Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit?

Von **R. Gans.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Mai 1911.

Bewegt sich eine Kugel unter dem Einflusse einer nach Größe und Richtung konstanten Kraft F in einer reibenden Flüssigkeit, so wird im stationären Endzustande die Geschwindigkeit V die Richtung der Kraft haben und ihr proportional sein, es wird also die Gleichung

$$V = \gamma F \tag{1}$$

gelten, und wir können γ als Beweglichkeit der Kugel in der betreffenden Flüssigkeit bezeichnen. Die Geschwindigkeit wird dadurch charakterisiert sein, daß die von der wirkenden Kraft geleistete Arbeit gleich der in der Flüssigkeit durch die Strömung entwickelten Reibungswärme ist. Nach (1) muß also

$$F \cdot V = \frac{V^2}{\gamma} \tag{2}$$

die in der Zeiteinheit in der Flüssigkeit erzeugte Wärme sein.

Durch Integration der dieses Problem beherrschenden Differentialgleichungen der Hydrodynamik fand Stokes,[1]) daß

$$\gamma = \frac{1}{6\,\pi\,\mu\,a} \tag{3}$$

[1]) Stokes, Cambr. Trans. 9, 1851 oder Scientific Papers 3, p. 1; siehe auch H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch v. J. Friedel. Leipzig und Berlin 1897, § 325, p. 682.

ist, wenn a den Radius der Kugel, μ den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit bedeutet. Hierbei ist vorausgesetzt, daß $\frac{V a s'}{\mu}$ eine gegen die Einheit kleine Zahl ist, unter s' das spezifische Gewicht der Flüssigkeit verstanden.

Ist die wirkende Kraft F die Schwerkraft, also

$$F = \frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s'), \tag{4}$$

wo s das mittlere spezifische Gewicht der Kugel bezeichnet, so bestimmt sich aus der Fallgeschwindigkeit bei bekanntem Reibungskoeffizienten μ der Kugelradius nach (1), (3) und (4) zu

$$a = 3 \sqrt{\frac{\mu V}{2 g (s - s')}}. \tag{5}$$

Diese Theorie von Stokes hat neuerdings dadurch an Bedeutung gewonnen, weil man sie zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums herangezogen hat. Das Prinzip dieser Messung besteht darin, daß man ein mit der Elektrizitätsmenge e geladenes Teilchen einmal einfach unter dem Einfluß der Schwere fallen läßt, wobei sich die Fallgeschwindigkeit V_1 nach (1), (3) und (4) aus der Formel

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s') = 6 \pi \mu a V_1 \tag{6}$$

ergibt, und dann dem Schwerefeld ein gleich (oder entgegengesetzt) gerichtetes elektrisches Feld der Intensität $\mathfrak{E}$ überlagert, wobei eine Fallgeschwindigkeit V_2 resultiert, die sich aus

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s') + e \mathfrak{E} = 6 \pi \mu a V_2 \tag{7}$$

berechnet.

Aus (6) und (7) folgt sowohl der Radius des Teilchens als auch seine elektrische Ladung, nämlich

$$\left.\begin{aligned} a &= 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s-s')g}} \\ e\mathfrak{E} &= 9\pi(V_2 - V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s-s')g}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Auf der vorjährigen Naturforscherversammlung in Königsberg berichtete nun Herr Ehrenhaft[1]) über seine Bestimmungen des elektrischen Elementarquantums, und es schien aus seinen Versuchen hervorzugehen, daß das Elementarquantum keine Konstante ist, sondern daß einige Teilchen eine größere, andere eine kleinere Ladung besitzen, als sich nach anderen Methoden ergeben hatte.

Die Diskussion, die sich an diesen Vortrag knüpfte, beschäftigte sich mit der Frage, welche Gründe wohl die Schwankungen der Resultate veranlaßt haben könnten, und so wurden unter anderem auch die Voraussetzungen der Stokesschen Theorie erörtert.

Vor allem wies Herr Sommerfeld[2]) darauf hin, daß eine Vorbedingung für die Verwendung der Stokesschen Formel die Kugelgestalt der fallenden Teilchen ist, und daß scheiben- oder stäbchenförmige Teilchen bei Verwendung der für die Kugel gültigen Formel zu kleine Werte für e ergeben würden.

In einem Privatgespräch mit einigen Kollegen nach der betreffenden Sitzung stellte ich die Frage „Wie fallen eigentlich Platten oder Stäbchen in einer reibenden Flüssigkeit?“, und ich erhielt von dem einen die Antwort „Eine Platte fällt schmalseit“. Als Grund für seine Behauptung gab er an, jeder Körper falle so, wie er den geringsten Widerstand von seiten der umgebenden Flüssigkeit erfahre. Andere dagegen meinten: „Nein, eine Platte fällt breitseit“ und ließen zur Erhärtung ihrer Aussage Visitenkarten etc. fallen, die in der Tat breitseit ohne Störung herunterfielen, während sie, wenn sie anfänglich schmalseit fielen, ehe sie den Boden erreicht hatten,

1) Ehrenhaft, Phys. Zs. 11, 1910, p. 940.

2) A. Sommerfeld, Phys. Zs. 11, 1910, p. 949.

sich mehrfach überschlugen, Erscheinungen, die ja in der Aviatik ganz bekannt sind. Schließlich erwähnte noch einer, er erinnere sich aus seiner Knabenzeit, daß er beim Baden nach Tellern getaucht habe, die stets aufrecht, d. h. so, wie sie auf dem Tische stehen, also auch breitseit gesunken seien.

Da sonach die Meinungen über die Frage, wie eine Platte oder ein Stäbchen in einer reibenden Flüssigkeit fällt, geteilt waren, sei es mir gestattet, im folgenden auf dies Problem einzugehen, vollkommen losgelöst von der Diskussion über die Ehrenhaftschen Versuche, die inzwischen ganz andere Bahnen eingeschlagen hat.

Zunächst sei bemerkt, daß es ein Minimalprinzip des Widerstandes in dem oben benutzten Sinne für die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit nicht gibt. Es wird hier wohl eine Verwechslung mit einem Theorem von Helmholtz[1]) vorgelegen haben, welches aussagt, daß unter gegebenen Oberflächenbedingungen die Wärmeentwicklung bei stationärer Strömung geringer ist als bei irgend einer anderen Flüssigkeitsbewegung. Sodann beweisen die Experimente der fallenden Visitenkarten für unser Problem nichts, da wir uns nur mit dem von Stokes behandelten Grenzfalle unendlich kleiner Geschwindigkeiten beschäftigen, bei dem die von der Trägheit der Flüssigkeit abhängigen Glieder vernachlässigt werden können. Das ist der Fall, wenn $\frac{V l s'}{\mu}$ klein gegen Eins ist, unter l eine Lineardimension des fallenden Körpers verstanden. Diese Bedingung war nun bei den Versuchen keineswegs erfüllt, denn da für Luft $s' = 0{,}00129$, $\mu = 0{,}00017$ ist, hätte V noch klein gegen 0,01 cm/sec sein müssen.

Schließlich müssen wir auch eine Folgerung aus der Art des Sinkens von Tellern im Wasser abweisen, da hier erstens die Stabilität der aufrechten Lage schon durch die gewölbte Form des Körpers, d. h. durch den Tellerrand, gewährleistet ist (wegen der Unsymmetrie von oben und unten fällt der

[1]) H. v. Helmholtz, Wiss. Abh. 1. p. 223.

Teller im Wasser nur in der aufrechten Lage), zweitens ist aber auch hier die Fallgeschwindigkeit viel zu groß, als daß man berechtigt wäre, von der Trägheit der Flüssigkeit abzusehen, denn für Wasser ist $s' = 1$; $\mu = 0{,}018$, so daß V klein gegen 0,001 cm/sec hätte sein müssen.

Da also die angestellten Experimente für die von uns aufgeworfene Frage nicht in Betracht kommen und auch nur schwer entscheidende Versuche anzustellen sein werden, so wollen wir jetzt ermitteln, wie die Theorie unser Problem löst.

Anstatt die Geschwindigkeit und den Druck zu suchen, die an jeder Stelle der Flüssigkeit herrschen, wenn man dem in ihr befindlichen festen Körper eine Bewegung von konstanter Geschwindigkeit erteilt, können wir uns fragen, wie ein konstantes Strömungsfeld durch einen in ihr ruhenden festen Körper modifiziert wird, und welche Kräfte und Drehmomente man aufwenden muß, um den Körper in dieser Strömung in Ruhe zu halten.

Dieses Problem wird durch die Differentialgleichungen beherrscht[1])

$$\left.\begin{aligned} \mu \Delta v_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \Delta v_y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu \Delta v_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

wenn an der Oberfläche des festen Körpers

$$v_x = 0; \qquad v_y = 0; \qquad v_z = 0 \tag{11}$$

ist und im Unendlichen etwa die Bedingung

$$v_x = U; \qquad v_y = 0; \qquad v_z = 0 \tag{12a}$$

[1]) Vgl. z. B. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel. Leipzig und Berlin 1907, § 324.

oder

$$v_x = 0; \quad v_y = V; \quad v_z = 0 \tag{12 b}$$

oder

$$v_x = 0; \quad v_y = 0; \quad v_z = W \tag{12 c}$$

gilt.

Die Druckkräfte ergeben sich ferner aus den Formeln[1])

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & p_{yz} = p_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & p_{zx} = p_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{xy} = p_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Differentialgleichungen, die Grenzbedingungen und die Drucke sind, wie man aus den Gleichungen (9) bis (13) ersieht, linear in den Geschwindigkeitskomponenten, d. h. die Superposition zweier Lösungssysteme (Teilbewegungen) gibt wieder ein mögliches Lösungssystem (resultierende Bewegung).

Deshalb gilt ohne weiteres der Satz:

Die Komponenten der Kraft und des Drehmoments, die nötig sind, um den festen Körper bei der resultierenden Bewegung in Ruhe zu halten, sind einfach die Summe der entsprechenden Komponenten, die bei den Teilbewegungen erforderlich sind.

Insbesondere: Befindet sich ein Körper mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen, deren Schnittlinien, die „Hauptachsen", den Koordinatenachsen parallel liegen mögen, in der Flüssigkeit, und hat die Geschwindigkeit im Unendlichen die Komponenten U, V, W, so setzt sich die Lösung aus den drei Teilbewegungen zusammen, die wir erhalten, wenn wir als Bedingung im Unendlichen erstens die Gleichung (12a), zweitens (12b), drittens (12c) einführen.

Bei keiner dieser Teilbewegungen, die dadurch charakterisiert sind, daß der Körper mit einer seiner Hauptachsen

[1]) H. Lamb, l. c., p. 662, § 314.

parallel dem ungestörten Strömungsfelde liegt, ist nun aus Symmetriegründen ein Drehmoment erforderlich, um den Körper in seiner Lage zu halten, also ist bei der resultierenden Bewegung, bei der der Körper eine ganz beliebige Orientierung zum Strömungsfelde hat, auch kein Drehmoment nötig oder, wenn wir wieder zu dem Falle übergehen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, der Körper aber geradlinig in derselben bewegt wird, so gilt der Satz:

Auf den bewegten Körper wirkt kein Drehmoment infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit. Scheiben oder Stäbchen, die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, haben also nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in einer Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen.

Während die bisherigen Resultate einzig und allein aus der Linearität der Gleichungen und den Symmetrieeigenschaften des Körpers folgten, müssen wir, um den Bewegungsvorgang in seinen Einzelheiten angeben zu können, die Körperform genauer präzisieren.

Wir wollen also annehmen, daß eine Scheibe ein abgeplattetes, ein Stäbchen ein verlängertes Rotationsellipsoid ist; die große Halbachse möge a, die kleine c heißen. Die für die stationäre Bewegung maßgebenden Formeln sind von Oberbeck[1]) aufgestellt worden.

Aus diesen Formeln folgt, daß die Beweglichkeit γ, d. h. das Verhältnis der Körpergeschwindigkeit zur wirkenden Kraft sich aus der Gleichung

$$\gamma_a = \frac{1}{6\,\pi\,\mu\,a}\,\delta_a \tag{14}$$

resp.

$$\gamma_c = \frac{1}{6\,\pi\,\mu\,a}\,\delta_c \tag{15}$$

berechnet, je nachdem die Bewegung in Richtung der großen oder der kleinen Achse des Ellipsoids stattfindet.

[1]) Oberbeck, Crelles Journal 81, 1876, p. 62; s. auch H. Lamb. l. c., § 326.

Hierbei ist[1]) für Scheiben, bei denen $a = b > c$ ist,

$$\delta_a = a\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{a^2}{(a^2+\lambda)^2}\right) \tag{16}$$

$$\delta_c = a\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{c^2}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\right) \tag{17}$$

und für Stäbchen, bei denen $a > b = c$ ist,

$$\delta_a = a\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{a^2}{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}\right) \tag{18}$$

$$\delta_c = a\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{c^2}{(c^2+\lambda)^2}\right). \tag{19}$$

Die Ausführung der Quadraturen ergibt für Scheiben

$$\delta_a = \frac{3}{4}\left[\frac{1-2\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}}\arccos\frac{c}{a}+\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right] \tag{16'}$$

$$\delta_c = \frac{3}{8}\left[\frac{3-2\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}}\arccos\frac{c}{a}-\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right], \tag{17'}$$

und zwar gilt (16'), wenn die Bewegung schmalseit, (17'), wenn sie breitseit erfolgt.

Ist die Scheibe so abgeplattet, daß die zweiten Potenzen von $\frac{c}{a}$ vernachlässigt werden können, so gehen (16') und (17') in

$$\delta_a = \frac{9\pi}{16}\left(1-\frac{8}{3\pi}\frac{c}{a}\right) \tag{16''}$$

$$\delta_c = \frac{3\pi}{8} \tag{17''}$$

[1]) H. Lamb, l. c., § 326, Formeln (6), (7), (14), (15).

über. Weicht andererseits das abgeplattete Rotationsellipsoid so wenig von der Kugelform ab, daß $1 - \frac{c}{a}$ sehr klein ist, so wird

$$\delta_a = 1 + \frac{2}{5}\left(1 - \frac{c}{a}\right) \tag{16'''}$$

$$\delta_c = 1 + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{c}{a}\right). \tag{17'''}$$

Für Stäbchen lassen sich ganz analoge Rechnungen anstellen. Die Ausführung der in (18) und (19) geforderten Quadraturen ergibt

$$\delta_a = \frac{3}{8}\left[\frac{2 - \frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}^{\,3}} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} - \frac{2}{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right] \tag{18'}$$

$$\delta_c = \frac{3}{16}\left[\frac{2 - 3\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}^{\,3}} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} + \frac{2}{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right], \tag{19'}$$

und zwar kommen (18') und (19') für Bewegungen des Stabes parallel resp. senkrecht zu seiner Achse in Betracht.

Für kleine Werte von $\frac{c}{a}$ ist

$$\delta_a = \frac{3}{4}\left\{2 \lg \frac{2a}{c} - 1\right\} \tag{18''}$$

$$\delta_c = \frac{3}{8}\left\{2 \lg \frac{2a}{c} + 1\right\} \tag{19''}$$

und für kleine Werte von $1 - \frac{c}{a}$

$$\delta_a = 1 + \frac{4}{5}\left(1 - \frac{c}{a}\right) \tag{18'''}$$

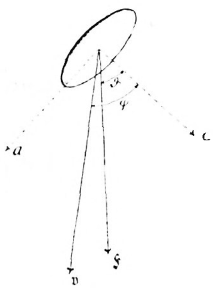
$$\delta_c = 1 + \frac{3}{5}\left(1 - \frac{c}{a}\right). \tag{19'''}$$

In der folgenden Tabelle 1 sind für verschiedene Achsenverhältnisse nach (16'), (17') und (18'), (19') die Werte von δ_a und δ_c für Platten und Stäbchen berechnet.

Tabelle I.

$\frac{c}{a}$	Für Platten δ_a	Für Platten δ_c	Für Stäbchen δ_a	Für Stäbchen δ_c
0.0	1.767	1.178	∞	∞
0.1	1.631	1.174	3.764	2.617
0.2	1.516	1.160	2.799	2.108
0.3	1.418	1.145	2.267	2.815
0.4	1.335	1.125	1.914	1.606
0.5	1.261	1.105	1.662	1.451
0.6	1.196	1.084	1.467	1.326
0.7	1.139	1.063	1.314	1.224
0.8	1.088	1.041	1.191	1.138
0.9	1.041	1.019	1.091	1.063
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000

Bildet die Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Platten- (resp. Stab-) Achse den Winkel ϑ, so wird der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ mit der Achse einen Winkel φ einschließen (die Figur bezieht sich auf Platten), und zwar ist



$$\mathfrak{v}_a = \gamma_a \mathfrak{F}_a$$
$$\mathfrak{v}_c = \gamma_c \mathfrak{F}_c \tag{20}$$

oder

$$v \sin \varphi = \gamma_a F \sin \vartheta$$
$$v \cos \varphi = \gamma_c F \cos \vartheta . \tag{20'}$$

Durch Division der beiden Gleichungen (20') ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_a}{\gamma_c} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\delta_a}{\delta_c} \operatorname{tg} \vartheta . \tag{21}$$

Daraus folgt, daß für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Richtung der Geschwindigkeit mit der der Kraft zusammenfällt.

Die maximale Abweichung zwischen der Geschwindigkeits- und der Kraftrichtung findet nach (21) statt, wenn

$$\varphi - \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\delta_a}{\delta_c}\operatorname{tg}\vartheta\right) - \vartheta$$

ein Maximum ist. (Bei Stäben ist $\vartheta - \varphi$ positiv), und zwar ist dann

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{\delta_c}{\delta_a}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\delta_a}{\delta_c}}, \tag{22}$$

d. h. ϑ und φ ergänzen sich zu 90°. (Für Stäbe ist ϑ mit φ zu vertauschen.)

In der folgenden Tabelle 2 sind für verschiedene Achsenverhältnisse $\frac{c}{a}$ die Winkel ϑ, für die $\varphi - \vartheta$ für Platten resp. $\vartheta - \varphi$ für Stäbchen den größten Wert hat, und diese Werte $\varphi - \vartheta$ resp. $\vartheta - \varphi$ selbst, d. h. die Abweichungen zwischen der Geschwindigkeits- und Kraftrichtung angegeben.

Tabelle 2.

$\frac{c}{a}$	Für Platten ϑ	Für Platten $\varphi - \vartheta$	Für Stäbchen ϑ	Für Stäbchen $\vartheta - \varphi$
0.0	39° 41′	11° 32′	54° 44′	19° 28′
0.1	40 18	9 24	50 11	10 22
0.2	41 11	7 38	49 03	8 06
0.3	41 56	6 08	48 11	6 22
0.4	42 33	4 54	47 31	5 02
0.5	43 06	3 48	46 57	3 54
0.6	43 35	2 50	46 27	2 54
0.7	44 01	1 58	46 01	2 02
0.8	44 22	1 16	45 39	1 18
0.9	44 41	0 38	45 22	0 44
1.0	45 00	0 00	45 00	0 00

In Tabelle 3 ist schließlich für ganz flache Scheiben und ganz gestreckte Stäbe $\left(\frac{c}{a} = 0\right)$, für die $\frac{\delta_a}{\delta_c} = 1{,}5$ (resp. 2) ist. $\varphi - \vartheta$ (resp. $\vartheta - \varphi$) als Funktion von ϑ berechnet.

Tabelle 3.

ϑ	Für Platten $\varphi - \vartheta$	Für Stäbchen $\vartheta - \varphi$
0^0	0^0 00′	0^0 00′
10	4 49	4 58
20	8 38	9 41
30	10 54	13 54
40	11 32	17 14
50	10 47	19 12
60	8 57	19 06
70	6 21	16 04
80	3 18	9 26
90	0 00	0 00

Aus Tabelle 2 ersieht man, daß man aus dem nicht senkrechten Fall von Teilchen in einer Flüssigkeit einen Schluß auf ihre Abweichung von der Kugelgestalt ziehen kann, doch ist, worauf mich Herr Sommerfeld gelegentlich eines Briefwechsels über diese Frage aufmerksam gemacht hat, dies Kriterium nicht besonders scharf, da im äußersten Falle die Abweichung von der Vertikalen bei Platten $11^0\ 32'$, bei Stäbchen $19^0\ 28'$ beträgt.

Die für die Bestimmung des Elementarquantums maßgebenden Gleichungen (6) und (7) nehmen für Plattenform die Gestalt an

$$\frac{4\pi}{3} a^2 c g (s - s') = \frac{6\pi\mu a V_1}{\delta} \tag{6'}$$

$$\frac{4\pi}{3} a^2 c g (s - s') + e\mathfrak{E} = \frac{6\pi\mu a V_2}{\delta}, \tag{7'}$$

und aus ihnen folgt

$$\left.\begin{aligned} a &= 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta\,\frac{c}{a}}} \\ e\mathfrak{E} &= 9\pi(V_2 - V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta^3\,\frac{c}{a}}} \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

anstatt der Gleichungen (8), und zwar sind für δ die Werte δ_a und δ_c zu nehmen, je nachdem die Platte schmalseit oder breitseit fällt.

Für Stäbe ergibt sich in analoger Weise

$$a = 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta\frac{c^2}{a^2}}}$$

$$e\mathfrak{E} = 9\pi(V_2-V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta^3\frac{c^2}{a^2}}}, \tag{8''}$$

wenn in diesen Formeln die für Stäbe gültigen δ-Werte substituiert werden.

Sommerfeld gab in der Diskussion an, daß die von Ehrenhaft berechneten Werte von e, falls die Teilchen sehr dünne Platten wären, mit $\sqrt{\frac{a}{c}}$, falls sie sehr gestreckte Stäbchen wären, mit $\frac{\frac{a}{c}}{\lg\frac{a}{c}}$ zu multiplizieren seien. Wie wir aus den Formeln (8') und (8'') sowie aus den asymptotischen Werten für δ (Formeln (16''), (17''), (18''), (19'')) ersehen, stimmt dies Resultat, ganz gleichgültig, wie das Teilchen gegen die Vertikale orientiert ist.

Tübingen, Physikalisches Institut
30. März 1911.