Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über einen Versuch zur Optik der bewegten Körper.

Von **M. Laue.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am **1.** Juli 1911.

Im Jahre 1904 machte Michelson[1]) den Vorschlag zu einem Interferenzversuch, welcher mit der Drehung der Erde um ihre Achse in einem ähnlichen Zusammenhange steht, wie der bekannte, von ihm, Morley und Miller des öfteren durchgeführte Versuch zu deren translatorischen Bewegung. Das Wesentlichste dabei ist, daß zwei kohärente Strahlen einen Kreis auf der Erde in entgegengesetztem Sinn durchlaufen, und daß die von ihnen dazu benötigten Zeiten durch den Interferenzversuch miteinander verglichen werden. Der Versuch bezweckt die Entscheidung der aus dem Gedankenkreise der Stokesschen Theorie stammenden Frage, ob der Äther in der Nähe der Erde deren Drehung mitmacht oder nicht. Im ersten Falle ist kein Einfluß der Drehung auf die Lage des mittelsten Interferenzstreifens gleicher Phase zu erwarten, wohl aber im zweiten Fall. Wir wollen hier zusehen, was die verschiedenen elektrodynamischen Theorien der bewegten Körper erwarten lassen, ob sich vielleicht aus dem Versuch eine Entscheidung zwischen ihnen herbeiführen läßt. Wir denken da in erster Linie an die Relativitätstheorie und die Lorentzsche Theorie des ruhenden Äthers, welche man vielleicht um des Gegensatzes willen passend als „Absoluttheorie" bezeichnet; und zwar an deren ältere Form, denn jene spätere, 1904 veröffentlichte unterscheidet sich, soweit Vorgänge im leeren Raum oder in der nach beiden Theorien (auch bei Bewegung) davon nicht merklich verschiedenen Luft

[1]) A. A. Michelson, Phil. Mag. (6) 8, 716, 1904.

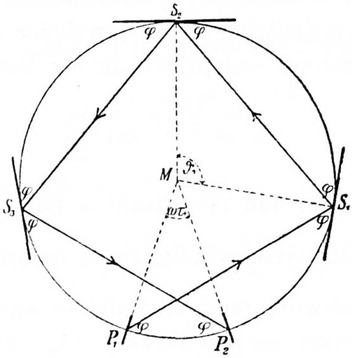
in Frage kommen, von der Relativitätstheorie schon in den Grundgleichungen überhaupt nicht. Daneben wollen wir auch die Theorien von Cohn und Hertz streifen.

a) Relativitätstheorie.

Wir setzen zunächst eine vereinfachte Versuchsanordnung voraus. Der Versuch spiele sich in einer Ebene ab, welche um eine zu ihr senkrechte, in einem berechtigten[1]) Bezugssystem K^0 ruhende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert; der Schnittpunkt der Achse mit der Ebene sei M. Um M beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius r, in einem Punkt P seiner Peripherie liege senkrecht zu ihr die spiegelnde Platte, welche nach Michelsons Vorschlag die kohärenten Strahlen zunächst trennt, um sie nach ihrer Rückkehr vereinigt in das Beobachtungsfernrohr zu werfen. In $(n-1)$ weiteren Punkten desselben Kreises, welche mit P zusammen die Ecken eines regulären n-Ecks bilden, stellen wir Spiegel auf, welche die beiden Strahlen einander zuwerfen sollen. Wir bemerken zugleich, daß die Geschwindigkeit gegen das System K^0 für alle Punkte dieser Ebene ihren absoluten Wert niemals ändert, daß somit — auf das genannte System bezogen — auch alle Strecken ihre Längen dauernd beibehalten.

Die erste Frage ist nun, ob es überhaupt eine Aufstellung der Spiegel gibt, bei welcher beide von P ausgehende Strahlen wieder nach demselben Punkt P zurückgelangen. Der positiv (das soll heißen: im Sinne der Rotation) umlaufende Strahl wird, bezogen auf das System K, Sehnen jenes Kreises zurücklegen, welche länger sind als die Seiten des n-Ecks; denn während er von einem zu dem anderen Spiegel fortschreitet, bewegt sich der letztere um eine gewisse Strecke ungefähr in der Richtung des Strahls. Da aber alle diese Sehnen gleichlang sind, treffen sie den Kreis alle unter dem gleichen Winkel φ. (Die Figur veranschaulicht dies für den Fall

[1]) Ein gegen ein berechtigtes System K^0 rotierendes System ist kein berechtigtes.



Die Bahn des positiv umlaufenden Strahls bezogen auf das System K^0.
P_1 die Platte P beim Abgang des Strahles,
P_2 die Platte P bei der Rückkehr des Strahles,
S_1, S_2, S_3, die Spiegel zu den Zeiten, da sie den Strahl reflektieren:

$n = 4$.) Stellen wir die Spiegel tangential zum Kreis, so wird somit Einfalls- und Reflexionswinkel gleich. Dies stimmt aber mit dem Reflexionsgesetz überein. Denn die Translationsgeschwindigkeit der Spiegel liegt tangential zu ihrer Fläche, ist somit ohne Einfluß. Die Rotation dürfen wir aber für die Betrachtung der Reflexion an den Spiegeln und ebenso für die Reflexion an der Platte in P erfahrungsgemäß vernachlässigen. Bei dieser Stellung der Spiegel wird also der positiv umlaufende Strahl, wenn er P in der geeigneten Richtung verläßt, auch wieder exakt nach P zurückkehren. Dasselbe aber gilt für den negativ umlaufenden Strahl; denn auch für ihn werden jetzt Einfalls- und Reflexionswinkel einander gleich, so daß er n gleiche Sehnen zurücklegen und so, wenn er P in der passenden Richtung verließ, auch wieder nach P gelangen wird. Die Winkel, unter welchen beide Strahlen auf die Platte in P auffallen (φ in der Figur), sind die gleichen, unter welchen sie sie verließen; daher werden sie auch von dieser, wie sie vorher an ihr aus einem einheitlichen Strahl entstanden, zu einem einheitlichen Strahl zusammengesetzt.

Die Zeit τ_+, welche der positiv umlaufende Strahl braucht, läßt sich mit dem Zentriwinkel ϑ_+, welcher einer der von ihm zurückgelegten Sehnen entspricht, in die Beziehung

1) $$\tau_+ = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \frac{\vartheta_+}{2}$$

setzen; sie sagt aus, daß der Strahl n Sehnen von der Länge $2\,r \sin \dfrac{\vartheta_+}{2}$ mit der Geschwindigkeit c zurücklegt. Wäre nun die Rotationsgeschwindigkeit ω Null, so wäre $n\,\vartheta_+ = 2\,\pi$; so aber ist $n\,\vartheta_+$ größer um den Winkel $\omega\,\tau_+$, welchen P während der Zeit τ_+ zurücklegt (vgl. die Figur); also:

2) $$n\,\vartheta_+ = 2\,\pi + \omega\,\tau_+.$$

Die Elimination von ϑ_+ aus 1) und 2) ergibt

3) $$\tau_+ = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \left\{\frac{1}{n}\left(\pi + \frac{\omega\,\tau_+}{2}\right)\right\}.$$

Analog findet man für den negativ laufenden Strahl die Zeit

3a) $$\tau_- = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \left\{\frac{1}{n}\left(\pi - \frac{\omega\,\tau_-}{2}\right)\right\}.$$

Die Differenz beider ist nach der Formel:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

4) $$\Delta\,\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{4\,n\,r}{c} \cos \left\{\frac{\pi}{n} + \frac{\omega\,\Delta\,\tau}{4\,n}\right\} \sin \left\{\frac{\omega}{4\,n}(\tau_+ + \tau_-)\right\}.$$

Soweit ist die Rechnung streng; vernachlässigen wir nun $\omega\,\Delta\,\tau$ gegen π, so können wir hier den Cosinus gleich $\cos \dfrac{\pi}{n}$ und außerdem

$$\omega\,(\tau_+ + \tau_-) = 2\,\omega\,\tau_0$$

setzen, wobei τ_0 die Umlaufszeit im Fall $\omega = 0$ bedeutet; d. h. nach 1) und 2)

$$\tau_0 = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Vernachlässigen wir ferner $\omega^2 \tau_0^2$ gegen 1, so können wir $\sin \frac{\omega}{2n} \tau_0 = \frac{\omega}{2n} \tau_0$ setzen und finden als Näherungswert

$$\Delta \tau = \frac{2 n \omega r^2}{c^2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Der Inhalt F des n-Ecks ist aber

$$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n};$$

also ist

5) $$\Delta \tau = \frac{4}{c^2} \omega F.$$

Nach Michelsons Vorschlag wäre $F = 10^{10}$ cm^2, während ω von derselben Ordnung wie die Drehgeschwindigkeit Ω der Erde (10^{-4} sec^{-1}) ist. Daraus ergibt sich für $\Delta\tau$ die Größenordnung 10^{-15} sec; sie ist durch Interferenzversuche mit sichtbarem Licht leicht nachzuweisen.

Nun ist freilich zu bedenken, daß der Punkt M nicht ruhend und die Ebene des Versuches nicht senkrecht zur Erdachse gewählt werden kann. Vielmehr hat der Mittelpunkt M des n-Ecks selbst eine Translationsgeschwindigkeit zu einem gegen die Sonne ruhenden Bezugssystem K^0, welche sich additiv aus zwei Teilen zusammensetzt. Der erste davon ist die Translationsgeschwindigkeit des Erdmittelpunktes, der zweite rührt von der Drehung der Erde um ihre Achse her. Der erste Teil darf aber für die Dauer eines Versuches als unveränderlich angesehen werden und auch der zweite ändert sich während der Zeit τ eines Umlaufs höchstens um $\omega R \tau_0^2$, wobei R der Radius der Erde, d. h. gleich 6.10^8 cm ist. Dieser Betrag ist unter den obigen Annahmen von der Größenordnung 10^{-5} cm/sec, also vollständig zu vernachlässigen. Eine konstante Translationsgeschwindigkeit ist aber dem Relativitätsprinzip zufolge ohne jeden Einfluß auf die Lage der Interferenzstreifen im Fernrohre; der Punkt M ruht dabei eben in einem anderen berechtigtem System K. Die Form des n-Ecks bezogen auf K^0 wird dadurch freilich verändert, da infolge der Lorentzkontraktion aus dem Kreis um M eine Ellipse wird. Daß sich ferner die Lage der Ebene in diesem System während der Zeit τ ändert, bewirkt, daß beide Strahlen um einen Winkel von der Ordnung von $\omega \tau_0$ ($= 10^{-9}$) aus der Ebene abgelenkt werden. Dieser liegt aber weit unterhalb der Grenze des Auflösungsvermögens des Fernrohrs.

In Betracht zu ziehen ist dagegen, daß die Rotationsgeschwindigkeit ω nicht die Drehgeschwindigkeit der Erde Ω ist; vielmehr ist, wenn φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet,

$$\omega = \Omega \sin \varphi,$$

also nach 5)

$$\Delta \tau = \frac{4}{c^2} \Omega F \sin \varphi. \tag{6}$$

Am Äquator ($\varphi = 0$) ist somit keine Verschiebung der Streifen vorhanden, und beim Übergange von der nördlichen zur südlichen Halbkugel muß sie ihr Zeichen umkehren.

b) Absoluttheorie.

Ruht der Punkt M in dem bevorzugten Bezugssystem dieser Theorie, so gelten alle Betrachtungen, welche wir unter a) über die Stellung der Spiegel angestellt haben, unverändert; denn das geometrische Gesetz der Reflexion am bewegten Spiegel ist allen elektromagnetischen Theorien gemeinsam. Ebenso läßt sich die zu Gleichung 5) führende Berechnung Schritt für Schritt übertragen. Ein Unterschied zwischen den Theorien tritt erst auf, wenn der Punkt M noch eine translatorische Geschwindigkeit v erhält, welche aber aus denselben Gründen wie oben als zeitlich konstant betrachtet werden darf (auch die Lagenänderung der Ebene ist aus den angegebenen Gründen belanglos). Nach der Elektronentheorie bleibt nämlich der um M beschriebene Kreis dabei unverändert, während nach der Relativitätstheorie, wie erwähnt, aus ihm eine Ellipse wird. Dies hat einmal zur Folge, daß nach der Elektronentheorie jetzt die beiden Strahlen nicht mehr den gleichen Weg zurücklegen, sondern die Platte in P in verschiedenen Punkten und unter anderen Winkeln erreichen als wie sie sie verlassen haben. Doch sind diese Änderungen höchstens von der zweiten Ordnung in $\frac{v}{c}$, also unbeobachtbar klein. Ebenso wird sich die Differenz $\Delta\tau$ vielleicht um Größen zweiter und höherer Ordnung ändern, was aber wiederum nicht beobachtet werden kann. Also wird auch hier Gleichung 6) eine ausreichende Näherung darstellen; es läßt sich somit aus dem vorgeschlagenen Versuch keinenfalls eine Entscheidung zwischen Relativitätstheorie und der Theorie des ruhenden Äthers treffen.

c) Die Cohnsche Elektrodynamik.

Die Frage, welches Ergebnis der in Rede stehende Versuch nach dieser Theorie haben muß, hat eigentlich Cohn selbst in einer seiner Abhandlungen schon beantwortet[1]). Ergänzen wir seine kurzen Andeutungen, so lautet seine Überlegung wie folgt: Man denke sich die Ebene des Versuches an einer beliebigen Stelle der Erde tangential zu ihr. Die Zeit dt, welche das Licht zur Durchlaufung der Strecke ds (gemessen auf der Erde) braucht, wird um $\frac{\mathfrak{q}_s\, ds}{c^2}$ verlängert, wenn ds sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegt. Infolgedessen ist die Durchlaufungszeit des positiv umlaufenden Strahls um $\frac{1}{c^2}\oint \mathfrak{q}_s\, ds$ länger als im Falle verschwindender Rotation, und für den negativ umlaufenden Strahl um ebensoviel kleiner. Wenden wir auf dies Linienintegral den Stokesschen Satz an, so finden wir somit

$$\Delta\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{2}{c^2}\oint \mathfrak{q}_s\, ds = \frac{2}{c^2}\, F \operatorname{rot}_n \mathfrak{q}.$$

Nun ist aber, wenn Ω die Geschwindigkeit der Erddrehung bedeutet,

$$|\operatorname{rot}\mathfrak{q}| = 2\,\Omega,$$

---

[1]) E. Cohn, Berliner Berichte 1904, p. 1404 (vgl. besonders p. 1410 unten).

also, wenn φ die geographische Breite ist,

$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{q} = 2\,\Omega \sin \varphi;$$

und in Übereinstimmung mit 6)

$$\Delta \tau = \frac{4}{c^2}\,\Omega F \sin \varphi.$$

Zweifelhaft kann dabei freilich erscheinen, ob wir das Linienintegral über den Umfang des n-Ecks ausführen dürfen; denn die Strahlen werden, bezogen auf die rotierende Ebene, keine gradlinigen Bahnen beschreiben. Die Berücksichtigung dieses Umstandes würde aber nur eine Korrektion höherer Ordnung an $\Delta \tau$ bewirken.

d) Theorie von Hertz.

Sehr einfach ist die Entscheidung nach dieser Theorie. Der Versuch wird in Luft angestellt, welche die Bewegung der Erde mitmacht. Alle Teile der Anordnung einschließlich der Luft behalten ihre Lage zueinander dauernd bei; also ist kein Einfluß der Bewegung vorhanden, sondern $\Delta \tau = 0$. Denn in einem wie ein starrer Körper bewegten System verlaufen alle elektromagnetischen Vorgänge wie bei Ruhe.

Wir sehen somit, daß alle Theorien, welche für die Optik bewegter Körper ernstlich in Frage kommen — die Hertzsche gehörte schon wegen des Fizeauschen Interferenzversuches über die Mitführung des Lichtes nie dazu — über den in Frage stehenden Effekt einig sind. Eine Entscheidung zwischen ihnen läßt der Versuch nicht zu. Trotzdem wäre es sehr wünschenswert, daß er ausgeführt würde; denn die Optik der bewegten Körper ist nicht so reich an exakten Versuchen, als daß ihr nicht jede Verbreiterung ihrer experimentellen Grundlagen von Nutzen wäre.

München, Institut für theoretische Physik, Juni 1911.