = \sum_\lambda^\infty{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} A_\lambda^{(\varkappa)} \cdot t^\varkappa.$$

Infolgedessen reduziert sich aber die Entwickelung (22) (wegen: $A_\lambda^{(\varkappa)} = 0$ für $\lambda > \varkappa$) auf die folgende:

$$(28) \qquad f_\varkappa(x) = \sum_0^\varkappa{}_\lambda A_\lambda^{(\varkappa)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1},$$

also auf eine ganze Funktion $(\varkappa + 1)^{\text{ten}}$ Grades von $\dfrac{x}{1-x}$ mit reellen positiven Koeffizienten $A_\lambda^{(\varkappa)}$. Die letzteren genügen überdies für jedes einzelne $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ bei veränderlichem $\varkappa > \lambda$ der Relation (27), aus welcher sich noch ergibt, daß:

$$(29) \qquad 0 < A_\lambda^{(\varkappa)} < \varkappa!\; e(e-1)^\lambda.$$

2. Die vorstehende Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf Potenzreihen $\sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$ übertragen, bei denen jeder Koeffizient a_ν ein und dieselbe rationale ganze Funktion von ν ist, etwa:

$$(30) \qquad \begin{cases} a_\nu = g(\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \\ \text{wo:} \quad g(y) = \sum_0^m {}^{\varkappa}\, c_\varkappa y^\varkappa. \end{cases}$$

Alsdann wird zunächst:

$$\sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^{\nu} \left(\sum_0^m {}^{\varkappa}\, c_\varkappa \nu^\varkappa \right) \cdot x^\nu = \sum_0^m {}^{\varkappa}\, c_\varkappa \left(\sum_1^\infty {}^{\nu}\, \nu^\varkappa x^\nu \right),$$

so daß mit Benützung von Gleichung (28) resultiert:

$$(31) \quad \sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \sum_0^m {}^{\varkappa}\, c_\varkappa \sum_0^\varkappa {}^{\lambda}\, A_\lambda^{(\varkappa)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1} = \sum_0^m {}^{\lambda} \left(\sum_\lambda^m {}^{\varkappa}\, c_\varkappa A_\lambda^{(\varkappa)} \right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1}.$$

Man erkennt leicht, daß dieses Resultat auch umkehrbar ist, d. h.: Entwickelt man eine ganze Funktion $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades von $\dfrac{x}{1-x}$ nach positiven Potenzen von x, so lassen sich die Koeffizienten dieser Entwickelung stets in die Form $g(\nu)$ setzen, wo $g(y)$ eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades von y.

Es handelt sich nun darum, das vorstehende Resultat auch auf den Fall auszudehnen, daß an die Stelle der rationalen ganzen Funktion $g(y)$ eine transzendente tritt, so daß also: $a_\nu = g(\nu)$, wo jetzt $g(y) = \sum_0^\infty {}^{\varkappa}\, c_\varkappa y^\varkappa$ eine beständig konvergierende Reihe bedeutet. Hierzu ist vor allem zu bemerken, daß die bloße Aussage, die Koeffizienten a_ν sollen in der Form einer ganzen transzendenten Funktion $g(\nu)$ darstellbar sein, völlig bedeutungslos ist, da es stets (unendlich viele) ganze transzendente Funktionen $g(y)$ gibt, welche an unendlich vielen, beliebig vorgeschriebenen Stellen y_ν mit der einzigen Häufungsstelle ∞ beliebig vorgeschriebene Werte Y_ν, insbesondere also an den Stellen 1, 2, 3, ... die als völlig willkürlich zu denkenden Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ annehmen, so daß also in der Tat $a_\nu = g(\nu)$ wird.

Ich möchte zunächst diese Gelegenheit benützen, um über die Herstellung einer solchen ganzen transzendenten Funktion $g(y)$ (wo: $g(y_\nu) = Y_\nu$) die folgenden Bemerkungen zu machen. Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich ja ganz unmittelbar mit Hilfe des (älteren) Mittag-Lefflerschen Theorems (über Darstellung eindeutiger Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten) bewerkstelligen und wird auch gewöhnlich in dieser Weise ausgeführt[1]). Es dürfte indessen logisch natürlicher und methodisch einfacher erscheinen, bei der Behandlung der fraglichen Aufgabe, deren Ziel ja doch lediglich eine Übertragung der Lagrangeschen Interpolationsformel auf ganze transzendente Funktionen ist, die Analogie mit dieser letzteren in den Vordergrund zu stellen und demgemäß die Lösung direkt an den Weierstraßschen Produkt-Darstellungssatz anzuknüpfen, statt den Umweg über den merklich komplizierteren Mittag-Lefflerschen Satz zu nehmen[2]), um so mehr als von diesem letzteren hier nur ein ganz spezieller Fall (nämlich Darstellung einer Funktion mit lauter einfachen Polen) gebraucht wird.

---

[1]) S. z. B. Guichard, Ann. Éc. Norm. (3), 11 (1884), p. 427. — Ph. E. B. Jourdain, Journ. f. Math. 128 (1905), p. 209. — Einen nach meinem Dafürhalten recht wenig glücklichen Versuch, die fragliche Aufgabe unabhängig von dem Mittag-Lefflerschen Theorem zu erledigen, machte P. Cazzaniga, Ann. di Mat. (2), 10 (1880—82), p. 279.

[2]) Bei F. W. Osgood (Lehrbuch der Funktionentheorie I, 1907, p. 480) wird das fragliche Resultat aus einem sogar noch komplizierteren Satze hergeleitet, der a. a. O. als „Mittag-Lefflerscher Anschmiegungssatz" bezeichnet wird. Es ist das derjenige Satz, welcher in der betreffenden Mittag-Lefflerschen Abhandlung (Acta Math. 4, 1884, p. 43) als Theorem B erscheint.

braucht wird. Und während die Herleitung jenes speziellen (übrigens für die gewöhnlichen Anwendungen besonders wichtigen) Falles aus dem allgemeinen Mittag-Lefflerschen Satze eine verhältnismäßig umständliche Rechnung erfordert, so erscheint er umgekehrt in dem vorliegenden Zusammenhange als eine ganz unmittelbare Folgerung aus jener verallgemeinerten Lagrangeschen Interpolationsformel.

3. Die Ausführung der vorstehend angedeuteten Methode beruht auf einer naheliegenden Verallgemeinerung eines bekannten, für die Produkt-Darstellung der ganzen transzendenten Funktionen grundlegenden Weierstraßschen[1]) Satzes, nämlich:

Versteht man unter y_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge von 0 verschiedener Zahlen mit der einzigen Häufungsstelle ∞, unter p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge ganz beliebiger positiver Zahlen[2]), so lassen sich stets (unendlich viele) Folgen von natürlichen Zahlen m_ν so bestimmen, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty {}_\nu \, p_\nu \cdot \left| \frac{y}{y_\nu} \right|^{m_\nu+1}$$

in jedem endlichen Bereiche (und dann eo ipso gleichmäßig) konvergiert.

[1]) Weierstraß, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Abh. aus der Funktionenlehre (1886), p. 16 = Werke, 2, p. 92. (NB. In dem ersten Abdrucke dieser Abhandlung [Abh. der Berliner Akademie, 1876) wird der fragliche Satz nicht bewiesen, sondern nur ausgesprochen und durch das Beispiel $m_\nu = \nu - 1$ verifiziert.)

[2]) Die p_ν können insbesondere mit ν ins Unendliche wachsen (was bei der hier beabsichtigten Anwendung des Satzes geradezu als Regel anzusehen ist). Bleiben die p_ν unter einer endlichen Schranke p, so fällt offenbar der im Texte ausgesprochene Satz mit dem gewöhnlichen Weierstraßschen zusammen $\left(\text{wegen: } \sum_1^\infty p_\nu \left| \frac{y}{y_\nu} \right|^{m_\nu+1} < p \cdot \sum_1^\infty \left| \frac{y}{y_\nu} \right|^{m_\nu+1}\right)$.

Dagegen wäre es schon notwendig, auf die im Texte gegebene allgemeinere Form des Satzes zu rekurrieren, wenn man bei der Produkt-Darstellung einer ganzen Funktion jede mehrfache Wurzel durch eine entsprechende Potenz des zugehörigen Linearfaktors, statt wie bei

Beweis. Ist für irgend ein bestimmtes $m > 0$ die Reihe

$$\sum_1^\infty{}^{\nu}\, p_\nu \cdot \left|\frac{1}{y_\nu}\right|^{m+1}$$

konvergent, so gilt bei jedem endlichen Werte von y das gleiche für die Reihe:

$$\sum_1^\infty{}^{\nu}\, p_\nu \cdot \left|\frac{y}{y_\nu}\right|^{m+1},$$

so daß die Annahme $m_\nu \geq m$ der gemachten Aussage genügt.

Ist die obige Voraussetzung nicht erfüllt, so läßt sich, wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} |y_\nu| = \infty$, zu jedem noch so großen $r > 0$ eine natürliche Zahl n so fixieren, daß:

(32) $$\left|\frac{y}{y_\nu}\right| < \frac{1}{e} \quad \text{für: } |y| < r,\ \nu > n.$$

Bedeutet dann $\sum C_\nu^{-1}$ irgend eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, so folgt aus den vorstehenden Ungleichungen, daß die fragliche Reihe für $|y| < r$ (gleichmäßig) konvergiert, wenn die m_ν so bestimmt werden, daß:

$$p_\nu \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{m_\nu+1} < C_\nu^{-1},$$

d. h.

(33) $$m_\nu + 1 > \lg C_\nu + \lg p_\nu.$$

Hiermit wäre der Existenzbeweis von Zahlen m_ν der verlangten Art in einer für den hier vorliegenden Zweck vollständig ausreichenden Weise geliefert. Doch möchte ich, sofern es sich um eine wirkliche Bestimmung solcher Zahlen m_ν handeln sollte, noch folgendes hinzufügen.

Weierstraß durch eine entsprechende Anzahl verschieden bezeichneter, aber gleichgeltender einfacher Linearfaktoren in Rechnung stellen will. Denn es liegt ja keinerlei Grund vor, den Fall auszuschließen, daß die Multiplizität der Nullstellen mit dem Index über alle Grenzen wächst. (Dies ist zuweilen übersehen worden — s. z. B. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen [1877], p. 309.)

Es ist ohne weiteres klar, daß man durch sukzessive Heranziehung immer schwächer konvergierender Reihen $\sum C_\nu^{-1}$ (etwa: $C_\nu = e^\nu$, $\nu^{1+\varrho}$, $\nu \cdot (\lg \nu)^{1+\varrho}$ usf.) die untere Schranke für die m_ν beständig herabsetzen kann. Immerhin wird man bei diesem Verfahren, wie langsam auch die gewählte Vergleichsreihe $\sum C_\nu^{-1}$ konvergieren möge, stets eine *wesentlich* höhere Schranke erhalten, als in Wahrheit erforderlich ist, da ja bei der oben angewendeten (dem entsprechenden *Weierstraßschen* Verfahren genau nachgebildeten) Schlußweise die Voraussetzung $\lim\limits_{\nu=\infty} |y_\nu| = \infty$ in höchst unvollständiger Weise (nämlich ausschließlich in Form von Ungleichung (32)) ausgenützt wird, ganz ohne Rücksicht darauf, daß die besondere Art des Anwachsens der $|y_\nu|$ auf die Konvergenz-Chancen der Reihe und somit auch auf die passende Normierung der m_ν einen maßgebenden Einfluß ausüben muß[1]). Selbstverständlich kann es sich bei einer in dem eben angedeuteten Sinne vorzunehmenden Vervollkommnung der Formel (33) nicht etwa um die Gewinnung eines wirklichen *Minimums* für die m_ν handeln (da die Existenz eines solchen nach Lage der Sache ausgeschlossen erscheint, sofern nicht ein *konstantes* $m_\nu > 0$ schon das erforderliche leistet). Vielmehr wird es bei der Aufstellung einer „*möglichst vorteilhaften*" Formel zur Bestimmung der m_ν lediglich darauf ankommen, den Einfluß des Anwachsens der $|y_\nu|$ insoweit zur Geltung zu bringen und die Auswahl der C_ν in der Weise zu treffen, daß eine gewisse formale Einfachheit des Endresultates nicht auf Kosten möglichster Verschärfung verloren geht.

Es bedeute nun ϱ einen übrigens beliebig klein anzunehmenden, positiven echten Bruch, k_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge positiver Zahlen, welche nur den beiden Bedingungen zu genügen haben:

---

[1]) Man würde infolgedessen aus der Formel (33) niemals entnehmen können, daß bei hinlänglich starkem Anwachsen der $|y_\nu|$ schon die Wahl eines passend gewählten konstanten $m_\nu > 0$ für den beabsichtigten Zweck ausreichend erscheint.

(34) $$k_\nu \begin{cases} < p_\nu \\ < (\lg \nu)^k \end{cases}$$

(unter k eine beliebig große positive Zahl verstanden). Wird dann $r > 0$ beliebig groß angenommen, so ist die Reihe

$$\sum p_\nu \cdot \left|\frac{y}{y_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

für $|y| < r$ offenbar konvergent, wenn die m_ν so bestimmt werden, daß zum mindesten von irgend einem bestimmten ν ab die Beziehung besteht:

$$p_\nu \cdot \left|\frac{r}{y_\nu}\right|^{m_\nu+1} < \frac{k_\nu}{\nu^{1+\varrho}},$$

anders geschrieben:

$$\left|\frac{y_\nu}{r}\right|^{m_\nu+1} > \nu^{1+\varrho} \cdot \frac{p_\nu}{k_\nu},$$

und diese Beziehung wird $\left(\text{wegen } \frac{p_\nu}{k_\nu} > 1, \text{ also } \left(\frac{p_\nu}{k_\nu}\right)^{1+\varrho} > \frac{p_\nu}{k_\nu}\right)$ a fortiori erfüllt sein, wenn:

$$\left|\frac{y_\nu}{r}\right|^{m_\nu+1} > \left(\nu \cdot \frac{p_\nu}{k_\nu}\right)^{1+\varrho},$$

d. h.

(35) $$\begin{aligned} m_\nu + 1 &> (1+\varrho) \cdot \frac{\lg \nu + \lg \frac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu| - \lg r} \\ &= (1+\varrho) \cdot \frac{\lg \nu + \lg \frac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lg r}{\lg |y_\nu|}}. \end{aligned}$$

Wie groß man auch r angenommen haben möge, so muß sich, wegen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg r}{\lg |y_\nu|} = 0,$$

ein m so fixieren lassen, daß für $\nu > m$:

$$\frac{\lg r}{\lg |y_\nu|} < \varrho^2, \qquad \text{also:} \ \frac{1}{1 - \dfrac{\lg r}{\lg |y_\nu|}} < \frac{1}{1-\varrho^2}.$$

Die für die fragliche Konvergenz ausreichende Bedingung (35) ist daher wieder a fortiori erfüllt, wenn irgend ein $n > m$ existiert, derart, daß für $\nu > n$:

$$m_\nu + 1 > (1+\varrho) \cdot \frac{\lg \nu + \lg \dfrac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|} \cdot \frac{1}{1-\varrho^2} = \frac{1}{1-\varrho} \cdot \frac{\lg \nu + \lg \dfrac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|}$$

oder auch, wenn man noch

$$\frac{1}{1-\varrho} = 1 + \frac{\varrho}{1-\varrho} = 1 + \varepsilon$$

setzt, wo also ε einzig und allein der Beschränkung unterliegt, positiv zu sein, schließlich:

$$m_\nu + 1 \geqq (1+\varepsilon) \cdot \frac{\lg \nu + \lg \dfrac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|}. \tag{36}$$

Will man hieraus noch einen möglichst kleinen ganzzahligen Wert als untere Schranke für m_ν ableiten, so ergibt sich, wenn man den (im vorliegenden Zusammenhange eigentlich kaum noch in Betracht kommenden) Fall ausschließt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (36) unter einer endlichen Schranke bleibt, mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit von ε:

$$m_\nu + 1 \geqq \left[(1+\varepsilon) \cdot \frac{\lg \nu + \lg \dfrac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|} \right] \tag{37}$$

(wo das Symbol $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet[1])).

[1]) In dem oben ausgeschlossenen Falle hätte man den auf der rechten Seite von (36) stehenden Ausdruck durch eine ihm gleiche oder darüber liegende ganze Zahl zu ersetzen, so daß sich also ergeben würde:

Dabei steht es nach Ungleichung (34) noch frei, $k_\nu = p_\nu$ zu setzen, falls die p_ν endlich bleiben (wie insbesondere im Weierstraßschen Falle) oder höchstens so ins Unendliche wachsen, wie $(\lg \nu)^k$, so daß dann die Formel (37) die einfachere Gestalt annimmt:

$$m_\nu + 1 \geqq \left[(1+\varepsilon)\cdot\frac{\lg \nu}{\lg |y_\nu|}\right]. \tag{38}$$

4. Um jetzt eine ganz transzendente Funktion $G(x)$ herzustellen, welche an den Stellen y_ν (wobei der Fall, daß die 0 unter den y_ν vorkommt, vorläufig ausgeschlossen werden mag) die Werte Y_ν annimmt, bilde man zunächst (ganz analog, wie bei der Herleitung der Lagrangeschen Interpolationsformel) eine ganze Funktion $P(y)$, welche die Stellen y_ν zu einfachen Nullstellen hat (die überdies, was für die Praxis zuweilen nützlich ist, noch beliebig viele andere Nullstellen haben darf). Man hat sodann:

$$\left(\frac{P(y)}{y-y_n}\right)_{y=y_n} = P'(y_n),$$

wo $P'(y_n)$ von Null verschieden und daher:

$$\frac{Y_n}{P'(y_n)}\cdot\frac{P(y)}{y-y_n}\begin{cases} = Y_n & \text{für } y = y_n \\ = 0 & \text{für } y = y_\nu \text{ und } \nu \lessgtr n. \end{cases}$$

Hieraus würde sich für die gesuchte Funktion $G(x)$ sofort der Ausdruck ergeben:

$$m_\nu \geqq \left[(1+\varepsilon)\cdot\frac{\lg \nu + \lg \dfrac{p_\nu}{k_\nu}}{\lg |y_\nu|}\right].$$

Nimmt man etwa speziell: $y_\nu = \nu^{\frac{1}{m}}$ und setzt (siehe im Texte): $k_\nu = p_\nu$, so wird darnach:

$$m_\nu \geqq [(1+\varepsilon)\cdot m],$$

d. h. schließlich, das es freisteht, $\varepsilon < \frac{1}{m}$ anzunehmen: $m_\nu \geqq m$, so daß also unsere Formel hier wirklich den kleinsten für m_ν zulässigen Wert liefert.

$$G(y) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{Y_\nu}{P'(y_\nu)} \cdot \frac{P(y)}{y - y_\nu}, \tag{39}$$

falls diese Reihe in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergierte, was

$$\left(\text{wegen}: \frac{1}{y - y_\nu} = \frac{1}{y_\nu} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{y}{y_\nu}} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu = \infty} \frac{y}{y_\nu} = 0\right)$$

nur dann der Fall wäre, wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left| \frac{Y_\nu}{P'(y_\nu)} \cdot \frac{1}{y_\nu} \right|$$

konvergent ist. Ist nun aber diese sehr spezielle[1]) Bedingung nicht erfüllt, so läßt sich die Konvergenz der Reihe durch passende Zusatz-Funktionen herbeiführen, welche im übrigen offenbar nur den beiden Bedingungen zu genügen haben, im Endlichen durchweg regulär zu sein und den Wert der Reihensumme an den Stellen y_ν nicht zu alterieren. Man erkennt aber ohne weiteres, daß dieser Zweck in denkbar einfachster Weise erreicht wird, wenn man jedem Reihengliede (nicht, wie beim Mittag-Lefflerschen Satze einen Zusatz-Summanden, sondern) einen Faktor von der Form $\left(\frac{y}{y_\nu}\right)^{m_\nu}$ hinzufügt,[2]) nachdem man auf Grund des zuvor bewiesenen Hilfssatzes die Zahlen m_ν so bestimmt hat, daß die Reihe

---

[1]) Selbst wenn die y_ν so beschaffen sein sollten, daß $\sum \left|\frac{1}{y_\nu}\right|$ konvergiert, so können ja die Y_ν und die reziproken Werte der $P'(y_\nu)$ sämtlich oder teilweise mit ν ins Unendliche wachsen.

[2]) Mit Hilfe eines solchen Konvergenz-Faktors lassen sich die Weierstraßschen Funktionen $\zeta(u)$, $\wp(u)$ in überaus einfacher Weise einführen, ohne das Mittag-Lefflersche Theorem zu benützen oder, wie zuweilen in der gleichen Absicht geschieht, von der Partialbruch-Reihe für $\wp'(u)$ ausgehend, durch Integration zu $\wp(u)$, $\zeta(u)$ zu gelangen.

Setzt man, wie üblich:

$$2\mu\omega + 2\nu\omega' = \omega_{\mu\nu},$$

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left|\frac{Y_\nu}{P'(y_\nu)}\right| \cdot \left|\frac{y}{y_\nu}\right|^{m_\nu+1}, \text{ also auch: } \sum_1^\infty{}_\nu \left|\frac{Y_\nu}{P'(y_\nu)}\right| \cdot \left|\frac{1}{y_\nu}\right| \cdot \left|\frac{y}{y_\nu}\right|^{m_\nu}$$

beständig konvergiert. Durch Multiplikation der letzten Reihe mit dem in jedem endlichen Bereiche endlich bleibenden Faktor

$$\left|\frac{P(y)}{1-\dfrac{y}{y_\nu}}\right|$$

ergibt sich sodann, daß die Reihe

$$G(y) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{Y_\nu}{P'(y_\nu)} \cdot \frac{P(y)}{y-y_\nu} \cdot \left(\frac{y}{y_\nu}\right)^{m_\nu} \tag{40}$$

in jedem endlichen Bereiche absolut und gleichmäßig konvergiert und demgemäß eine ganze transzendente Funktion darstellt, die überdies für $y = y_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ den jedesmal vorgeschriebenen Wert Y_ν annimmt. Die Gleichung (40) liefert also die gesuchte Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel. Für den Fall, daß zu den mit y_ν bezeichneten Stellen noch die bisher ausgeschlossene Stelle $y_0 = 0$ mit der Vorschrift $G(0) = Y_0$ hinzukommt, hat man der Reihe (40) offenbar nur noch das Anfangsglied

$$\frac{Y_0}{P'(0)} \cdot \frac{P(y)}{y}$$

hinzuzufügen.

---

so hat man wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu}' \left(\frac{1}{\omega_{\mu\nu}}\right)^3$ nach der im Texte gegebenen Vorschrift zur Erzielung der erforderlichen Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu}' \frac{1}{u-\omega_{\mu\nu}}$, bei gleichzeitiger Erhaltung des Residuums 1, jedem Gliede nur den Faktor $\left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2$ hinzuzufügen.

Setzt man sodann:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\mu,\nu}' \frac{1}{u-\omega_{\mu\nu}} \cdot \left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2 = \frac{1}{u} + \sum_{\mu,\nu}' \left(\frac{1}{u-\omega_{\mu\nu}} + \frac{u}{\omega_{\mu\nu}^2} + \frac{1}{\omega_{\mu\nu}}\right),$$

so folgt durch Differentiation:

$$-\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu,\nu}' \left(\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^2} - \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2}\right) = \wp(u).$$

Ferner ist evident, daß man aus Gleichung (40) durch Division mit dem Faktor $P(y)$ (welcher in diesem Falle so zu wählen ist, daß er ausschließlich die (einfachen) Nullstellen y_ν hat) den obenbezeichneten einfachsten Fall des Mittag-Lefflerschen Satzes erhält.

In demjenigen besonderen Falle, welcher den Ausgangspunkt dieser ganzen letzten Betrachtung bildet, nämlich: Herstellung einer ganzen transzendenten Funktion $g(y)$, welche für $y = \nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) beliebig vorgeschriebene Werte a_ν annimmt (s. p. 27), hätte man als ganze Funktion $P(y)$ eine solche mit den Nullstellen $y = 1, 2, 3, \ldots$ zu konstruieren. Dieser Forderung würde zunächst durch die Annahme

$$P(y) = \frac{1}{y} Fc(-y) = \frac{1}{y\,\Gamma(-y)}$$

genügt. Offenbar trägt es aber sehr wesentlich zur Vereinfachung des Endresultates bei, wenn man, im Anschlusse an eine zu Anfang dieser Nummer gemachte Bemerkung, der Funktion $P(y)$ noch die Nullstellen $0, -1, -2, \ldots$ hinzufügt, so daß also

$$P(y) = \sin \pi y \qquad P'(y_\nu) = \pi \cos \nu \pi = (-1)^\nu \pi$$

resultiert und daher die gesuchte, der Bedingung $g(\nu) = a_\nu$ genügende ganze Funktion die Form annimmt:

$$(41) \qquad g(y) = \frac{1}{\pi} \sin \pi y \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a_\nu}{y - \nu} \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right)^{m_\nu}.$$

Dabei sind die m_ν so zu wählen, daß die Reihe

$$\sum \left| a_\nu \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right)^{m_\nu + 1} \right|$$

beständig konvergiert; man hätte also speziell $m_\nu = 0$, wenn schon die Reihe $\sum \left|\frac{a_\nu}{\nu}\right|$ konvergieren sollte[1]).

[1]) Dieser besondere Fall der Formel (41) findet sich schon bei E. Borel, Par. C. R. 127 (1898), p. 1001; s. auch J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, p. 27.

5. Aus den vorstehenden Ausführungen erwächst nun die Frage: Welchen Beschränkungen hat man die ganze transzendente Funktion $g(y)$ zu unterwerfen, damit die Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} g(\nu)\cdot x^{\nu}$, welche ja im Falle eines rationalen $g(y)$ eine rationale ganze Funktion von $\frac{x}{1-x}$ erzeugte, eine transzendente ganze Funktion definiert?

Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, auf einen Hilfssatz aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen zu rekurrieren, wobei ich mich der von mir in einer Arbeit über diesen Gegenstand[1]) benützten Terminologie bedienen will.

Ich sage[2]), eine ganze transzendente Funktion $g(y)$ sei vom Typus γ der Ordnung ϱ (unter γ und ϱ positive Zahlen verstanden), wenn bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(42)\qquad |g(y)| \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|y|^{\varrho}} & \text{für alle hinlänglich großen } y, \\ > e^{(\gamma-\varepsilon)\cdot|y|^{\varrho}} & \text{für gewisse beliebig große } y. \end{cases}$$

Steht nur die Existenz der ersten dieser beiden Ungleichungen fest, so sage ich, es sei $g(y)$ höchstens vom Typus γ; und, falls an die Stelle eines positiven γ die Null tritt, falls also:

$$(43)\qquad |g(y)| < e^{\varepsilon\cdot|y|^{\varrho}} \quad \text{für alle hinlänglich großen } y,$$

es gehöre $g(y)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung ϱ an. Insbesondere wird also die letzte Bedingung allemal dann erfüllt sein, wenn $g(y)$ einer niedrigeren Ordnung als der der Ordnung ϱ angehört.

Ist nun $g(y) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} c_{\varkappa} y^{\varkappa}$, so finden bekanntlich sehr einfache Beziehungen statt zwischen dem infinitären Verhalten der Koeffizienten $c_{\varkappa}$ und dem Ordnungstypus von $g(y)$[3]). Da es sich in dem vorliegenden Zusammenhange nur um den besonderen Fall $\varrho = 1$ und um eine einzige der fraglichen

---

1) Math. Ann. 58 (1904).

2) A. a. O., p. 264.

3) S. z. B. a. a. O., p. 266 ff., p. 337 ff.

Beziehungen handelt, so will ich zur Bequemlichkeit des Lesers deren für den genannten Spezialfall besonders einfach sich gestaltende Herleitung hier angeben. Es handelt sich dabei um den Beweis des folgenden Satzes:

Ist $g(y) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\varkappa} c_{\varkappa} y^{\varkappa}$ höchstens vom Typus γ der Ordnung 1, so hat man:

(44) $$\overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\varkappa]{\varkappa! \, |c_{\varkappa}|} \leqq \gamma\ [1].$$

Dieses Resultat gilt auch noch für $\gamma = 0$, in welchem Falle man offenbar den oberen Limes durch den Limes schlechthin ersetzen kann und nur das Gleichheitszeichen Geltung hat. Es wird also:

(45) $$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\varkappa! \, |c_{\varkappa}|} = 0,$$

wenn $g(y)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört[2].

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl R_{ε} existiert, derart daß:

$$\left| \sum_{0}^{\infty} {}^{\varkappa} c_{\varkappa} y^{\varkappa} \right| < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot |y|} \quad \text{für: } |y| > R_{\varepsilon}.$$

---

[1]) Wie aus dem Gange des Beweises unmittelbar ersichtlich ist, tritt an die Stelle dieser Beziehung die präzisere:

$$\overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\varkappa]{\varkappa! \, |c_{\varkappa}|} = \gamma,$$

wenn $g(y)$ wirklich dem Typus γ angehört und demgemäß auch der zweiten Ungleichung (42) genügt.

[2]) Der letzte Teil des Satzes wurde mit wesentlich komplizierteren Hilfsmitteln zuerst von Herrn Poincaré bewiesen (Bull. Soc. Math. de France 11 [1883], p. 138. Die dort gegebene unvollkommenere, insbesondere für den hier vorliegenden Zweck nicht genügende Formulierung

$$\lim_{\varkappa=\infty} \varkappa! \, c_{\varkappa} = 0$$

läßt sich ohne weiteres durch die Formel (45) des Textes ersetzen).

Infolgedessen hat man nach dem Cauchyschen Koeffizientensatze:

$$|c_\varkappa y^\varkappa| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|y|} \qquad \text{für: } |y| > R_\varepsilon .$$

Nimmt man jetzt:

$$\varkappa > (\gamma + \varepsilon)\cdot R_\varepsilon, \text{ also } \frac{\varkappa}{\gamma+\varepsilon} > R_\varepsilon,$$

so steht es frei, in der letzten Ungleichung $y = \frac{\varkappa}{\gamma+\varepsilon}$ zu setzen, so daß sich also ergibt:

$$|c_\varkappa|\cdot\left(\frac{\varkappa}{\gamma+\varepsilon}\right)^\varkappa < e^\varkappa \qquad (\text{für: } \varkappa > (\gamma+\varepsilon)\cdot R_\varepsilon)$$

und sodann:

$$\frac{\varkappa}{e}\cdot\sqrt[\varkappa]{|c_\varkappa|} < \gamma + \varepsilon,$$

somit schließlich:

$$\overline{\lim_{\varkappa=\infty}}\, \frac{\varkappa}{e}\sqrt[\varkappa]{|c_\varkappa|} \leq \gamma .$$

Da aber nach einer bekannten Formel[1]):

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{e}{\varkappa}\cdot\sqrt[\varkappa]{\varkappa!} = 1,$$

so ergibt sich, wie behauptet:

---

[1]) Dieselbe folgt unmittelbar aus der Stirlingschen Näherungsformel, kann aber auch ohne dieses Hilfsmittel in verschiedener Weise ganz elementar abgeleitet werden; s. z. B. a. a. O., p. 267; auch: diese Berichte 32 (1902), p. 169, p. 297. Noch einfacher mit Hilfe des bekannten Cauchyschen Grenzwertsatzes, wonach:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{p_\varkappa} = \lim_{\varkappa=\infty} \frac{p_{\varkappa+1}}{p_\varkappa},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Man hat nur zu setzen:

$$p_\varkappa = \frac{\varkappa!}{\varkappa^\varkappa},$$

also:

$$\frac{p_{\varkappa+1}}{p_\varkappa} = \frac{\varkappa^\varkappa}{(\varkappa+1)^\varkappa} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)^\varkappa}.$$

$$(44) \qquad \overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\varkappa]{\varkappa!\,|c_\varkappa|} \leqq \gamma.$$

Die angewendete Schlußweise bleibt aber bestehen, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird. Man findet dann genau, wie oben:

$$\frac{\varkappa}{e} \cdot \sqrt[\varkappa]{|c_\varkappa|} < \varepsilon \qquad \text{für: } \varkappa > \varepsilon \cdot R_\varepsilon,$$

also:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{\varkappa}{e} \sqrt[\varkappa]{|c_\varkappa|} = 0,$$

und schließlich mit Benützung der angeführten Hilfsformel:

$$(45) \qquad \lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\varkappa!\,|c_\varkappa|} = 0.$$

6. Dies vorausgeschickt können wir jetzt die zu Anfang von Nr. 5 aufgestellte Frage durch den folgenden Satz beantworten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ eine ganz transzendente Funktion von $\dfrac{x}{1-x}$ definiert[1]*), besteht darin, daß die a_ν sich in der Form $g(\nu)$ darstellen lassen, wo $g(y)$ eine höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende ganze transzendente Funktion bedeutet*[2]).

---

[1]) Anders ausgesprochen: eine eindeutige Funktion von x mit der einzigen und zwar wesentlich singulären Stelle $x = 1$. Eine solche ist zunächst in eine beständig konvergierende Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{1-x}$, also auch nach Potenzen von

$$\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{x}{1-x},$$

und zwar, wegen

$$\left(\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu\right)_{x=0} = 0,$$

ohne konstantes Glied entwickelbar.

[2]) Der betreffende Satz rührt im wesentlichen von Herrn G. Faber her. Vor ihm hat Herr L. Leau nur gezeigt, daß die Reihe $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$,

Beweis. Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit der fraglichen Bedingung. Sei also

$$G(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda\, b_\lambda \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1} \tag{46}$$

eine beständig (d. h. mit Ausschluß von $x = 1$) konvergierende Reihe, $\sum_1^\infty a_\nu x^\nu$ ihre Entwickelung in der Umgebung von $x = 0$, so ist also zu zeigen, daß eine dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende ganze Funktion $g(y)$ existiert, derart daß $g(\nu) = a_\nu$.

Entwickelt man, um zunächst die Form der Koeffizienten a_ν zu bestimmen, jedes Glied von $G(x)$ nach Potenzen von x, so ergibt sich (vgl. mutatis mutandis Gleichung (6), p. 16):

$$\begin{aligned} G(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda\, b_\lambda \sum_0^\infty{}^\nu\, (\nu+\lambda)_\lambda \cdot x^{\nu+\lambda+1} &= \sum_0^\infty{}^\lambda\, b_\lambda \sum_\lambda^\infty{}^\nu\, (\nu)_\lambda \cdot x^{\nu+1} \\ &= \sum_1^\infty{}^\nu\, a_\nu\, x^\nu, \end{aligned} \tag{47}$$

---

falls $g(y)$ von niederer Ordnung als der ersten, auf dem Einheitskreise lediglich die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt (Journ. de Math. (5), 5 [1899], p. 388). Herr Faber hat diese Aussage dahin präzisiert, daß die durch jene Reihe definierte analytische Funktion überhaupt nur die (sc. wesentlich) singuläre Stelle $x = 1$ besitzt (Math. Ann. 57 [1903], p. 374) und hat insbesondere auch die Umkehrbarkeit des betreffenden Satzes nachgewiesen (a. a. O.) p. 378). Mit diesem letzteren Beweise stimmt der im Texte gegebene für die Notwendigkeit der in Frage kommenden Bedingung im wesentlichen überein. Immerhin darf vielleicht hervorgehoben werden, daß der betreffende Beweisansatz, der bei Herrn Faber mehr wie ein sehr sinnreicher und glücklicher Kunstgriff erscheint, in dem vorliegenden Zusammenhange sich mit einer gewissen logischen Notwendigkeit ganz von selbst ergibt. Andererseits dürfte der im Texte gegebene Beweis für den hinreichenden Charakter der fraglichen Bedingung noch etwas einfacher sein, als der entsprechende Fabersche und besitzt außerdem den Vorzug, daß er zugleich einen expliziten Ausdruck für die ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$ mit dem Anfangs-Element $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$ liefert.

wo:

$$
\begin{aligned}
a_\nu &= \sum_0^\nu{}^\lambda (\nu)_\lambda \cdot b_\lambda \\
(48) \qquad &= b_0 + b_1 \cdot \frac{\nu}{1} + b_2 \frac{\nu \cdot (\nu-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + b_\nu \frac{\nu \cdot (\nu-1) \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots (\nu-1) \cdot \nu}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man jetzt mit $g(x)$ zunächst rein formal die folgende Reihe:

$$
(49) \quad g(y) \equiv b_0 + b_1 \frac{y}{1} + b_2 \frac{y \cdot (y-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + b_\nu \frac{y \cdot (y-1) \ldots (y-\nu+1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} + \cdots,
$$

so besteht zunächst die Identität:

$$
g(\nu) = a_\nu,
$$

und es bleibt zum Beweise der ausgesprochenen Behauptung nur zu zeigen, daß die Reihe (49) beständig konvergiert und ihre sodann unter $g(y)$ zu verstehende Summe für alle hinlänglich großen y einer Beziehung von der Form

$$
|g(y)| < e^{\varepsilon \cdot |y|}
$$

genügt.

Wird nun eine positive Zahl r beliebig groß angenommen, so hat man für $|y| \leq r$:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{y \cdot (y-1) \ldots (y-\nu+1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \right| &< \frac{r \cdot (r+1) \ldots (r+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \\
&= r \left(1 + \frac{r-1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{r-1}{\nu}\right) < r^\nu
\end{aligned}
$$

$\left(\text{sofern nur: } 1 + \frac{r-1}{2} < r, \text{ d. h. } r > 1\right)$, woraus unmittelbar hervorgeht, daß die Reihe (49) beständig und in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergiert, folglich eine ganze transzendente Funktion $g(y)$ zur Summe hat. Setzt man sodann:

$$
g(y) = g_m(y) + \sum_{m+1}^{\infty}{}^\nu b_\nu \frac{y(y-1) \ldots (y+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu},
$$

wo also $g_m(y)$ eine ganze Funktion m^{ten} Grades bedeutet, so folgt zunächst:

$$|g(y)| < |g_m(y)| + \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{|y| \cdot (|y|+1) \ldots (|y|+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \cdot |b_\nu|.$$

Da die b_ν als Koeffizienten der beständig konvergierenden Reihe (46) der Grenzbedingung $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0$ genügen, so läßt sich zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ die Zahl m so fixieren, daß:

$$\sqrt[\nu]{|b_\nu|} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \qquad \text{für: } \nu > m,$$

und daher:

$$|g(y)| < |g_m(y)| + \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{|y| \cdot (|y|+1) \ldots (|y|+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^\nu$$

$$(50) \qquad < |g_m(y)| + \left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)^{|y|} = |g_m(y)| + (1+\varepsilon)^{|y|}$$

$$= e^{\varepsilon \cdot |y|} \left\{ \frac{|g_m(y)|}{e^{\varepsilon \cdot |y|}} + \left(\frac{1+\varepsilon}{e^\varepsilon}\right)^{|y|} \right\}.$$

Da $\frac{1+\varepsilon}{e^\varepsilon} < 1$, also: $\lim_{|y|=\infty} \left(\frac{1+\varepsilon}{e^\varepsilon}\right)^{|y|} = 0$, ebenso auch

$$\lim_{|y|=\infty} \frac{g_m(y)}{e^{\varepsilon \cdot |y|}} = 0,$$

so läßt sich R so fixieren, daß die Klammergröße des letzten Ausdruckes (50) für $|y| > R$ die Einheit nicht übersteigt und somit, wie zu beweisen war,

$$(51) \qquad |g(y)| < e^{\varepsilon \cdot |y|} \qquad \text{für: } |y| > R$$

sich ergibt. Darnach erscheint also diese Beziehung in der Tat als eine notwendige Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu g(\nu) \cdot x^\nu$ eine ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$ definiert.

Um jetzt nachzuweisen, daß diese Bedingung auch eine hinreichende ist, wenden wir auf die fragliche Reihe

$$(52)\quad f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu g(\nu)\cdot x^\nu = x\cdot\sum_0^\infty{}^\nu g(\nu+1)\cdot x^\nu, \quad \text{wo: } g(y) = \sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa y^\varkappa,$$

die Eulersche Transformation (mit dem Parameter $s = 1$) an, so daß sich (nach p. 16, 17, Gleichung (7) und (8)) ergibt:

$$(53)\qquad f(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$\begin{aligned} A_\lambda \equiv A_\lambda(1) &= \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu\cdot(\lambda)_\nu\cdot g(\nu+1) \\ &= \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu\cdot(\lambda)_\nu\cdot\sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa(\nu+1)^\varkappa \\ &= \sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu\cdot(\lambda)_\nu\cdot(\nu+1)^\varkappa, \end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung (23), p. 24:

$$A_\lambda = \sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa\cdot A_\lambda^{(\varkappa)},$$

wo die $A_\lambda^{(\varkappa)}$ a. a. O. diskutierten Eigenschaften besitzen. Darnach ist aber (s. p. 25, Gleichung (26)):

$$A_\lambda^{(\varkappa)} = 0 \qquad \text{für: } \varkappa < \lambda,$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$(54)\qquad A_\lambda = \sum_\lambda^\infty{}^\varkappa c_\varkappa\cdot A_\lambda^{(\varkappa)}.$$

Da $g(y)$ nach Voraussetzung höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört und infolgedessen auf Grund des Hilfssatzes der vorigen Nummer (p. 18, Gleichung (45)):

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\varkappa!\,|c_\varkappa|} = 0,$$

so läßt sich eine untere Schranke für λ so fixieren, daß für $\varkappa > \lambda$:

$$\sqrt[\varkappa]{\varkappa!\,|c_\varkappa|} < \varepsilon, \qquad \text{also: } |c_\varkappa| < \frac{\varepsilon^\varkappa}{\varkappa!}$$

und daher nach Gleichung (27), p. 25[1]):

$$|A_\lambda| < \sum_\lambda^\infty{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} A_\lambda^{(\varkappa)} \cdot \varepsilon^\varkappa = e^\varepsilon (e^\varepsilon - 1)^\lambda,$$

also zunächst:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} < e^\varepsilon - 1$$

und, da es freisteht ε unbegrenzt zu verkleinern, schließlich:

(55)
$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} = 0.$$

Somit ist die durch die Eulersche Transformation aus $\sum_1^\infty{}^\nu g(\nu) \cdot x^\nu$ hervorgegangene Reihe $\sum_1^\infty{}^\lambda A_\lambda \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1}$ eine ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$, womit der ausgesprochene Satz nunmehr bewiesen ist.

7. Auch wenn die Koeffizienten der Reihe $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$ nicht höchstens dem Minimaltypus, sondern einem Typus $\gamma > 0$ der ersten Ordnung angehören, lassen sich gewisse Aussagen über die Singularitäten der durch jene Reihe definierten analytischen Funktion machen. Dabei mag noch vorausgesetzt werden, daß die Beziehung $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} = 1$ stattfindet, also die Reihe $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$ wieder den Konvergenzradius 1 besitzt. (NB. Das letztere würde nämlich aus der bloßen Zugehörigkeit von $g(y)$ zum Typus γ der ersten Ordnung noch nicht folgen: denn aus $|g(\nu)| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot\nu}$ ließe sich nur schließen, daß $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} \leqq e^\gamma$. Andererseits kann sehr wohl $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} = 1$ sein, ohne daß

[1]) Man könnte auch statt (27) die Ungleichung (29), p. 26 benützen. Dann ergibt sich:

$$|A_\lambda| < e(e-1)^\lambda \cdot \sum_\lambda^\infty{}^\varkappa \varepsilon^\varkappa = \frac{e}{1-\varepsilon} \left((e-1)\varepsilon\right)^\lambda \quad \text{usw.}$$

bei Berücksichtigung ganz beliebiger Werte von y eine andere Beschränkung, als die durch die Ungleichung $|g(y)| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|y|}$ gegebene besteht. Man setze z. B. $g(y) = e^{\gamma y i}$, so wird für alle positiven y, insbesondere also auch für $y = \nu$, $|g(y)| = 1$ und daher $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} = 1$; dagegen für negativ-imaginäre y, also $y = -i \cdot |y|$, ergibt sich: $g(-i|y|) = e^{\gamma \cdot |y|}$, so daß $g(y)$ wirklich dem Typus γ der ersten Ordnung angehört.)

Es besteht nun der folgende Satz:

Ist $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} = 1$, *außerdem* $g(y) = \sum_0^\infty{}_\varkappa\, c_\varkappa y^\varkappa$ *vom Typus* $\gamma = \lg\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)$ *der ersten Ordnung, so ist* $f(x) = \sum_1^\infty{}_\nu\, g(\nu) \cdot x^\nu$ *eindeutig und regulär fortsetzbar über die Halbebene links von der Vertikalen durch den Punkt* $x = \frac{1}{2}$, *wenn* $\varrho = 1$; *ebenso über das ganze Gebiet außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt* $\frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1}$ *und dem Radius* $\frac{\varrho}{\varrho^2 - 1}$, *wenn* $\varrho > 1$.

Auf Grund der vorausgesetzten Zugehörigkeit von $g(y)$ zum Typus γ der ersten Ordnung und des Hilfssatzes p. 36 (s. die Fußnote zu Gleichung (44)) hat man nämlich:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\varkappa!\,|c_\varkappa|} = \gamma$$

und somit, bei Annahme einer hinlänglich großen unteren Schranke für λ, sobald $\varkappa > \lambda$:

$$|c_\varkappa| = \frac{1}{\varkappa!}(\gamma + \varepsilon_\varkappa)^\varkappa \qquad (\text{wo: } \lim_{\varkappa=\infty} \varepsilon_\varkappa = 0).$$

Wird dann wiederum $\sum_1^\infty{}_\nu\, g(\nu) \cdot x^\nu$ vermittelst der Eulerschen Methode in $\sum_0^\infty{}_\lambda\, A_\lambda \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1}$ übergeführt, so hat man, wie in der vorigen Nummer (s. Gleichung (54)):

$$
\begin{aligned}
|A_\lambda| &= \left|\sum_\lambda^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \cdot A_\lambda^{(\varkappa)}\right| \\
&= \sum_\lambda^\infty{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa!} A_\lambda^{(\varkappa)} \cdot (\gamma + \varepsilon_\varkappa)^\varkappa = e^{\gamma+\varepsilon_\varkappa}(e^{\gamma+\varepsilon_\varkappa} - 1)^\lambda \text{ (s. p. 25, Gl. (27))}
\end{aligned}
$$

und daher:

$$
\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} < e^\gamma - 1 = \frac{1}{\varrho}. \tag{56}
$$

Alles Weitere ergibt sich dann aber unmittelbar aus den Betrachtungen des § 1, insbesondere aus Gleichung (18) und (19), p. 21.

8. Der Satz der vorletzten Nummer gestattet gewisse schon von Herrn Faber[1]) bemerkte Verallgemeinerungen, die ich hier nur anführe, um daran noch eine bemerkenswerte Folgerung zu knüpfen.

Hat die Funktion $f(x)$ mit dem Anfangs-Element $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ statt $x = 1$ die einzige singuläre Stelle $x = a$, also $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu a^\nu z^\nu$ wieder die einzige singuläre Stelle $z = 1$, so hat man:

$$
a_\nu a^\nu = g(\nu), \qquad \text{also: } a_\nu = \left(\frac{1}{a}\right)^\nu \cdot g(\nu),
$$

wo $g(y)$ eine ganze Funktion, und zwar eine rationale vom Grade m, wenn a ein Pol $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $f(x)$, eine höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende transzendente, wenn a eine wesentlich singuläre Stelle — und umgekehrt.

Ist nun $f_a(x)$ eine eindeutige Funktion, welche im Endlichen nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ hat, so läßt sich mit Hilfe des Laurentschen Satzes jeder der Stellen $a_\varkappa$ eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion $G_\varkappa\left(\frac{1}{x - a_\varkappa}\right)$ zuordnen, derart daß

[1]) A. a. O., p. 377, 380.

$f(x) - \sum_1^p{}^{\varkappa}\, G_\varkappa\left(\frac{1}{x - a_\varkappa}\right)$ im Endlichen durchweg regulär und somit eine ganze Funktion $G(x)$ (eventuell eine Konstante) ist, d. h. man hat:

$$f_a(x) = \sum_1^p{}^{\varkappa}\, G_\varkappa\left(\frac{1}{x - a_\varkappa}\right) + G(x).$$

Da sodann $G_\varkappa\left(\frac{1}{x - a_\varkappa}\right)$ in der Umgebung von $x = 0$ eine Entwickelung von der Form $\sum\left(\frac{1}{a_\varkappa}\right)^\nu \cdot g_\varkappa(\nu) \cdot x^\nu$, $G(x)$ eine solche von der Form

$$\sum a'_\nu x^\nu \quad \left(\text{wo } \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|a'_\nu|} = 0\right)$$

besitzt, so ergibt sich, daß die Koeffizienten der Entwickelung $f_a(x) = \sum_1^\infty{}^\nu\, a_\nu x^\nu$ [1]) die Form haben:

$$\text{(57a)} \qquad a_\nu = \sum_1^p{}^{\varkappa} \left(\frac{1}{a_\varkappa}\right)^\nu \cdot g_\varkappa(\nu) + a'_\nu.$$

Umgekehrt definiert eine Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^\nu\, a_\nu x^\nu$, deren Koeffizienten sich in diese Form setzen lassen [2]), eine in der ganzen Ebene eindeutige und bis auf die p singulären Stellen $x = a_\varkappa$ $\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ und eventuell [3]) $x = \infty$ reguläre Funktion.

Ist nun $f_b(x)$ eine Funktion derselben Art mit den singulären Stellen β_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots q)$, zu denen eventuell noch $x = \infty$ hinzutreten kann, so hat man, wenn gesetzt wird: $f_b(x) = \sum_1^\infty{}^\nu\, b_\nu x^\nu$, analog:

$$\text{(57b)} \quad b_\nu = \sum_1^p{}^{\lambda} \left(\frac{1}{\beta_\lambda}\right)^\nu \cdot h_\lambda(\nu) + b'_\nu \quad \left(\text{wo: } \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|b'_\nu|} = 0\right),$$

---

1) Es ist offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $f_a(0) = 0$ annehmen.

2) Dabei ist natürlich unter $g_\varkappa(y)$ allemal eine rationale oder höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende transzendente ganze Funktion zu verstehen.

3) D. h. wenn die a'_ν nicht sämtlich Null sind.

unter $h_\lambda(y)$ ganze Funktionen derselben Art, wie die $g_\varkappa(y)$ verstanden.

Alsdann lassen sich aber auch über den Charakter und die Singularitäten derjenigen Funktion $F(x)$, welche definiert ist durch das Funktions-Element:

$$(58) \qquad F(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu,$$

ganz bestimmte Aussagen machen. Man hat zunächst:

$$(59) \begin{cases} a_\nu b_\nu = \sum_1^q{}^\lambda \sum_1^p{}^\varkappa \left(\dfrac{1}{\alpha_\varkappa \beta_\lambda}\right)^\nu \cdot g_\varkappa(\nu) \cdot h_\lambda(\nu) + c'_\nu \\ \text{wo:} \\ c'_\nu = b'_\nu \sum_1^p{}^\varkappa \left(\dfrac{1}{\alpha_\varkappa}\right)^\nu \cdot g_\varkappa(\nu) + a'_\nu \sum_1^q{}^\lambda \left(\dfrac{1}{\beta_\lambda}\right)^\nu \cdot h_\lambda(\nu) + a'_\nu b'_\nu. \end{cases}$$

Da nun jedes der Produkte $g_\varkappa(\nu) \cdot h_\lambda(\nu)$ wieder eine ganze Funktion ist, und zwar eine rationale vom Grade $m_\varkappa + n_\lambda$, wenn $g_\varkappa(y)$ eine solche vom Grade $m_\varkappa$, $h_\lambda(y)$ vom Grade n_λ, dagegen in jedem anderen Falle eine transzendente, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört; da ferner c'_ν offenbar der Relation $\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0$ genügt, so folgt, daß $F(x)$ eine eindeutige Funktion ist, welche im Endlichen keine andere singulären Stellen besitzen kann, als solche von der Form $x = \alpha_\varkappa \beta_\lambda$. Und zwar wird irgend eine bestimmte dieser Stellen, z. B. $\alpha_1 \beta_1$, allemal wirklich eine singuläre sein, wenn für keine andere der Stellen $\alpha_\varkappa \beta_\lambda$ die Gleichung $\alpha_\varkappa \beta_\lambda = \alpha_1 \beta_1$ erfüllt ist. Sollte dies nämlich der Fall sein, so ist es möglich (aber keineswegs notwendig), daß die von den Bestandteilen

$$\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{\alpha_1 \beta_1}\right)^\nu \cdot g_1(\nu) \cdot h_1(\nu) \cdot x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{\alpha_\varkappa \beta_\lambda}\right)^\nu \cdot g_\varkappa(\nu) \cdot h_\lambda(\nu) \cdot x^\nu$$

der Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ herrührenden Singularitäten sich gegenseitig aufheben. Zugleich erkennt man, daß die Stelle $\alpha_1 \beta_1$ ein Pol von der Ordnung $m + n + 1$, wenn α_1 und β_1 Pole von der m^{ten} bzw. n^{ten} Ordnung sind[1]); daß dagegen $\alpha_1 \beta_1$ eine wesentlich singuläre Stelle, wenn mindestens eine der Stellen α_1, β_1 diesen Charakter besitzt.

Man findet auf diese Weise den folgenden besonderen Fall eines weiter unten (s. § 4) noch unter allgemeineren Voraussetzungen zu erörternden Hadamardschen Satzes:

Werden durch die Funktions-Elemente $\sum a_\nu x^\nu$, $\sum b_\nu x^\nu$ zwei eindeutige Funktionen definiert, deren jede im Endlichen nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen $\alpha_\varkappa$ bzw. β_λ besitzt, so definiert auch die Potenzreihe $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ eine eindeutige Funktion, deren singuläre Stellen ausschließlich von der Form $\alpha_\varkappa \beta_\lambda$ sind. Dabei ist $\alpha_\varkappa \beta_\lambda$ ein Pol, wenn beide Stellen $\alpha_\varkappa$ und β_λ Pole sind, andernfalls eine wesentlich singuläre Stelle; kann jedoch eine Stelle regulären Verhaltens sein, wenn für irgend ein Wertepaar $\varkappa'$, λ' die Beziehung stattfindet: $\alpha_{\varkappa'} \beta_{\lambda'} = \alpha_\varkappa \beta_\lambda$.

§ 3.

Funktionen, welche in der Ebene mit dem geradlinigen Schnitte $(1 \ldots + \infty)$ regulär sind.

1. Definiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ eine analytische Funktion $f(x)$, welche in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist, so folgt aus den Betrachtungen des § 1, daß $f(x)$ in jeder den Nullpunkt enthaltenden Halbebene, welche von einer durch den Punkt 1 gehenden Geraden begrenzt wird, mit Hilfe der Eulerschen Transformation dargestellt werden kann. Wir fanden nun früher die Beziehung (Gl. (18), p. 21)

$$\lim_{\lambda = \infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1$$

[1]) Eine Annullierung des Poles $\alpha_1 \beta_1$ ist natürlich nur dann möglich, wenn für irgend ein anderes Wertepaar $\varkappa, \lambda$ außer der Beziehung $\alpha_\varkappa \beta_\lambda = \alpha_1 \beta_1$ auch noch feststeht, daß $\alpha_\varkappa$, β_λ gleichfalls Pole, und daß überdies: $m_\varkappa + n_\lambda = m + n$, wenn $m_\varkappa + 1$ und $n_\lambda + 1$ deren Ordnungszahlen bezeichnen.

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum a_\nu x^\nu$ regulär fortsetzbar ist über eine den Nullpunkt enthaltende Halbebene, deren Begrenzung eine auf der Strecke $\overline{0s}$ im Mittelpunkte senkrechte Gerade bildet. Diese letztere muß andererseits den Einheitskreis schneiden, im äußersten Falle ihn berühren, da ja keinesfalls der Einheitskreis als wahrer Konvergenzbereich der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ ganz in das Innere jener Halbebene fallen kann. Soll die Grenzgerade durch den Punkt 1 gehen, also $\overline{0s}$ durch eine vom Punkte 1 aus gefällte Senkrechte bzw., wenn s reell, im Punkte 1 halbiert werden, so hat man offenbar $|s-1|=1$, also:

$$s = 1 + e^{\vartheta i} = 2\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{\vartheta}{2}i}. \tag{60}$$

Ist sodann die oben angeführte Bedingung erfüllt für alle ϑ des Intervalls $-\pi < \vartheta < +\pi$, so daß also jede durch den Punkt 1 gehende Gerade als Grenzlinie dienen kann (abgesehen von der reellen Achse, da ja die Wahl $\vartheta = \pm\pi$, also $s = 0$, bei der Eulerschen Transformation ausgeschlossen erscheint), so folgt, daß $\sum a_\nu x^\nu$ regulär fortsetzbar ist über die ganze Ebene mit Ausnahme der Strecke $(1\ldots+\infty)$. Da im übrigen $A_\lambda(s)$ für den ausgeschlossenen Wert $s=0$ sich auf das einzige Glied a_0 reduziert und demgemäß die Bedingung

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}}\sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1$$

in diesem Falle an und für sich erfüllt ist, so kann man das Resultat der vorstehenden Betrachtung in folgender Weise aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ regulär fortsetzbar ist über die ganze Ebene mit Ausnahme des geradlinigen Schnittes $(1\ldots+\infty)$, *besteht in der Beziehung:*

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}}\left|\sum_0^\lambda{}_\nu\,(-1)^\nu\cdot(\lambda)_\nu 2^\nu e^{\nu\frac{\vartheta}{2}i}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^\nu\cdot a_\nu\right|^{\frac{1}{\lambda}} = 1 \tag{61}$$

für $-\pi < \vartheta < +\pi$.

2. Dieses Resultat soll zunächst angewendet werden auf Reihen von der Form $\sum (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu$, wo $\varkappa$ eine natürliche, a eine beliebige komplexe Zahl einschließlich der Null, jedoch mit Ausschluß der ganzen positiven bedeutet. Da nach Annahme einer beliebigen natürlichen Zahl p die Beziehung besteht:

$$\sum_1^\infty{}_\nu (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu = \sum_1^{p-1}{}_\nu (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu + x^p \cdot \sum_0^\infty{}_\nu (p + \nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu,$$

so steht es offenbar frei, für die weitere Betrachtung die Reihenform $\sum_0^\infty{}_\nu (p + \nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu$ zu Grunde zu legen, wobei p mindestens so groß angenommen werden mag, daß der reelle Teil von $p - a$ positiv ausfällt. Durch Anwendung der Eulerschen Transformation ergibt sich sodann:

$$(62) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu (p + \nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu = \frac{s}{s - x} \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda^{(\varkappa)}(s) \cdot \left(\frac{x}{s - x}\right)^\lambda,$$

wo:

$$(63) \qquad A_\lambda^{(\varkappa)}(s) = \sum_0^\lambda{}_\nu (-1)^{\lambda - \nu} (\lambda)_\nu \cdot (p + \nu - a)^{-\varkappa} \cdot s^\nu.$$

Nun ist:

$$(n - a)^{-1} \cdot e^{-(n-a) \cdot t} = \int_t^\infty e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt$$

$$(n - a)^{-2} \cdot e^{-(n-a) \cdot t} = \int_t^\infty dt \int_t^\infty e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt \text{ usf.,}$$

sofern nur n so groß angenommen wird, daß der reelle Teil von $n - a$ positiv ausfällt.

Führt man die Bezeichnungen ein:

$$\int_t^\infty \varphi(t) \cdot dt = \int_t^{\infty(1)} \varphi(t) \cdot dt$$

$$\int_t^\infty dt \int_t^\infty \varphi(t) \cdot dt = \int_t^{\infty(2)} \varphi(t) \cdot dt$$

und definiert allgemein:

$$\int_t^{\infty(\varkappa)} \varphi(t) \cdot dt = \int_t^\infty dt \int_t^{\infty(\varkappa-1)} \varphi(t) \cdot dt,$$

so ergibt sich also:

$$(n-a)^{-\varkappa} \cdot e^{-(n-a)\cdot t} = \int_t^{\infty(\varkappa)} e^{-(n-a)\cdot t} \cdot dt$$

und daher schließlich:

$$(64) \qquad (n-a)^{-\varkappa} = \left(\int_t^{\infty(\varkappa)} e^{-(n-a)\cdot t} \cdot dt\right)_{t=0}.$$

Mit Benützung dieser Formel geht nun der Ausdruck (63) in den folgenden über:

$$(65) \qquad \begin{aligned} A_\lambda^{(\varkappa)}(s) &= \left(\int_t^{\infty(\varkappa)} \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^{\lambda-\nu} \cdot (\lambda)_\nu \cdot e^{-(p+\nu-a)\cdot t} \cdot s^\nu \cdot dt\right)_{t=0} \\ &= \left(\int_t^{\infty(\varkappa)} (-1)^\lambda \cdot e^{-(p-a)\cdot t} \cdot (1-s\,e^{-t})^\lambda \cdot dt\right)_{t=0}. \end{aligned}$$

Wird jetzt gemäß Gleichung (60) $s = 1 + e^{\vartheta i}$ angenommen, so hat man bei reellem u:

$$\begin{aligned} |1-su|^2 &= (1-u-u\cos\vartheta)^2 + u^2\sin^2\vartheta \\ &= 1 + 2u^2 + 2u^2\cos\vartheta - 2u(1+\cos\vartheta) \\ &= 1 - 4u(1-u)\cdot\cos^2\frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

und daher:

$$(66) \qquad |1-su| < 1, \qquad \text{wenn: } 0 < u < 1,$$

insbesondere also für $u = e^{-t}$ und $0 < t < +\infty$.

Somit findet man für $s = 1 + e^{\vartheta i}$ aus Gleichung (65) mit Benützung von Gleichung (64):

$$(67) \qquad |A_\lambda^{(\varkappa)}(1+e^{\vartheta i})| < \left(\int_t^{\infty(\varkappa)} e^{-(p-a)\cdot t} \cdot dt\right)_{t=0} = (p-a)^{-\varkappa}.$$

Die $|A_\lambda^{(\varkappa)}(1+e^{\vartheta i})|$ bleiben also unter einer von λ und ϑ unabhängigen Schranke, mithin wird durch das Funktions-Element $\sum_0^\infty{}^\nu (p+\nu-a)^{-\varkappa}\cdot x^\nu$ (also schließlich auch durch $\sum_1^\infty{}^\nu (\nu-a)^{-\varkappa}\cdot x^\nu$) eine analytische Funktion definiert, welche nach Einführung des geradlinigen Schnittes $(1 \ldots +\infty)$ durchweg regulär ist und bei $s = 1 + e^{\vartheta i}$ in jeder durch Wahl von ϑ zu fixierenden Halbebene durch die Reihe (62) dargestellt wird.

Im übrigen wurde das vorstehende Resultat in der Hauptsache nur deshalb mit Hilfe der eben benützten Methode hergeleitet, um daran (insbesondere an die Ungleichung (67)) eine wesentliche Verallgemeinerung zu knüpfen. Hätte es sich nur um die Aussage gehandelt, daß die betreffende Funktion in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist, so ließe sich diese kürzer auf dem folgenden Wege begründen, welcher zugleich erkennen läßt, daß jener Schnitt ein „künstlicher" ist, d. h. nur dazu dient, die Eindeutigkeit der Funktion herzustellen, während nur die Punkte 1 und ∞ wirklich singuläre sind.

Es werde gesetzt:

$$f_\varkappa(x) = \sum_1^\infty {}_\nu (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots) \tag{68}$$

und mit $f_\varkappa(x)$ zugleich die analytische Fortsetzung dieser Potenzreihe bezeichnet. Alsdann hat man:

$$x \cdot f'_\varkappa(x) = \sum_1^\infty {}_\nu\, \nu (\nu - a)^{-\varkappa} \cdot x^\nu$$

und daher:

$$x \cdot f'_\varkappa(x) - a f_\varkappa(x) = \sum_1^\infty {}_\nu (\nu - a)^{-(\varkappa-1)} = f_{\varkappa-1}(x). \tag{69}$$

Macht man die Substitution:

$$f_\varkappa(x) = e^{a \cdot \lg x} \cdot \varphi_\varkappa(x), \tag{70}$$

so wird:

$$f'_\varkappa(x) = e^{a \cdot \lg x} \left(\varphi'_\varkappa(x) + \frac{a}{x} \varphi_\varkappa(x) \right),$$

und es geht daher die Gleichung (69) in die folgende über:

$$\varphi'_\varkappa(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-a \cdot \lg x} \cdot f_{\varkappa-1}(x). \tag{71}$$

Da $e^{-a \cdot \lg x}$ nur die singulären Stellen 0 und ∞ hat, so folgt aus Gleichung (71), daß $\varphi'_\varkappa(x)$, also auch $\varphi_\varkappa(x)$ und schließlich $f_\varkappa(x) = e^{-a \lg x} \cdot \varphi_\varkappa(x)$ keine anderen singulären Stellen haben kann, wie $f_{\varkappa-1}(x)$ nebst den Stellen 0 und ∞.

Da aber $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ nur die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt, so erkennt man, daß $f_\varkappa(x)$ keine anderen Singularitäten haben kann, als die Stellen $0, 1, \infty$. Von diesen scheidet die Stelle $x = 0$ zunächst aus, sobald man $f_\varkappa(x)$ lediglich in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene betrachtet und kommt erst als singuläre Stelle zum Vorschein, wenn man $f_\varkappa(x)$ über den Schnitt fortsetzt[1]).

3. Das zuletzt entwickelte Resultat läßt sich ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß an die Stelle der Koeffizienten $(\nu - a)^{-\varkappa}$ Polynome von der Form $\sum_0^m{}^\varkappa c_\varkappa (\nu - a)^{-\varkappa}$ treten. Zur Ausdehnung auf den noch allgemeineren Fall, daß jene Koeffizienten Potenzreihen von der Form $\sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa (\nu - a)^\varkappa$ sind, müßten offenbar noch andere Hilfsmittel herangezogen werden. Dagegen läßt sich mit Hilfe der Eulerschen Transformation leicht zeigen, daß auch unter der ebengenannten allgemeineren Voraussetzung eine Funktion erzeugt wird, die in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist.

Angenommen, es sei die Potenzreihe

(72) $$\mathfrak{P}(y) = \sum_1^\infty{}^\varkappa c_\varkappa y^\varkappa$$

konvergent für $|y| < r$, und es bedeute wiederum a eine ganz beliebige Zahl mit Ausschluß der ganzen positiven, p eine natürliche Zahl von der Beschaffenheit, daß $\left|\frac{1}{\nu - a}\right| < r$ für $\nu > p$, so daß also

---

1) Dies gilt, sobald a von Null verschieden, schon für $f_1(x)$. Für $a = 0$ hat man, wenn das Zeichen $\overline{\lg}$ den Fundamentalwert des Logarithmus bedeutet:

$$f_1(x) = \overline{\lg \frac{1}{1-x}} \pm 2 n \pi i,$$

so daß $f_1(x)$ nur die singulären Stellen 1 und ∞ besitzt; während $f_2(x)$, wegen $f_2'(x) = \frac{1}{x} \cdot f_1(x)$, auch die singuläre Stelle $x = 0$ hat, was dann offenbar auch für $f_\varkappa(x)$ bei $\varkappa > 2$ der Fall ist.

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \sum_1^\infty{}^\varkappa c_\varkappa (p-a)^{-\varkappa}$$

noch absolut konvergiert.

Ist sodann, zum mindesten für $\nu > p$:

$$a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu - a}\right),$$

so hat man:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^{p-1}{}^\nu a_\nu x^\nu + \sum_p^\infty{}^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu - a}\right) \cdot x^\nu$$

$$(73) \qquad = \sum_0^{p-1}{}^\nu a_\nu x^\nu + x^p \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+\nu-a}\right) \cdot x^\nu,$$

so daß also die analytische Fortsetzung $f(x)$ von $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ im wesentlichen nur abhängt von derjenigen der Funktion $\varphi(x)$, welche zunächst definiert ist durch:

$$(74) \quad \varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+\nu-a}\right) \cdot x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \left(\sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa (p+\nu-a)^{-\varkappa}\right) \cdot x^\nu.$$

Die Anwendung der Eulerschen Transformation ergibt sodann:

$$(75) \qquad \varphi(x) = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda,$$

wo:

$$A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^{\lambda-\nu} \cdot (\lambda)_\nu \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+\nu-a}\right) \cdot s^\nu$$

$$(76) \qquad = \sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^{\lambda-\nu} (\lambda)_\nu \cdot (p+\nu-a)^{-\varkappa} \cdot s^\nu$$

$$= \sum_1^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \cdot A_\lambda^{(\varkappa)}(s) \qquad \text{(s. Gleichung (63), p. 52).}$$

Da aber nach Ungleichung (67) für $s = 1 + e^{\vartheta i}$ sich ergibt:

$$(77) \qquad |A_\lambda(s)| < \sum_1^\infty{}^\varkappa |c_\varkappa| \cdot \left|\frac{1}{p-a}\right|^\varkappa,$$

so bleiben die $|A_\lambda(s)|$ unter einer von λ und ϑ unabhängigen endlichen Schranke, mithin ist $\varphi(x)$, also auch die Fortsetzung von $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ regulär in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene [1]).

(Beispiel: $a_\nu = \lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$. Da sodann:

$$\sum_1^\infty{}^\nu \lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \lg(\nu + 1) \cdot x^\nu - \sum_2^\infty{}^\nu \lg \nu \cdot x^\nu$$
$$= \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \sum_2^\infty{}^\nu \lg \nu \cdot x^\nu,$$

so folgt, daß auch die Reihe $\sum_2^\infty{}^\nu \lg \nu \cdot x^\nu$ über die längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist.)

4. Die Form der Koeffizienten $A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^\nu \cdot (\lambda)_\nu a_\nu \cdot s^\nu$ legt es nahe, besonders solche Fälle in Betracht zu ziehen, in denen die Koeffizienten a_ν sich durch distributive Operationen an einer ν^{ten} Potenz

$$\left(\text{wie } \nu^\varkappa = (D^{(\varkappa)} e^{\nu t})_{t=0}, \qquad \nu^{-\varkappa} = \left(\int_t^{\infty(\varkappa)} e^{-\nu t} \cdot dt\right)_{t=0}\right)$$

darstellen lassen, welche letztere dann, ohne die Komplikation merklich zu erhöhen, noch mit einem zwar von der distri-

[1]) Für den besonderen Fall $a = 0$ wurde der betreffende Satz auch von Herrn Faber (Math. Ann. 57 [1903], p. 371) bewiesen, nachdem Herr Leau (Journ. de Math. (5), 5 [1899], p. 387) nur gezeigt hatte, daß die Reihe $\sum \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu$ auf dem Einheitskreise die einzige singuläre Stelle 1 besitzt. Soviel ich übersehen kann, lassen sich die von den Herren Faber und Leau benützten, unter sich völlig verschiedenen Methoden nicht ohne weiteres auf den hier behandelten allgemeineren Fall übertragen. Dagegen gelang es Herrn Faber mit Hilfe seiner auf der Benützung komplexer Integration beruhenden Methode, das Resultat dahin zu präzisieren, daß der Schnitt $(1 \ldots + \infty)$ wieder nur ein „künstlicher" ist und daß nur die Stellen 1 und ∞ wirklich singuläre sind.

butiven Operation, nicht aber von ν abhängigen Faktor multipliziert sein könnte. Diese Bemerkung führt nun aber unmittelbar zur Formulierung und zum Beweise der folgenden Aussage, welche einen besonderen Fall eines von Herrn Hadamard[1]) mit weniger elementaren Hilfsmitteln bewiesenen Satzes darstellt:

Bedeutet $\varphi(t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen t, von der nur so viel feststeht, daß, für irgend ein $p \geqq 0$, $\varphi(t) \cdot t^p$ im Intervall $0 < t < 1$ schlechthin und absolut integrabel ist, und wird sodann gesetzt:

$$(78) \qquad a_\nu = \int_0^1 \varphi(t) \cdot t^{p+\nu} \cdot dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ regulär fortsetzbar über die längs $(1 \ldots +\infty)$ zerschnittene Ebene[2]).

Die Anwendung der Eulerschen Transformation

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{s}{s-x} \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda$$

liefert nämlich für die Koeffizienten $A_\lambda(s)$ den folgenden Ausdruck:

---

[1]) Journ. de Math. (4), 8 (1892), p. 158.

[2]) Einen Teil dieses Resultats, nämlich die reguläre Fortsetzbarkeit von $\sum a_\nu x^\nu$ über diejenige linke Halbebene, welche von der Vertikalen durch den Punkt 1 begrenzt wird, habe ich bei früherer Gelegenheit mit Hilfe der spezielleren Eulerschen Transformation $s = 2$ bewiesen (Math. Ann. 50 [1898], p. 459). Herr Faber hat dann in seiner Dissertation („Über Reihenentwickelungen analytischer Funktionen", München 1903) dieses Ergebnis zu der im Text gegebenen Form erweitert (a. a. O., p. 23). An die Stelle seines sehr sinnreichen, aber etwas umständlichen Beweisverfahrens tritt hier die bloße Verallgemeinerung der Eulerschen Transformation (d. h. die Wahl $s = 1 + e^{\vartheta i}$). — Übrigens läßt sich die im Texte gemachte Voraussetzung der absoluten Konvergenz des Integrals $\int_0^1 \varphi(t) \cdot t^p \cdot dt$ durch die der einfachen Konvergenz ersetzen, wie Herr Faber a. a. O. mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes gezeigt hat.

$$A_\lambda(s) = \int_0^1 \psi(t)\cdot t^p \sum_0^\lambda{}^\nu (-1)^{\lambda-\nu} (\lambda)_\nu\, s^\nu t^\nu \cdot dt$$
$$= (-1)^\lambda \int_0^1 \psi(t)\cdot t^p (1-st)^\lambda \cdot dt.$$

Wird wiederum $s = 1 + e^{\vartheta i}$ angenommen, so hat man (s. p. 53, Gleichung (66)):

$$|1 - st| \leq 1 \qquad \text{für: } 0 \leq t \leq 1$$

und daher:

$$(79) \qquad |A_\lambda(s)| \leq \int_0^1 |\psi(t)| \cdot t^p \cdot dt,$$

also unter einer von λ und ϑ unabhängigen Schranke bleibend, woraus dann wieder die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht. Zugleich besteht für jede den Schnitt $(1 \ldots + \infty)$ nicht enthaltende Halbebene eine die betreffende Funktion darstellende Reihenentwickelung nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{x}{s-x}$.

Beispiel 1. Der vorstehende Satz gestattet zunächst die folgende Verallgemeinerung des in Nr. 2 und 3 dieses Paragraphen abgeleiteten Resultats. Bedeutet β und γ beliebige positive oder auch komplexe Zahlen mit wesentlich positivem reellen Teil, so hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{\gamma^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^\infty u^{\beta-1} \cdot e^{-\gamma u} \cdot du = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{\gamma-1} \cdot dt,$$

wenn für die verschiedenen in dieser Relation auftretenden Potenzen durchweg die Hauptwerte gelten. Wird jetzt wiederum α beliebig komplex, p positiv ganzzahlig (eventuell auch $= 0$) und mindestens so groß angenommen, daß der reelle Teil von $p - \alpha$ positiv ausfällt, so folgt:

$$(80) \qquad \frac{1}{(p+\nu-\alpha)^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{p+\nu-\alpha-1} \cdot dt.$$

Das rechtsstehende Integral hat dann offenbar die für die Gültigkeit des eben bewiesenen Satzes erforderliche Form (s. Gleichung (78)). Man hat nämlich im vorliegenden Falle:

$$\varphi(t) \cdot t^p = \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{p-\alpha-1},$$

und diese Funktion wird zwar, wenn der als positiv vorausgesetzte reelle Teil von $p - \alpha$ kleiner als 1 sein sollte, für $t = 0$ unendlich groß, jedoch von niederer, als der ersten Ordnung, ist also daselbst absolut integrabel. Das nämliche gilt für $t = 1$, falls der gleichfalls als positiv vorausgesetzte reelle Teil von β kleiner als 1 sein sollte.

Somit ergibt sich, daß die Reihe $\sum \frac{1}{(p+\nu-\alpha)^\beta} \cdot x^\nu$, sofern nur β der Bedingung $\Re(\beta) > 0$ genügt[1]), über die ganze längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist.

Setzt man ferner für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$

$$a_\nu^{(\varkappa)} = \frac{1}{(p+\nu-\alpha)^{\varkappa\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\varkappa\beta)} \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\varkappa\beta-1} \cdot t^{p+\nu-\alpha-1} \cdot dt,$$

so liefert Ungleichung (79) mit Berücksichtigung von Gleichung (80) für die Koeffizienten $A_\lambda^{(\varkappa)}(s)$ bei $s = 1 + e^{\vartheta i}$ die Beziehung:

$$|A_\lambda^{(\varkappa)}(s)| < \left|\frac{1}{\Gamma(\varkappa\beta)}\right| \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\Re(\varkappa\beta)-1} \cdot t^{\Re(p-\alpha)-1} \cdot dt = \left(\frac{1}{\Re(p-\alpha)}\right)^{\varkappa\Re(\beta)}.$$

Die Vergleichung mit den Formeln (67), (77) zeigt dann, daß die auf die Koeffizientenform $a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu-\alpha}\right)$ angewendete Schlußweise sich auch unmittelbar auf $a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{(\nu-\alpha)^\beta}\right)$ anwenden läßt.

---

[1]) $\Re(\beta)$ bezeichnet den reellen Teil von β.

Beispiel 2. Es bedeute γ eine beliebige komplexe Zahl mit Ausschluß der ganzen negativen, und es werde m als ganze positive Zahl, eventuell auch als Null, so angenommen, daß $\Re(\gamma + m) > 0$. Alsdann genügt das folgende Integral (Eulersches Integral erster Gattung)

$$\int_0^1 (1-t)^{\gamma+m-1} \cdot t^{\nu-1} \cdot dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wiederum der Vorschrift von Gleichung (78) (nur ist hier $\nu - 1$ statt ν geschrieben, was offenbar erlaubt ist, da ja ausdrücklich $\nu > 1$ angenommen wurde). Mit Hilfe $(\nu - 1)$maliger partieller Integration ergibt sich aber:

$$\int_0^1 (1-t)^{\gamma+m-1} \cdot t^{\nu-1} \cdot dt$$

$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)\ldots 1}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+m+\nu-2)} \cdot \int_0^1 (1-t)^{\gamma+m+\nu-2} \cdot dt$$

$$= \frac{(\nu-1)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+m+\nu-1)}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(\nu-1)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+m+\nu-1)} \cdot x^\nu$$

wieder über die ganze längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist. Das gleiche gilt dann aber auch von den Reihen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x^2 \cdot \varphi'(x) \\ \varphi_2(x) &= x^2 \cdot \varphi_1'(x) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x) &= x^2 \cdot \varphi_{m-1}'(x) \end{aligned}$$

und schließlich von:

$$\varphi_{m+1}(x) = x \cdot \varphi_m'(x).$$

Dabei wird:

$$\varphi_{m+1}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(m+\nu)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+m+\nu-1)} x^{m+\nu}.$$

Multipliziert man die Glieder dieser Reihe mit dem Faktor

$$\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}$$

und fügt noch die entsprechenden Glieder mit den Potenzen $x, x^2, \ldots x^m$ hinzu, so erscheint

$$(81)\qquad f(x)=\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1\cdot 2\ldots\nu}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}\cdot x^\nu$$

als eine Reihe, welche eine in der ganzen längs $(1\ldots+\infty)$ zerschnittenen Ebene reguläre Fortsetzung besitzt.

5. Übrigens läßt sich der Satz der vorigen Nummer auch in einer mehr dem Hadamardschen Beweisverfahren nachgebildeten Weise und zwar, ohne den diesem letzteren zu Grunde liegenden Cauchyschen Funktions-Begriff zu benützen, sehr einfach begründen.

Aus

$$a_\nu=\int_0^1 \varphi(t)\cdot t^{p+\nu}\cdot dt$$

folgt zunächst für $|x|<1$:

$$(82)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu=\int_0^1 \varphi(t)\cdot t^p\cdot\frac{1}{1-tx}\cdot dt.$$

Wir zeigen nun, daß für alle x, welche nicht gerade die Gleichung $tx=1$ befriedigen, d. h., wegen $0<t<1$, für alle nicht der Strecke $(1\ldots+\infty)$ angehörigen Stellen x, das obige Integral eine analytische Funktion regulären Verhaltens darstellt. Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß für alle solchen x jenes Integral einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Ferner ergibt sich:

$$\frac{1}{1-t(x+h)}=\frac{1}{1-tx}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{th}{1-tx}}=\sum_0^\infty{}^\lambda\frac{t^\lambda}{(1-tx)^{\lambda+1}}\cdot h^\lambda,$$

falls: $\left|\dfrac{th}{1-tx}\right|<1$, also, wegen $0<t<1$, um so mehr, wenn:

$$|h|<|1-tx|.$$

Für jedes nicht der Strecke $(1 \ldots + \infty)$ angehörige x besitzt $|1 - tx|$ für alle t des Intervalls $0 \leq t \leq 1$ ein bestimmtes von 0 verschiedenes Minimum ϱ_x[1]), und es existiert somit zu jedem solchen x eine bestimmte Umgebung $|h| < \varrho_x$, für welche eine Reihenentwickelung von der angegebenen Form besteht. Daraus folgt aber weiter, daß für $|h| < \varrho_x$:

$$\int_0^1 \varphi(t) \cdot t^p \cdot \frac{dt}{1 - t(x+h)} = \sum_0^\infty {}^\lambda \int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{t^{\lambda+p} \cdot dt}{(1-tx)^{\lambda+1}} \cdot h^\lambda,$$

es stellt mithin das Integral $\int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{t^p \cdot dt}{1 - tx}$ eine in dem behaupteten Umfange reguläre analytische Funktion vor, welche infolge der für $|x| < 1$ bestehenden Beziehung (82) die analytische Fortsetzung von $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ liefert.

Zugleich ist bei dieser Beweismethode ersichtlich, daß man den geradlinigen Schnitt $(1 \ldots + \infty)$ eliminieren kann, wenn man $\varphi(t)$ noch der Beschränkung unterwirft, zum mindesten für eine gewisse Nachbarschaft der Strecke $(1 \ldots + \infty)$ eine analytische Funktion von t zu sein, und wenn man sodann das betreffende Integral über einen komplexen Weg (der im übrigen nur beliebig wenig von der geradlinigen Strecke $(0 \ldots 1)$ abzuweichen braucht) von 0 bis 1 erstreckt[2]). Daraus folgt dann, daß in Wahrheit nur die Punkte 1 und ∞ singuläre sind.

[1]) Ist x nicht reell, so ist offenbar ϱ_x nichts anderes, als der senkrechte Abstand des Strahles $\overline{0x}$ vom Punkte 1. Ist x reell und zwar $x < 0$, so hat man $\varrho_x = 1$, dagegen $\varrho_x = 1 - x$, wenn $0 < x < 1$.

[2]) Vgl. Hadamard, a. a. O., p. 160.

§ 4.

Über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit den Anfangs-Elementen $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ und $\sum a_\nu x^\nu$, $\sum b_\nu x^\nu$.

1. Es werde wiederum auf die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, deren Konvergenzradius wir jetzt als beliebig, etwa $= r_a$, voraussetzen wollen, die Eulersche Transformation angewendet, so hat man:

$$(83)\quad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda{}^\varkappa (-1)^{\lambda-\varkappa} \cdot (\lambda)_\varkappa a_\varkappa s^\varkappa.$$

Die transformierte Reihe konvergiert, wie in § 1, Nr. 1 gezeigt wurde, für eine gewisse Umgebung des Punktes $x = 0$ (absolut und) gleichmäßig, kann also, wenn man die einzelnen Glieder nach Potenzen von x entwickelt, auf Grund des Weierstraßschen Doppelreihensatzes auch wieder in eine Reihe nach Potenzen von x zurücktransformiert werden, welche dann mit der ursprünglichen identisch sein muß und somit durch Koeffizienten-Vergleichung eine Darstellung der a_ν durch die $A_\lambda(s)$ liefert. Da nun:

$$(84)\quad \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right)^{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda!} D_s^\lambda{}_x \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right) = \sum_\lambda^\infty{}^\nu (\nu)_\lambda \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{\nu-\lambda},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \sum_\lambda^\infty{}^\nu (\nu)_\lambda \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\nu \\ &= \sum_0^\infty{}^\nu \left(\sum_0^\nu{}^\lambda (\nu)_\lambda \cdot A_\lambda(s)\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\nu\end{aligned}$$

und daher:

$$(85)\quad a_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda (\nu)_\lambda \cdot A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^\nu.$$

Mit Hilfe dieser Identität kann man nun zu demselben Ergebnis, wie durch die Eulersche Transformation offenbar auch auf dem folgenden Wege gelangen. Durch Einführung der Darstellungsform (85) für die Koeffizienten a_ν gewinnt man zunächst die Identität:

$$(86) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \left(\sum_0^\nu{}^\lambda (\nu)_\lambda \cdot A_\lambda(s)\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\nu$$

und hieraus durch Vertauschung der Summationsfolge:

$$(87) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \sum_\lambda^\infty{}^\nu (\nu)_\lambda \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\nu.$$

Ersetzt man hier die innere, nur für $\left|\frac{x}{s}\right| < 1$ konvergierende Reihe durch den für $\left|\frac{x}{s}\right| < 1$ damit übereinstimmenden, im übrigen die analytische Fortsetzung jener Reihe bildenden Ausdruck (s. Gleichung (84)):

$$\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right)^{\lambda+1}, \text{ anders geschrieben: } \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda D^\lambda_{\frac{x}{s}} \frac{1}{1-\frac{x}{s}},$$

so ergibt sich:

$$(88) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot \frac{1}{\lambda!} D^\lambda_{\frac{x}{s}} \frac{1}{1-\frac{x}{s}},$$

also genau dieselbe Beziehung, wie durch die Eulersche Transformation (s. Gleichung (83)). Zugleich stellt dann die rechte Seite dieser Gleichung offenbar die analytische Fortsetzung der linken dar, soweit sie gleichmäßig konvergiert.

2. Es sei nun $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$ eine zweite, etwa für $|x| < r_b$ konvergierende Potenzreihe, und es werde mit $f_b(x)$ sowohl deren Summe, als auch ihre analytische Fortsetzung bezeichnet.

Man hat alsdann, wenn man für die a_ν zunächst wieder die identische Umformung (85) einführt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \left(\sum_0^\nu{}^\lambda (\nu)_\lambda \cdot A_\lambda(s)\right) \cdot b_\nu \left(\frac{x}{s}\right)^\nu,$$

und die Vertauschung der Summationsfolge liefert die (unmittelbar aus Gleichung (87) durch Substitution von $b_\nu x^\nu$ an Stelle von x^ν hervorgehende) Beziehung:

$$(89)\qquad \begin{aligned}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu &= \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \sum_\lambda^\infty{}^\nu (\nu)_\lambda \cdot b_\nu \left(\frac{x}{s}\right)^\nu \\ &= \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot D^\lambda_{\frac{x}{s}} \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu \left(\frac{x}{s}\right)^\nu.\end{aligned}$$

Ersetzt man hier wieder die zuletzt auftretende Reihe durch das eventuell auch deren analytische Fortsetzung darstellende Zeichen $f_b\left(\frac{x}{s}\right)$, so ergibt sich[1]):

$$(90)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda,$$

und die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt dann offenbar die analytische Fortsetzung der links stehenden dar, soweit sie in einem über deren Konvergenzkreis hinausragenden zusammenhängenden Bereiche gleichmäßig konvergiert.

[1]) Diese Formel kann als eine Verallgemeinerung der sogenannten Bernoullischen Reihenentwickelung angesehen werden, in welche sie unmittelbar übergeht, wenn man speziell

$$s = 1, \quad A_\lambda(1) = (-1)^{\lambda-1}$$

setzt. Alsdann wird nämlich (nach Gleichung (7), p. 16):

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{1-x} \cdot \sum_0^\infty{}^\lambda (-1)^{\lambda-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda = -1,$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu = -b_0 = -f_b(0),$$

und schließlich, wie behauptet:

$$f_b(x) - f_b(0) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot x^\lambda.$$

3. Wir betrachten zunächst einen Fall, welcher in besonders einfacher Weise gestattet, den Bereich gleichmäßiger Konvergenz für die transformierte Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (90) festzustellen.

Angenommen nämlich, die analytische Funktion $f_a(x)$ mit dem Anfangs-Element $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ habe die einzige singuläre Stelle $x = 1$. Nach den Ergebnissen von § 2, Nr. 2 (p. 24) und Nr. 6 (p. 40) ist alsdann $a_\nu = g(\nu)$, wo $g(y)$ eine ganze rationale oder höchstens dem Minimaltypus der ersten Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion bezeichnet. Zugleich hat man:

$$\sum_0^\infty{}^\nu g(\nu) x^\nu = \sum_0^{m+1}{}^\lambda A_\lambda(1) \cdot \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\lambda+1}} \quad \text{bzw.} \quad = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(1) \cdot \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\lambda+1}},$$

je nachdem $f_a(x)$ im Punkte $x = 1$ einen Pol $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder eine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Im ersten dieser beiden Fälle reduziert sich die Beziehung (90) auf die folgende:

$$(91) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu = \sum_0^{m+1}{}^\lambda A_\lambda(1) \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot x^\lambda,$$

welche sofort erkennen läßt, daß die analytische Funktion mit den Anfangs-Element $\sum g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu$ in jedem dem Existenzbereiche von $f_b(x)$ angehörigen endlichen Bereiche durch die rechts stehende Entwickelung dargestellt wird und daß sie im Endlichen die nämlichen Singularitäten besitzt, wie $f_b(x)$. Auch ist sie für $x = \infty$ noch regulär, wenn $f_b(x)$ daselbst regulär ist. In diesem Falle wird nämlich $(x^\lambda \cdot f_b^{(\lambda)}(x))_{x=\infty} = 0$ für $\lambda = 1, 2, 3 \ldots$ Somit erstreckt sich die analytische Fortsetzung von $\sum g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu$ über den ganzen Existenzbereich von $f_b(x)$ und sie besitzt überhaupt keine anderen Singularitäten wie $f_b(x)$.

Im zweiten Falle, wenn also $x = 1$ eine wesentlich singuläre Stelle für $f_a(x)$, nimmt die Relation (90) die Form an:

$$(92) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(1) \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot x^\lambda,$$

wobei die $A_\lambda(1)$ als Koeffizienten einer beständig konvergierenden Reihe der Beziehung

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(1)|} = 0$$

genügen. Daraus folgt aber, daß die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (92) absolut und gleichmäßig konvergiert in jedem endlichen Bereiche, für welchen

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!}\,|f_b^{(\lambda)}(x)|}$$

unter einer endlichen Schranke bleibt. Ist nun x irgend eine Stelle, für welche $f_b(x)$ sich regulär verhält, so hat man für eine gewisse Umgebung, etwa für $|h| < \varrho_x$:

$$f_b(x+h) = \sum_0^\infty{}^\lambda \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot h^\lambda$$

und daher:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!}\,|f_b^{(\lambda)}(x)|} = \frac{1}{\varrho_x}.$$

Für jeden abgeschlossenen Bereich solcher Stellen x besitzt dann ϱ_x ein von Null verschiedenes Minimum, so daß also die fragliche Reihe daselbst gleichmäßig konvergiert. Da im übrigen auch bezüglich des etwaigen Verhaltens an der Stelle $x = \infty$ das nämliche gilt, wie in dem zuvor betrachteten Falle, so gewinnt man schließlich das folgende Resultat:

Ist $g(y)$ eine ganze rationale oder höchstens dem Minimaltypus der ersten Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion, so ist die analytische Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^\infty{}^\nu g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu$ in demselben Umfange regulär, wie die analytische Funktion $f_b(x)$ mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$ und überdies durch eine Entwickelung von der Form (91) *bzw.* (92) *darstellbar. Sie besitzt also keine anderen singulären Stellen, wie $f_b(x)$.*

Hat $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ die einzige singuläre Stelle a, so daß also (s. § 2, Nr. 8. p. 47) $a_\nu = \left(\frac{1}{a}\right)^\nu \cdot g(\nu)$, und bezeichnet man die singulären Stellen von $f_b(x)$ generell mit β, so hat offenbar die analytische Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ keine anderen singulären Stellen, als solche von der Form $\frac{x}{a} = \beta$, also $x = a\beta$. Dieses Resultat läßt sich in ganz analoger Weise, wie in § 2, Nr. 8 geschehen (s. p. 49), auf den allgemeineren Fall übertragen, in welchem vorausgesetzt wird, daß das Anfangs-Element $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ eine eindeutige Funktion mit einer endlichen Anzahl von singulären Stellen $a_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots p)$, eventuell noch mit der singulären Stelle $x = \infty$, definiert. Werden alsdann die singulären Stellen von $f_b(x)$ wieder generell mit β bezeichnet, so besitzt die analytische Funktion mit dem Anfangs-Element $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ keine anderen singulären Stellen, als solche von der Form $a_\varkappa \beta$. Dabei können spezielle Stellen $a_\varkappa \beta'$ wieder ihren singulären Charakter verlieren, falls eine Relation von der Form $a_\varkappa \beta' = a_\lambda \beta''$ besteht (vgl. p. 49).

4. Das Ergebnis der vorigen Nummer legt die Vermutung nahe, daß es möglich sein könnte, mit Hilfe der Darstellungsformel (s. p. 66)

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \tag{90}$$

auch den allgemeinen Hadamardschen Satz[1]) über den Zusammenhang der Singularitäten von $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ und $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$ herzuleiten. In der Tat ist dieser Versuch auch von

[1]) Théorème sur les séries entières. Par. C. R. 124 (1897), p. 492; Acta math. 22 (1898), p. 55.

Herrn Pincherle[1]) gemacht worden, indessen nach meinem Dafürhalten nicht nur in der vorliegenden Form mißlungen, sondern (abgesehen von speziellen Fällen, wie dem in der vorigen Nummer behandelten) völlig aussichtslos, sofern nicht etwa noch andere Hilfsmittel herangezogen werden. Da der von Herrn Pincherle immerhin noch mit einer gewissen Vorsicht[2]) ausgesprochene Beweis ohne irgendwelchen Vorbehalt in die vortreffliche Schrift des Herrn Hadamard über die Taylorsche Reihe[3]), sowie in das Vivanti-Gutzmersche Lehrbuch der Funktionen-Theorie[4]) übergegangen ist, so dürfte es kaum überflüssig erscheinen, wenn ich im folgenden versuche, die Grenzen der fraglichen Beweis-Methode genauer festzustellen, wobei sich dann ergeben wird, daß es a priori ausgeschlossen erscheint, auf diesem Wege zu einem auch nur einigermaßen vollständigen Beweise des Hadamardschen Satzes zu gelangen.

Hierzu ist zunächst erforderlich, die Schlußweise des Herrn Pincherle in Kürze zu rekapitulieren. Den eigentlichen Kern derselben bildet die Feststellung des Bereiches gleichmäßiger Konvergenz für die Reihenentwickelung (90) (welche übrigens Herr Pincherle nicht im Anschluß an die Eulersche Transformation, sondern mit Hilfe seines „Calcul distributif“ gewinnt). Jene Reihe konvergiert nun aber absolut und gleichmäßig, sobald:

---

1) A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard. Rend. Accad. Bologna, Nuova Serie 3 (1898/99), p. 67.

2) Auf p. 68 der zitierten Note heißt es: „La presenta nota è diretta ... a mostrare come ... si possa, in molti casi, ottenere il teorema di Hadamard senza che occorra il sussidio degli integrali curvilinei.“ Wodurch diese „vielen Fälle“ aber charakterisiert sind, wird in keiner Weise angedeutet, vielmehr auf p. 72 das Ergebnis der betreffenden Deduktion so ausgesprochen, als ob der fragliche Satz nunmehr ohne jede Einschränkung bewiesen sei. Die von Herrn Pincherle sodann angeführten Beispiele sind allerdings einwandfrei, aber nur, weil sie sich sämtlich unter den in Nr. 2 des Textes behandelten Spezialfall subsumieren lassen.

3) La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901, p. 78.

4) G. Vivanti, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Deutsch von A. Gutzmer. Leipzig 1906, p. 385.

$$(93)\qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \right| \cdot \left| \frac{x}{s} \right|} < \vartheta < 1 .$$

Zur näheren Bestimmung des vorliegenden Grenzwertes hat man zunächst:

$$(94)\qquad \begin{aligned} &\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \right| \cdot \left| \frac{x}{s} \right|} \\ &< \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} \cdot \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!} \left| f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \right| \cdot \left| \frac{x}{s} \right|} . \end{aligned}$$

Nun ist (s. p. 17, Gleichung (10)):

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = \frac{1}{\varrho},$$

wenn die Beziehung $\left| \frac{x}{s-x} \right| = \varrho$ die Konvergenzgrenze der Reihe $\sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda(s) \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda$ definiert. Ist dann a eine auf dieser Konvergenzgrenze gelegene singuläre Stelle der Funktion $f_a(x)$ $\left(\text{d. h. derjenigen mit dem Anfangs-Element } \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu\right)$, so hat man:

$$\varrho = \left| \frac{a}{s-a} \right|$$

und daher:

$$(95)\qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = \left| \frac{s-a}{a} \right| .$$

Bezeichnet andererseits y eine Stelle regulären Verhaltens von $f_b(x)$, so besteht für eine gewisse Umgebung $y + k$ eine Entwickelung von der Form:

$$f_b(y+k) = \sum_0^\infty{}^\lambda \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(y) \cdot k^\lambda ,$$

also, wenn $y = \frac{x}{s}$, $k = \frac{h}{s}$ gesetzt wird:

$$f_b\left(\frac{x+h}{s}\right) = \sum_0^\infty {}^\lambda \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{h}{s}\right)^\lambda.$$

Ist sodann $y + k = \beta$ die (bzw. eine) dem betrachteten Punkte y am nächsten gelegene singuläre Stelle für $f_b(y + k)$, so ist $x + h = s\beta$ die entsprechende singuläre Stelle für $f_b\left(\frac{x+h}{s}\right)$. Daraus würde aber folgen, daß die Konvergenzgrenze der Reihenentwickelung (96) durch die Gleichung

$$|h| = |s\beta - x|$$

bestimmt wird, und man findet somit:

$$\text{(97)} \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left|\frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)\right|} \cdot \left|\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{1}{s\beta - x}\right|.$$

Mit Benützung von (95) und (97) geht jetzt die Beziehung (94) in die folgende über:

$$\text{(98)} \quad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left|A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)\right|} \cdot \left|\frac{x}{s}\right| < \left|\frac{s-a}{a}\right| \cdot \left|\frac{x}{s\beta - x}\right|.$$

Wird jetzt vorausgesetzt, daß in der vorstehenden Relation das Gleichheitszeichen Geltung hat[1]), so nimmt die Konvergenzbedingung (93) die Form an:

$$\left|\frac{s-a}{a}\right| \cdot \left|\frac{x}{s\beta - x}\right| < \vartheta < 1,$$

anders geschrieben:

$$\text{(99)} \qquad \left|\frac{x}{s\beta - x}\right| < \vartheta \cdot \left|\frac{a}{s-a}\right| < \left|\frac{a}{s-a}\right| \left(= \left|\frac{a\beta}{s\beta - a\beta}\right|\right).$$

[1]) Läßt man diese Annahme fallen, so würde nach der im Texte angegebenen Schlußweise die Stelle $a\beta$ noch dem Innern des Konvergenzbereiches angehören, also keine singuläre Stelle sein, was ja, wie die bisher (s. § 2, Nr. 8, p. 49 und Nr. 3 dieses Paragraphen, p. 69) betrachteten besonderen Fälle schon gezeigt haben, tatsächlich der Fall sein kann.

Bis hierher erscheint alles einwandfrei. Nun wird aber in folgender Weise weiter geschlossen. Die Beziehung (99) definiert (sc. für jedes einzelne s) den Konvergenzbereich der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda$ und läßt erkennen, daß die Stelle $x = \alpha\beta$ auf dieses Bereiches Grenze liegt, welche offenbar (vgl. § 1, Nr. 3, p. 20) stets ein (allenfalls in eine unbegrenzte Gerade ausartender)[1] Kreis ist[2]). Läßt man jetzt s innerhalb einer hinlänglich klein gewählten Umgebung des ursprünglich angenommenen Wertes stetig variieren, so wird auch jene Konvergenzgrenze eine durch die Relation (99) bestimmte Änderung erleiden, immer aber den Punkt $\alpha\beta$ enthalten. Dieser Punkt $\alpha\beta$ und im allgemeinen offenbar nur dieser eine Punkt ist allen auf die angegebene Art zum Vorschein kommemden Konvergenzkreisen (eventuell Konvergenzgeraden) gemeinsam, er tritt also niemals in das Innere eines Konvergenzbereiches, ist somit eine singuläre Stelle für die betreffende Funktion. Die singulären Stellen der letzteren sind daher ausschließlich (?) in der Form $\alpha\beta$ enthalten.

Soll nun diese Schlußweise wirklich bindend erscheinen, so müßte doch daraus zu ersehen sein, daß jede dem Existenzbereiche der betreffenden Funktion angehörige und von allen möglichen $\alpha\beta$ verschiedene Stelle x bei passender Wahl von s auch allemal in einen der Konvergenzbereiche, wie sie durch die Beziehung (99) definiert werden, hineinfällt. Das ist aber im vorstehenden weder bewiesen noch auch (abgesehen von dem in der vorigen Nummer behandelten Spezialfalle) auf diesem Wege[3]) beweisbar, wie schon aus der folgenden Bemerkung

[1]) Nämlich, wenn:

$$\left|\frac{\alpha}{s-\alpha}\right| = 1.$$

[2]) Den Konvergenzbereich bildet dann allemal derjenige Teil der Ebene, welcher den Punkt $x = 0$ enthält, dagegen den Punkt $x = s\beta$ ausschließt.

[3]) D. h. natürlich auch ohne Zuhilfenahme des oben benützten Auskunftsmittels, die Funktion $f_\alpha(x)$ von vornherein in eine Summe von Funktionen mit je einer einzigen Singularität zu zerlegen.

hervorgeht. Bedeutet α' irgend eine bestimmte unter den singulären Stellen von $f_a(x)$, so steht es auf Grund des obigen Beweisverfahrens doch nur dann frei, dem in Ungleichung (99) auftretenden Zeichen α die Bedeutung α' beizulegen, wenn für irgend ein bestimmtes s die Beziehung besteht (s. Gleichung (95)):

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = \left|\frac{s-\alpha'}{\alpha'}\right|,$$

wenn also vermittelst der durch jenes s bestimmten Eulerschen Transformation der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ die Stelle α' erreichbar ist, d. h. auf der Konvergenzgrenze der betreffenden transformierten Reihe liegt. Nur in diesem Falle läßt sich überhaupt eine bestimmte Aussage über den Charakter der Stellen $\alpha'\beta$ und ihrer Umgebung an die Transformations-Formel (90) und die Konvergenz-Relation (99) knüpfen. Da es aber im allgemeinen, ja schon in Fällen allereinfachster Art[1], unmöglich ist, alle singulären Stellen α von $f_a(x)$ vermittelst der Eulerschen Transformation auch bei ganz beliebiger Variation des Parameters zu erreichen, so erkennt man schon hieraus, daß die oben auseinander gesetzte Schlußweise im allgemeinen nicht ausreicht, um das in Frage stehende Resultat zu begründen. Dies ist aber selbst dann nicht einmal vollständig der Fall, wenn alle α durch die Eulersche Transformation erreichbar sind, wie durch das folgende Beispiel erläutert werden möge.

5. Es möge $f_a(x)$ nur die singulären Stellen 1 und ∞ besitzen, also in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär sein; $f_b(x)$ habe die singuläre Stelle β, und es stehe im übrigen nur so viel fest, daß $f_b(x)$ sich regulär verhält, sobald man in der Richtung der Verbindungslinie $\overline{0\beta}$ vom Punkte β aus einen Schnitt ins Unendliche zieht, der im fol-

[1]) Z. B. wenn $f_a(x)$ drei mit dem Nullpunkt in einer Geraden oder vier nicht auf einem Kreise (bzw. einer Geraden) liegende singuläre Stellen besitzt.

genden zur Abkürzung schlechthin als Schnitt $(\beta \ldots \beta \cdot \infty)$ bezeichnet werden möge.

Wird $s = 1 + e^{\vartheta i}$ $(-\pi < \vartheta < +\pi)$ angenommen, so hat man (s. § 3, Nr. 1, p. 50):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1,$$

so daß also die Konvergenzbedingung (99) für die aus $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ durch die Transformation (90) hervorgehende Reihe die einfache Form erhält:

$$\left|\frac{x}{s\beta - x}\right| < \vartheta < 1. \tag{100}$$

Der Konvergenzbereich ist also eine den Nullpunkt enthaltende Halbebene, deren Grenzgerade durch den Punkt β geht[1]). Läßt man s alle Werte $1 + e^{\vartheta i}$ $(-\pi < \vartheta < +\pi)$ durchlaufen, so fällt jene Trennungslinie sukzessive mit jeder durch den Punkt β gehenden Geraden zusammen, mit einziger Ausnahme derjenigen, welche zugleich durch den Nullpunkt geht. Da bei jeder anderen Wahl von s lediglich ein kleinerer Konvergenzbereich resultiert (nämlich eine den Punkt β ausschließende Halbebene oder sogar nur ein den Nullpunkt enthaltender, den Punkt β ausschließender Kreis), so folgt, daß man auf diesem Wege keinerlei Anhaltspunkt dafür gewinnt,

[1]) Sollten auf dem vom Punkte β ausgehenden Schnitte noch andere singuläre Stellen β' der Funktion $f_b(x)$ liegen, so brauchen diese bei der Bestimmung des fraglichen Konvergenzbereiches gar nicht weiter berücksichtigt zu werden. Denn diejenigen Punkte x, welche näher an $s\beta'$ liegen, als an $s\beta$ und die auf Grund der Konvergenzbedingung (99) aus dem Konvergenzbereiche auszuschließen sind, sobald:

$$\left|\frac{x}{s\beta' - 1}\right| > 1,$$

genügen ja a fortiori der Ungleichung:

$$\left|\frac{x}{s\beta - 1}\right| > 1,$$

liegen also schon eo ipso außerhalb des durch Ungleichung (100) definierten Bereiches.

wie die Funktion mit dem Anfangs-Element $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ auf dem Schnitte $(\beta \ldots \beta\cdot\infty)$ beschaffen ist. Es läßt sich also insbesondere gar nichts darüber aussagen, ob jene Funktion sich daselbst regulär verhält bzw. noch weitere singuläre Stellen β' besitzt, falls die entsprechende Voraussetzung für $f_b(x)$ gemacht wird. Im übrigen ist evident, daß dieses Resultat unverändert bestehen bleibt, wenn auch in Bezug auf die Funktion $f_a(x)$ nur feststeht, daß sie in der längs $(1 \ldots +\infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist. Somit ergibt sich in dem vorliegenden Zusammenhange nur folgendes:

Sind $f_a(x)$ und $f_b(x)$ regulär in der längs $(1 \ldots +\infty)$ bzw. $(\beta \ldots \beta\cdot\infty)$ zerschnittenen Ebene, so gilt das gleiche für die Funktion mit dem Anfangs-Element $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ in der längs $(\beta \ldots \beta\cdot\infty)$ zerschnittenen Ebene.

Nimmt man z. B.

$$a_\nu = \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots\nu}, \quad b_\nu = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots\nu},$$

also $f_a(x) = (1-x)^{-\alpha}$, $f_b(x) = (1-x)^{-\beta}$, so haben diese beiden Funktionen in der längs $(1 \ldots +\infty)$ zerschnittenen Ebene nur die singulären Stellen 1 und ∞. Über die Funktion, welche definiert wird durch die Reihe

$$\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots\nu\cdot 1\cdot 2\ldots\nu}\, x^\nu,$$

läßt sich auf Grund des oben gewonnenen Resultates nur so viel aussagen, daß sie innerhalb der längs $(1 \ldots +\infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist. Kombiniert man dieses Resultat mit dem früher (s. p. 62, Gleichung (81)) bezüglich der Reihe

$$\sum \frac{1\cdot 2\ldots\nu}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}$$

gefundenen, so ergibt sich, daß auch die hypergeometrische Reihe

$$\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)\cdot 1\cdot 2\ldots\nu}\cdot x^\nu$$

eine Funktion definiert, welche in der längs $(1 \ldots + \infty)$ zerschnittenen Ebene sich regulär verhält. (Mehr läßt sich bei Beschränkung auf die hier verwendeten Hilfsmittel nicht aussagen.)

Im übrigen gibt der den letzten Beispielen zu Grunde liegende Fall noch zu folgender Bemerkung Anlaß. Man könnte — immer unter der Voraussetzung, daß $f_a(x)$ im Endlichen nur die singuläre Stelle 1 besitzt — nach Analogie des unmittelbar zuvor gefundenen Ergebnisses vermuten, daß auf dem entsprechenden Wege wenigstens festgestellt werden könnte, die Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ verhalte sich regulär im Innern desjenigen „Zentralsterns", welcher entsteht, wenn man von allen möglichen singulären Stellen β der Funktion $f_b(x)$ in der Richtung der Verbindungslinien 0β Strahlen ins Unendliche zieht. Dieses Resultat läßt sich indessen nur dann in analoger Weise, wie in dem zuvor betrachteten Falle eines einzigen β, gewinnen, wenn die singulären Stellen $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ sämtlich einer Halbebene angehören, die von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden begrenzt wird. Dagegen versagt das betreffende Beweisverfahren, sobald $f_b(x)$ auch nur drei nicht in einer solchen Halbebene liegende singuläre Stellen aufweist, da alsdann der gesamte Konvergenzbereich der Entwickelung (90) bei beliebig variierendem s stets ein endlicher ist, so daß also für das ganze unendliche Gebiet außerhalb desselben keinerlei Aussage bezüglich des Verhaltens der fraglichen Funktion gemacht werden kann. Es bedeute z. B. β eine beliebige komplexe Zahl, η eine komplexe dritte Einheitswurzel und es besitze $f_b(x)$ nur die drei singulären Stellen β, $\eta\beta$, $\eta^2\beta$. Setzt man dann, wie oben, $s = 1 + e^{\vartheta i}$, wo ϑ alle Werte innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ durchläuft (eine Annahme, die wiederum für die Feststellung des Resultates vollständig genügt, da die Konvergenzbereiche für jede andere Wahl von s kleiner ausfallen), so erscheinen als Konvergenzbereiche alle möglichen gleichseitigen Dreiecke, welche durch die drei Punkte β, $\eta\beta$, $\eta^2\beta$ gehen, und der auf diese Weise resultierende gesamte Gültigkeitsbereich aller möglichen Entwickelungen (90) besteht dann aus demjenigen Gebiete, welches von drei durch den Nullpunkt und paarweise durch je zwei der drei Punkte β, $\eta\beta$, $\eta^2\beta$ gehenden Kreisen überdeckt wird, ist also ein endlicher, sogar relativ sehr beschränkter.

Somit versagt das fragliche Beweisverfahren selbst dann, wenn $f_a(x)$ nur eine einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle besitzt, sofern nicht die singulären Stellen von $f_b(x)$ auch noch sehr speziellen Bedingungen genügen.

§ 5.

Potenzreihen, welche den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben.

1. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$, wo: $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$, die singuläre Stelle $x = e^{\varphi i}$ besitzt, ergab sich (s. p. 19, Gl. (14)) die Beziehung:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{1}{2} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(-e^{\varphi i})|} = 1, \tag{101}$$

wenn gesetzt wird:

$$A_\lambda(-e^{\varphi i}) = (-1)^\lambda \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu (\lambda)_\nu a_\nu e^{\nu\varphi i}.$$

Um hieraus eine etwas bequemer zu handhabende Form einer hinreichenden Bedingung dafür zu gewinnen, daß jede Stelle $e^{\varphi i}$ $(-\pi < \varphi < +\pi)$ eine singuläre ist, erscheint es zweckmäßig λ als gerade Zahl anzunehmen, also etwa durch 2λ zu ersetzen und sodann $A_{2\lambda}$ in folgender Weise umzuformen. Man hat zunächst:

$$A_{2\lambda}(-e^{\varphi i}) = \sum_0^{\lambda-1} {}_\nu (2\lambda)_\nu a_\nu e^{\nu\varphi i} + (2\lambda)_\lambda a_\lambda e^{\lambda\varphi i} + \sum_{\lambda+1}^{2\lambda} {}_\nu (2\lambda)_\nu a_\nu e^{\nu\varphi i}.$$

Ersetzt man ν in der ersten Summe durch $\lambda - \nu$, in der letzten durch $\lambda + \nu$ und berücksichtigt, daß $(2\lambda)_{\lambda+\nu} = (2\lambda)_{\lambda-\nu}$, so wird:

$$(102)\qquad A_{2\lambda}(-e^{\varphi i})$$
$$= (2\lambda)_\lambda a_\lambda e^{\lambda\varphi i} + \sum_1^\lambda {}^\nu (2\lambda)_{\lambda-\nu}\left(a_{\lambda-\nu} e^{(\lambda-\nu)\varphi i} + a_{\lambda+\nu} e^{(\lambda+\nu)\varphi i}\right)$$
$$= (2\lambda)_\lambda \cdot e^{\lambda\varphi i}\left\{a_\lambda + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}\left(a_{\lambda-\nu} e^{-\nu\varphi i} + a_{\lambda+\nu} e^{\nu\varphi i}\right)\right\}.$$

Nun ist (s. p. 39):

$$(103)\qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda}\cdot(\lambda!)^{\frac{1}{\lambda}} = 1,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda}(\lambda!\,\lambda!)^{\frac{1}{2\lambda}} = 1$$

und, wenn man in der ursprünglichen Gleichung λ durch 2λ ersetzt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda}(2\lambda!)^{\frac{1}{2\lambda}} = 2,$$

so daß sich durch Division ergibt:

$$\lim_{\lambda=\infty} (2\lambda)_\lambda^{\frac{1}{2\lambda}} = \lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{(2\lambda)!}{\lambda!\,\lambda!}\right)^{\frac{1}{2\lambda}} = 2.$$

Infolgedessen findet man zunächst:

$$(104)\qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2}\sqrt[2\lambda]{A_{2\lambda}(-e^{\varphi i})}$$
$$= \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[2\lambda]{a_\lambda + \sum_1^\lambda {}^\nu \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}\left(a_{\lambda-\nu} e^{-\nu\varphi i} + a_{\lambda+\nu} e^{\nu\varphi i}\right)}$$

und es ist somit eine hinreichende Bedingung[1]) für den singulären Charakter der Stelle $x = e^{\varphi i}$, wenn dieser Grenzwert $= 1$ ausfällt.

---

[1]) Dieselbe ist keine notwendige mehr. Denn wenn auch jener Grenzwert < 1 ausfiele, so könnte immerhin der entsprechende für einen ungeraden Index $2\lambda + 1$ noch $= 1$ sein, was für den singulären Charakter von $x = e^{\varphi i}$ gleichfalls ausreichend wäre.

Die Zahlenkoeffizienten $\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}$ nehmen mit wachsendem ν beständig ab und zwar, wie sogleich gezeigt werden soll, so stark, daß alle diejenigen Glieder, deren Index ν eine passend gewählte, mit λ ins Unendliche wachsende Schranke übersteigt, auf den fraglichen Grenzwert keinen Einfluß üben und somit ohne weiteres weggelassen werden dürfen. Es beruht dies auf dem folgenden Hilfssatz:

Ist:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|P_\lambda|} = P \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|p_\lambda|} = p < P,$$

so ist auch:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|P_\lambda + p_\lambda|} = P.$$

Um dies einzusehen, nehme man $\varepsilon > 0$ beliebig klein, jedenfalls aber so an:

$$\varepsilon < \frac{P-p}{P+p}, \quad \text{also:} \quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{P}{p}.$$

Auf Grund der Voraussetzung hat man sodann für alle hinlänglich großen λ, etwa für $\lambda > l$:

$$|P_\lambda| < (1+\varepsilon)^\lambda \cdot P^\lambda \qquad |p_\lambda| < (1+\varepsilon)^\lambda \cdot p^\lambda,$$

außerdem für unendlich viele $\lambda > l$:

$$|P_\lambda| > (1-\varepsilon)^\lambda \cdot P^\lambda.$$

Somit ist für alle $\lambda > l$:

$$|P_\lambda + p_\lambda| \leq |P_\lambda| + |p_\lambda| < (1+\varepsilon)^\lambda \cdot \left(1 + \left(\frac{p}{P}\right)^\lambda\right) \cdot P^\lambda$$

und für unendlich viele $\lambda > l$:

$$|P_\lambda + p_\lambda| > |P_\lambda| - |p_\lambda| > (1-\varepsilon)^\lambda \cdot \left(1 - \left(\frac{(1+\varepsilon)\,p}{(1-\varepsilon)\,P}\right)^\lambda\right) \cdot P^\lambda,$$

so daß sich in der Tat ergibt:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|P_\lambda + p_\lambda|} = P.$$

2. Um dieses Resultat auf den Grenzwert (104) anzuwenden, hat man zunächst, wenn man, nach Annahme eines echten Bruches ϑ, in Gleichung (103) λ durch $(1-\vartheta)\lambda$ ersetzt[1]):

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{(1-\vartheta)\lambda}((\lambda-\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{(1-\vartheta)\lambda}} = 1,$$

also durch Erhebung in die Potenz $\frac{1}{2}(1-\vartheta)$ und Multiplikation mit $(1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)}$:

$$\lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{e}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)} \cdot ((\lambda-\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{2\lambda}} = (1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)}.$$

Vertauscht man hier $-\vartheta$ mit $+\vartheta$, so folgt durch Multiplikation der resultierenden Gleichung mit der vorstehenden:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda}((\lambda-\vartheta\lambda)!\ (\lambda+\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{2\lambda}} = (1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)} \cdot (1+\vartheta)^{\frac{1}{2}(1+\vartheta)}$$

und somit schließlich, wenn man Gleichung (103) durch die letzte Gleichung dividiert:

$$(105)\quad \lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\vartheta\lambda)!\,(\lambda+\vartheta\lambda)!}\right)^{\frac{1}{2\lambda}} = \left(\frac{1}{(1-\vartheta)^{1-\vartheta}(1+\vartheta)^{1+\vartheta}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um zu zeigen, daß dieser Wert stets unter der Einheit liegt, setze man:

$$\vartheta = \frac{1}{t}, \qquad \text{wo also: } t > 1,$$

und daher:

$$(1-\vartheta)^{1-\vartheta} \cdot (1+\vartheta)^{1+\vartheta} = \left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t-1} \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t > \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-(t-1)},$$

[1]) Da es sich in der vorliegenden Betrachtung schließlich nur um die Bestimmung eines oberen Limes und zwar um einen Wert handelt, der überhaupt nicht überschritten werden kann (s. p. 17, Ungleichung (11)), so steht es, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, frei, λ auf solche Zahlenwerte zu beschränken, für welche $\vartheta\lambda$ ganzzahlig ist.

woraus durch Multiplikation mit $\left(1+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t-1}$ sich ergibt:

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} > 1+\frac{1}{t},$$

also, wenn man noch in die Potenz $\frac{1}{t}$ erhebt und wieder $\vartheta=\frac{1}{t}$ einführt:

$$(1-\vartheta)^{1-\vartheta}\cdot(1+\vartheta)^{1+\vartheta} > (1+\vartheta)^{\vartheta}.$$

Mithin findet man schließlich aus Gleichung (105):

$$(106)\qquad \lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\vartheta\lambda)!\,(\lambda+\vartheta\lambda)!}\right)^{\frac{1}{2\lambda}} < \left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^{\frac{\vartheta}{2}} < 1.$$

Bezeichnet man jetzt mit g_λ das Maximum von $|a_{\lambda+\nu}|$ für $\nu=\vartheta\lambda+1,\ \vartheta\lambda+2,\ \ldots\ \lambda$, so hat man:

$$\left|\sum_{\vartheta\lambda+1}^{\lambda}{}^{\nu}\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}\left(a_{\lambda-\nu}e^{-\nu\eta i}+a_{\lambda+\nu}e^{\nu\eta i}\right)\right|$$
$$< 2(1-\vartheta)\lambda\,\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\vartheta\lambda)!\,(\lambda+\vartheta\lambda)!}\cdot g_\lambda$$

und daher:

$$(107)\ \lim_{\lambda=\infty}\left|\sum_{\vartheta\lambda+1}^{\lambda}{}^{\nu}\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}\left(a_{\lambda-\nu}e^{-\nu\eta i}+a_{\lambda+\nu}e^{\nu\eta i}\right)\right|^{\frac{1}{2\lambda}} < \left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}\vartheta} < 1.$$

Aus dem zuvor bewiesenen Hilfssatze folgt dann, daß man den vorstehenden Bestandteil der in Gleichung (104) auftretenden Summe bei dem fraglichen Grenzübergange von vornherein unterdrücken kann, so daß also die hinreichende Bedingung für den singulären Charakter der Stelle $x=e^{\eta i}$ nunmehr die Form annimmt[1]):

$$(108)\ \overline{\lim_{\lambda=\infty}}\left|a_\lambda+\sum_{1}^{\vartheta\lambda}{}^{\nu}\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}\left(a_{\lambda-\nu}e^{-\nu\eta i}+a_{\lambda+\nu}e^{\nu\eta i}\right)\right|^{\frac{1}{2\lambda}}=1,$$

wo: $0<\vartheta<1$.

---

[1]) Vgl. Fabry, Ann. Éc. Norm. (3), 13 (1896), p. 371. — Faber, Dissert. (1903), p. 19.

3. Die vorstehende Beziehung ist nun für jeden Wert von φ erfüllt, der Einheitskreis also eine singuläre Linie, wenn eine hinlänglich große Anzahl der Reihenkoeffizienten sich auf Null reduziert. Schreibt man die Reihe etwa in der Form an: $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_{m_\nu} x^{m_\nu}$, wo $m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen bedeutet, so tritt, wie leicht zu sehen, der ebenbezeichnete Fall insbesondere dann ein, wenn die m_ν so schnell wachsen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1} - m_\nu}{m_\nu} > a, \tag{109}$$

unter a eine beliebige positive Zahl verstanden.

Alsdann bestehen nämlich zum mindesten von einer bestimmten Stelle $\varkappa > k$ ab die Ungleichungen:

$$m_\varkappa - m_{\varkappa-1} > a \cdot m_{\varkappa-1}, \qquad \text{also: } \frac{1}{1+a} \cdot m_\varkappa > m_{\varkappa-1}$$
$$m_{\varkappa+1} - m_\varkappa > a \cdot m_\varkappa, \qquad \text{also: } (1+a) \cdot m_\varkappa < m_{\varkappa+1}.$$

Setzt man jetzt in dem Ausdrucke (108) $\lambda = m_\varkappa$, so wird

$$a_\lambda = a_{m_\varkappa},$$

während im übrigen als kleinster und größter Koeffizienten-Index die Zahlen

$$(1-\vartheta) \cdot m_\varkappa \quad \text{und} \quad (1+\vartheta) \cdot m_\varkappa$$

auftreten. Wird nun ϑ so gewählt, daß

$$1 - \vartheta > \frac{1}{1+a} \qquad \left(\text{d. h. } \vartheta < \frac{a}{1+a}\right),$$

so hat man um so mehr:

$$1 + \vartheta < 1 + a$$

und daher:

$$(1-\vartheta)\, m_\varkappa > m_{\varkappa-1} \qquad (1+\vartheta)\, m_\varkappa < m_{\varkappa+1}.$$

Somit enthält in diesem Falle der Ausdruck (108) außer $a_{m_\varkappa}$ überhaupt keinen weiteren von Null verschiedenen Reihenkoeffizienten, und der betreffende Grenzwert nimmt die Form an:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[2m_\varkappa]{|a_{m_\varkappa}|} = \left(\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[m_\varkappa]{|a_{m_\varkappa}|}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

ohne daß φ irgendwelcher Beschränkung unterworfen zu werden braucht. Somit hat jede der Bedingung (109) genügende Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze[1]).

4. Das Ergebnis der vorigen Nummer soll nun zum Beweise des folgenden, wesentlich allgemeineren Satzes dienen:

Ist

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\nu} = \infty,$$

so hat die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ *den Einheitskreis zur natürlichen Grenze*[2]).

---

[1]) Zuerst von Herrn Hadamard bewiesen. Journ. de Math. (4), 8, p. 116.

[2]) In sehr viel komplizierterer, jedoch dem Umfange nach im wesentlichen übereinstimmender Formulierung zuerst von Herrn Fabry bewiesen. Ann. Éc. Norm. (3), 13 (1896), p. 382; Acta math. 22 (1898), p. 86. — Herr Faber (Sitz.-Ber. 34 [1904]) hat dafür einen merklich einfacheren Beweis gegeben und schließlich den Satz in folgender Weise formuliert (Sitz.-Ber. 36 [1906], p. 581): „Bezeichnet man mit $n(r)$ die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten, die zu Potenzen mit Exponenten $< r$ gehören, so ist die Beziehung $\lim_{r=\infty} \frac{n(r)}{r} = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe." Dieser Satz erweist sich in der Tat als vollkommen gleichwertig mit demjenigen des Textes, wenn man beachtet, daß $n(r)$ die inverse Funktion zu der im Texte mit m_ν bezeichneten darstellt und daß daher die Beziehungen

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r)}{r} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\nu} = \infty$$

äquivalent sind. Die von Herrn Faber für seinen Beweis benützte Einführung eines (nach Art eines sogenannten Diskontinuitäts-Faktors wirkenden) Faktors von der Form $g(r)$ wird auch bei dem von mir gegebenen Beweise verwendet, welcher im übrigen immerhin eine merkliche Ver-

Beweis. Aus der Reihe der Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots$ werde eine Folge von Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_\nu, \ldots$ so herausgehoben, daß

$$(110) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[p_\nu]{|a_{p_\nu}|} = 1, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_\nu} > \alpha > 0.$$

Die alsdann übrig bleibende Folge der Zahlen m_ν werde mit $q_1, q_2, \ldots q_\nu, \ldots$ bezeichnet.

Da zum mindesten (von einer bestimmten Stelle an) stets $q_\nu > m_\nu$, so folgt aus der Voraussetzung, daß auch

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{q_\nu}{\nu} = \infty.$$

Infolgedessen ist die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{q_\nu^2}$ konvergent und das unendliche Produkt

$$(111) \qquad g(y) = \prod_1^\infty {}^\nu \left(1 - \frac{y^2}{q_\nu^2}\right)$$

stellt eine ganze transzendente Funktion dar, welche offenbar die Nullstellen $y = \pm q_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ und nur diese besitzt.

Wir werden nun zeigen, daß dieselbe dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört, daß sie also bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ einer Relation von der Form

$$(112) \qquad |g(y)| < e^{\varepsilon \cdot |y|} \qquad \text{etwa für: } |y| > R_\varepsilon$$

genügt, und daß andererseits für alle hinlänglich großen Werte von ν:

$$(113) \qquad |g(p_\nu)| > e^{-\varepsilon \cdot |p_\nu|}.$$

Sobald die Richtigkeit dieser beiden Ungleichungen erwiesen ist, lassen sich nämlich daran sofort die folgenden Schlüsse knüpfen. Setzt man in der ersten dieser Unglei-

---

einfachung des Faberschen Beweises darstellen dürfte. Auch scheint mir die hier gegebene Fassung des Satzes begrifflich etwas einfacher und schon aus dem Grunde vorzuziehen, weil sie unmittelbar gestattet, die fragliche Reihe explizite (nämlich als $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$) anzuschreiben.

chungen $y = p_\nu$ und $p_\nu > R_\varepsilon$, so ergibt sich durch Kombination mit der zweiten Ungleichung, daß für alle hinlänglich großen Werte von ν:

$$e^{-\varepsilon} < \sqrt[p_\nu]{|g(p_\nu)|} < e^{\varepsilon}$$

und somit:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[p_\nu]{|g(p_\nu)|} = 1,$$

also auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[p_\nu]{|g(p_\nu) \cdot a_{p_\nu}|} = 1.$$

Da die p_ν der Ungleichung (110) genügen, so folgt aus dem Satze der vorigen Nummer, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty {}^\nu g(p_\nu) \cdot a_{p_\nu} x^{m_\nu}$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Nun ist nach (111): $g(q_\nu) = 0$, und es besteht daher die Identität:

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty {}^\nu g(p_\nu) \cdot a_{p_\nu} x^{p_\nu} &= \sum_1^\infty {}^\nu g(p_\nu) \cdot a_{p_\nu} x^{p_\nu} + \sum_1^\infty {}^\nu g(q_\nu) \cdot a_{q_\nu} x^{q_\nu} \\ &= \sum_1^\infty {}^\nu g(m_\nu) \cdot a_{m_\nu} x^{m_\nu},\end{aligned}$$

so daß also auch gesagt werden kann, die letzte Reihe habe den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Andererseits hat aber die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu g(\nu) \cdot x^\nu$ einschließlich ihrer analytischen Fortsetzung (die Richtigkeit der Ungleichungen (112), (113) vorausgesetzt), nach dem Satze von p. 40, Nr. 6, die *einzige* singuläre Stelle $x = 1$. Zugleich folgt dann aus dem p. 68 bewiesenen besonderen Falle des *Hadamardschen* Satzes, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty {}^\nu g(\nu) \cdot a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu g(m_\nu) \cdot a_{m_\nu} x^{m_\nu}$$

keine anderen Singularitäten haben kann, wie $\sum_1^\infty {}^\nu a_{m_\nu} x^{m_\nu}$.

Da sie aber, wie zuvor bemerkt, die singuläre Linie $|x| = 1$ hat, so muß offenbar das gleiche schon für $\sum_1^\infty {}^\nu a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ gelten.

Hiernach hängt der Beweis des ausgesprochenen Satzes nur noch einzig und allein von demjenigen der beiden Ungleichungen (112) und (113) ab. Die erste derselben ließe sich leicht aus einer schon vor nahezu 30 Jahren von Herrn Poincaré gemachten Bemerkung[1]) folgern, die im übrigen nur einen speziellen Fall eines von Herrn P. Boutroux bewiesenen Satzes[2]) aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen darstellt. Da indessen die Herleitung nur wenige Zeilen erfordert, so erscheint es mir zweckmäßig, sie hier gleich anzugeben. Man hat zunächst:

$$
(114) \qquad \begin{aligned}
|g(y)| &< \prod_1^n {}^\nu \left(1 + \left|\frac{y}{q_\nu^2}\right|^2\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty {}^\nu \left(1 + \left|\frac{y}{q_\nu^2}\right|^2\right) \\
&< e^{n \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{y}{q_1^2}\right|^2\right)} \cdot \prod_{n+1}^\infty {}^\nu \left(1 + \left|\frac{y}{q_\nu^2}\right|^2\right).
\end{aligned}
$$

Wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich, wegen $\lim_{\nu = \infty} \frac{\nu}{q_\nu} = 0$, n so fixieren, daß

$$
\frac{1}{q_\nu} < \frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \qquad \text{für: } \nu > n,
$$

also:

$$
(115) \qquad \begin{aligned}
\prod_{n+1}^\infty {}^\nu \left(1 + \left|\frac{y}{q_\nu^2}\right|^2\right) &< \prod_1^\infty {}^\nu \left(1 + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}|y|\right)^2}{\pi^2 \nu^2}\right) = \frac{2}{\varepsilon |y|} \cdot \left|\sin i \cdot \frac{\varepsilon}{2} y\right| \\
&< e^{\frac{\varepsilon}{2}|y|}
\end{aligned}
$$

(wenn $|y|$ nur von vornherein so groß angenommen wird, daß $\varepsilon \cdot |y| > 1$). Andererseits läßt sich eine untere Schranke R_ε für $|y|$ so fixieren, daß

[1]) Bull. Soc. Math. de France 11 (1883), p. 142.

[2]) Par. C. R. 134 (1902), p. 83. Vgl. auch Math. Ann. 58 (1904), p. 311, Fußnote und p. 313.

$$(116) \qquad \frac{n}{|y|} \lg\left(1 + \frac{|y|^2}{q_1^2}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

so daß sich schließlich, wie behauptet (s. Ungleichung (112)), ergibt:

$$|g(y)| < e^{\varepsilon \cdot |y|} \qquad \text{für: } |y| > R_\varepsilon.$$

Bezüglich der zweiten noch zu beweisenden Ungleichung (s. Ungleichung (113)) sei bemerkt, daß die Ergebnisse der Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen, soweit sie mir bekannt, zu ihrer Herleitung nicht ausreichen[1]). Dagegen läßt sich ihre Richtigkeit folgendermaßen begründen.

Bedeutet $\varkappa$ eine beliebige natürliche Zahl, so existiert dazu stets eine und nur eine natürliche Zahl n, für welche die Beziehung besteht:

$$(117) \qquad q_n < 2\,p_\varkappa \leqq q_{n+1}.$$

Nun werde gesetzt:

$$(118) \qquad g(p_\varkappa) = \prod_1^\infty{}^\nu \frac{q_\nu^2 - p_\varkappa^2}{q_\nu^2} = \gamma_n(p_\varkappa) \cdot \gamma(p_\varkappa),$$

wo:

$$(119) \qquad \gamma_n(p_\varkappa) = \prod_1^n{}^\nu \frac{q_\nu^2 - p_\varkappa^2}{q_\nu^2} \qquad \gamma(p_\varkappa) = \prod_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{q_\nu^2 - p_\varkappa^2}{q_\nu^2}.$$

[1]) Die älteren Methoden (s. E. Lindelöf, Acta Soc. scient. Fennicae 31 [1902], p. 8 und meine Abhandlung, Math. Ann. 58 [1904], p. 320) würden statt der Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot \frac{1}{q_\nu} = 0$ geradezu die Konvergenz von $\sum \frac{1}{q_\nu}$ als Voraussetzung erfordern. Ein neuere Arbeit des Herrn Lindelöf (Rend. Circ. Mat. di Palermo 25 [1908], p. 231) erstreckt sich zwar auch auf die hier lediglich zur Verfügung stehenden Voraussetzungen, gestattet jedoch nur, nachzuweisen, daß überhaupt auf unendlich vielen, auch beliebig großen Kreisen eine Beziehung von der Form

$$|g(y)| > e^{-\varepsilon \cdot |y|}$$

besteht, während es doch hier wesentlich darauf ankommt, zu zeigen, daß dies gerade für $|y| = p_\varkappa$ bei hinlänglich großem $\varkappa$ der Fall ist.

Man hat sodann:

$$(120)\qquad |\gamma_n(p_\varkappa)| = \prod_1^n{}^\nu \frac{q_\nu + p_\varkappa}{q_\nu} \cdot \frac{|q_\nu - p_\varkappa|}{q_\nu} > \left(\frac{1}{q_n}\right)^n \cdot \prod_1^n{}^\nu |q_\nu - p_\varkappa| .$$

Bedeutet ferner m diejenige ganze Zahl, welche eindeutig bestimmt ist durch die Beziehung:

$$(121)\qquad q_m < p_\varkappa < q_{m+1},$$

so wird zunächst:

$$\prod_1^n{}^\nu |q_\nu - p_\varkappa| = \prod_1^m{}^\nu (p_\varkappa - q_\nu) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu (q_\nu - p_\varkappa)\,^{1)}.$$

Da aber:

$$p_\varkappa - q_1 > p_\varkappa - q_2 > \cdots > p_\varkappa - q_m > 1$$
$$q_n - p_\varkappa > q_{n-1} - p_\varkappa > \cdots q_{m+1} - p_\varkappa > 1,$$

so ergibt sich weiter:

$$(122)\qquad \prod_1^n{}^\nu |q_\nu - p_\varkappa| > m!\,(n-m)! \begin{cases} > \left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \\ > \left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun ist:

$$e^\nu > \frac{\nu^\nu}{\nu!}, \qquad \text{also: } \nu! > \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu,$$

und daher, bei geradem n:

$$\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)! > \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

---

[1]) Sollte $m = n$ sein, was mit Rücksicht auf die Ungleichung (117) zwar wenig wahrscheinlich, aber immerhin denkbar wäre, so würde das zweite dieser Produkte in Wegfall kommen, und man hätte sodann:

$$\prod_1^n{}^\nu |q_\nu - p_\varkappa| > n!,$$

so daß alle weiteren Schlüsse a fortiori bestehen bleiben.

Bei ungeradem n hat man:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)! > \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{\left((n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2e)^n}$$

und wegen:

$$(n-1)^{n-1} \cdot (n+1)^{n+1} = n^{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > n^{2n} \text{ (s.p. 82)}$$

schließlich analog wie oben:

$$(123) \qquad \left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)! > \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

Hiernach wird:

$$|\gamma_n(p_\varkappa)| > \left(\frac{n}{2eq_n}\right)^n$$

und:

$$(124) \qquad |\gamma_n(p_\varkappa)|^{-1} < e^{n\cdot\lg\frac{2eq_n}{n}} = e^{q_n\cdot Q_n} < e^{2p_\varkappa\cdot Q_n},$$

wenn gesetzt wird:

$$(125) \qquad Q_n = \frac{\lg\frac{2eq_n}{n}}{\frac{q_n}{n}}.$$

Andererseits hat man:

$$|\gamma(p_\varkappa)|^{-1} = \prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu \frac{q_\nu^2}{q_\nu^2 - p_\varkappa^2} = \prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(1+\frac{p_\varkappa^2}{q_\nu^2 - p_\varkappa^2}\right)$$
$$= \prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(1+\frac{1}{1-\left(\frac{p_\varkappa}{q_\nu}\right)^2}\cdot\frac{p_\varkappa^2}{q_\nu^2}\right)$$

und daher, wegen:

$$\left(\frac{p_\varkappa}{q_\nu}\right)^2 < \left(\frac{p_\varkappa}{q_{n+1}}\right)^2 < \frac{1}{4} \text{ (s. Ungleichung (117)):}$$

$$(126) \qquad |\gamma(p_\varkappa)|^{-1} < \prod_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{p_\varkappa^2}{q_\nu^2}\right).$$

Da $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{q_\nu}{\nu} = \infty$, also $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\nu}{q_\nu} = 0$, so läßt sich n durch entsprechende Vergrößerung von $\varkappa$ so fixieren, daß die beiden Beziehungen bestehen:

$$(122) \qquad Q_n = \frac{\lg \frac{2\,e\,q_n}{n}}{\frac{q_n}{n}} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \frac{1}{q_\nu} < \frac{\sqrt{3} \cdot \varepsilon}{4\,\pi\,\nu} \qquad \text{für: } \nu > n.$$

Alsdann gehen aber die Ungleichungen (124) und (126) in die folgenden über:

$$|\gamma_n(p_\varkappa)|^{-1} < e^{\frac{1}{2}\varepsilon p_\varkappa}$$

$$|\gamma(p_\varkappa)|^{-1} < \prod_{n+1}^{\tau}{}^{\nu} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2}\varepsilon p_\varkappa)^2}{\pi^2 \nu^2}\right) < \frac{2}{\varepsilon p_\varkappa} \cdot \left|\sin i \frac{\varepsilon}{2} p_\varkappa\right|$$
$$< e^{\frac{1}{2}\varepsilon p_\varkappa}.$$

Durch Einführung dieser beiden Ungleichungen in Gleichung (118) ergibt sich somit schließlich, wie behauptet (siehe Ungleichung (113)):

$$|g(p_\varkappa)| > e^{-\varepsilon p_\varkappa}$$

(für alle hinlänglich großen $\varkappa$), womit der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen ist.

Da das vorstehende Resultat im wesentlichen nur auf einer bestimmten Eigenschaft der Exponenten m_ν beruht, während die Koeffizienten a_{m_ν} einzig und allein der Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a^{m_\nu}|} = 1$$

zu genügen haben [1]), so erscheint dasselbe besonders geeignet, um Beispiele solcher Funktionen herzustellen, welche auf dem Einheitskreise noch Derivierte jeder beliebigen Ordnung besitzen und dennoch über denselben hinaus nicht fortsetzbar

---

[1]) Man könnte offenbar diese Bedingung noch dahin verallgemeinern, daß man nur eine Beziehung von der Form

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = a > 0$$

verlangt. An die Stelle des Einheitskreises tritt dann der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{a}$ als singuläre Linie.

sind. Man hat hierzu die a_{m_ν} nur so auszuwählen, daß sie außer der eben genannten Bedingung noch der folgenden:

$$\lim_{\nu=\infty} m_\nu^p \cdot a_{m_\nu} = 0 \qquad \text{für jedes endliche } p > 0$$

genügen, was sich auf unendlich viele Arten erzielen läßt[1]). (Beispiele: $m_\nu = \nu^m$, $a_{m_\nu} = a^\nu$, wo m eine ganze Zahl > 2, a ein ächter Bruch; $m_\nu = m^\nu$, wo wieder m eine ganze Zahl > 2, $a_{m_\nu} = \frac{1}{\nu^\nu}$ oder $a_{m_\nu} = \frac{1}{\nu!}\Big)$.

Transformiert man $f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ mit Hilfe der Substitution $x = e^{ti}$ (wo also t reell, wenn $|x| = 1$) so entspricht jeder auf dem Einheitskreise gelegenen singulären Stelle x' von $f(x)$ eine reelle singuläre Stelle t' (bzw. deren unendlich viele, nach dem Modul 2π kongruente) von $f(e^{ti})$ als Funktion der reellen Veränderlichen t, während zugleich deren unbeschränkte Differenzierbarkeit erhalten bleibt. Da $f(x^{-1})$ bzw. $f(e^{-ti})$ offenbar die analogen Eigenschaften besitzt und, wie leicht zu sehen, die singulären Stellen von $f(x)$ und $f(x^{-1})$ durch Bildung von $f(x) \pm f(x^{-1})$ sich nicht gegenseitig anullieren können, so existieren die Reihensummen

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_{m_\nu} (x^{m_\nu} \pm x^{-m_\nu})$$

mit Derivierten jeder Ordnung nur auf dem Einheitskreise und es definieren demnach die Reihen

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a_{m_\nu} \cos m^\nu t, \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, a_{m_\nu} \sin m_\nu t$$

Funktionen der reellen Veränderlichen t, welche durchweg unbeschränkt differenzierbar, aber nirgends nach der Taylorschen Reihen entwickelbar sind[3]).

---

[1]) Vgl. Math. Ann. 44 (1894), p. 43.

[2]) Vgl. die in der vorigen Fußnote zitierte Arbeit, p. 45.

[3]) Ein besonders lehrreiches Beispiel dieser Art liefert die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \sin 3^\nu t$, deren Taylorsche Entwickelung für unendlich viele überall dicht liegende Stellen zwar beständig divergente, für andere ebenfalls überall dicht liegende beständig konvergente Reihen liefert. Vgl. Math. Ann. 42 (1893), p. 179.