

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft I

Januar- bis Märzszitzung

München 1911

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flug- technischen Anwendungen.

Von W. M. Kutta.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Februar 1911.

1. Allgemeines.

Die Frage nach der allgemeinsten zweidimensionalen Zirkulationsströmung um die geschlossene, sich nicht überschneidende Kontur C der Ebene z führt auf die Aufgabe der konformen Abbildung des von der Strömung durchflossenen Außengebietes von C auf das Außengebiet eines Kreises K in der Ebene ζ . Diese Abbildung muß singularitätenfrei und eindeutig sein, die unendlich fernen Punkte in z und ζ sollen sich entsprechen. K kann etwa als Einheitskreis um den Nullpunkt angenommen werden. Die Abbildung sei durch $z = F(\zeta)$ geleistet.

Dann erhält man die allgemeinste Zirkulationsströmung um C aus derjenigen um K . Die Strömungsfunktion ist:

$$W = c_1 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - i \cdot c_2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i \cdot c \ln \zeta.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus der Strömungsgeschwindigkeit V und ihrer Richtung β gegen die x -Achse in der Ebene z ; die Wahl von c legt die Stärke der Zirkulation um die Kontur C fest und erfordert eine besondere Annahme, z. B. glattes Abströmen an einer Spitze oder Ecke der Kontur. Der von C erfahrene Auftrieb ist $2\pi\varrho \cdot V \cdot c$, wo ϱ die Dichte der strömenden inkompressiblen Flüssigkeit bedeutet.

Ein beliebiger anderer Kreis K_1 in ζ , der Kreis K einschließt, wird durch die vorige Abbildung $z = F(\zeta)$ in eine geschlossene, sich nicht überschneidende, C einschließende Kontur C_1 der Ebene z abgebildet. Das Außengebiet von C_1 ent-

spricht singularitätenfrei eindeutig dem Außengebiet von K_1 . Ist ζ_1 der Mittelpunkt, r_1 der Radius von K_1 , so gibt die Strömungsfunktion

$$W = c_1 \left[\frac{\zeta - \zeta_1}{r_1} + \frac{r_1}{\zeta - \zeta_1} \right] - i \cdot c_2 \left[\frac{\zeta - \zeta_1}{r_1} - \frac{r_1}{\zeta - \zeta_1} \right] + i c \ln(\zeta - \zeta_1)$$

die allgemeinste Zirkulationsströmung um den Kreis K_1 der Ebene ζ und somit (unter Zuziehung von $z = F(\zeta)$) auch die allgemeinste Zirkulationsströmung um die Kontur C_1 in der Ebene z an. Es sind demnach auf Grund der Abbildung $z = F(\zeta)$ nicht nur die Strömung um Kontur C sondern auch die Strömungen um ∞^3 andere Konturen C_1 , welche den ∞^3 Kreisen K_1 entsprechen, bekannt.

Der Kreis K_1 war K einschließend vorausgesetzt. Es genügt aber, daß K_1 alle Singularitäten der Abbildung $z = F(\zeta)$ einschließt und daß die Eindeutigkeit der Abbildung der beiden Außengebiete gewahrt bleibt. Beide Forderungen sind von selbst erfüllt, wenn K_1 K einschließt; aber sie können auch erfüllt sein, wenn K_1 K schneidet eventuell K_1 von K umschlossen wird, was dann auch für C_1 und C zutrifft.

Nun sind freilich die Konturen C_1 nicht von vornherein bekannt oder vorzuschreiben, wie es die Kontur C ist. Vielmehr ergeben sie sich erst im Laufe der Rechnung, nach der Aufstellung der Abbildungsfunktion $z = F(\zeta)$. Immerhin läßt sich voraussehen, daß Kreise K_1 , die von K wenig abweichen, Konturen C_1 liefern werden, die — von singulären Stellen auf C oder C_1 abgesehen — wenig von der Kontur C abweichen werden; insbesondere wird C_1 C eng umschließen, wenn K_1 K eng umschließt.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die ursprüngliche Kontur C singuläre Punkte, d. h. hier Spitzen oder Ecken, auch sprunghafte Änderung der Krümmung zeigt. Gerade für solche Konturen, etwa aus Geradenstücken oder Kreisbögen zusammengesetzte, ist ja die Abbildung oft wirklich ausführbar. In diesem Falle besitzt die Abbildungsfunktion Verzweigungs-

stellen an diesen Punkten; für eine Spitze in C ist die Abbildung durch die Entwicklung

$$z - z_0 = A (\zeta - \zeta_0)^2 + \dots$$

charakterisiert.

Diese auch für die Abbildung singulären Punkte liegen auf der Peripherie von K . Kreis K_1 kann ebenfalls derartige Punkte statt im Innern auf der Peripherie besitzen, während die Pole und wesentlich singulären Punkte im Innern von K_1 liegen müssen. Jeder Kreis K_1 , der Kreis K in einem solchen Verzweigungspunkte einschließend berührt, ergibt demnach eine Kontur C_1 , welche dieselbe entsprechende Zuspitzung wie Kontur C besitzt, im übrigen aber die Kontur C umgibt und keine weitere Zuspitzung oder dgl. aufweist. Man kann also von einer mehrfach zugespitzten Kontur als C ausgehend unter Beibehaltung einer Spitze zu einer einfach zugespitzten, sonst C umschließenden Kontur C_1 gelangen, für die die allgemeine Strömung bekannt ist.

Jedoch ist es nicht nötig, daß K_1 K im Verzweigungspunkte berührt. Vielmehr genügt es, daß auch K_1 durch diesen Punkt hindurchgeht und die Forderungen der Singularitätenfreien und eindeutigen Abbildung der Außengebiete erfüllt.

Die Wahl der Zirkulationskonstanten c erlaubt, an einer Spitze oder Ecke der Kontur C endliche Geschwindigkeiten herzustellen, indem man diesen Punkt zu einem Spaltungspunkt macht. Ist C mit mehreren Zuspitzungen gegeben, so kann im allgemeinen nur einer dieser Punkte als Spaltungspunkt vorgeschrieben werden, so daß an den anderen Umströmung mit unendlich großer Geschwindigkeit erfolgt. Ich habe daraus die Notwendigkeit einer Abrundung der Vorderkante bei den Tragflächen eines Aeroplans zu begründen und die erforderliche Größe einer solchen Abrundung abzuschätzen versucht. Herr Sonnefeld¹⁾ hat daraufhin Konturen behandelt, welche durch Ansetzen eines Kreises an die vordere Spitze eines Kreis-

¹⁾ Dissertation. Über Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen. Jena 1910.

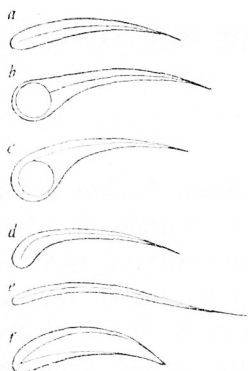


Fig. 1.

bogens entstehen (innere Kontur Fig. 1b und 1c). Herr Jonkowsky¹⁾ hat einfach zugespitzte Formen für gewölbte und flache Tragflächenform (Fig. 1a) angegeben und berechnet, durch die ich auf die vorigen Überlegungen geführt worden bin, die wohl auch seinen Aufstellungen zu Grunde liegen. Natürlich lassen sich in dieser Art weitere einfach zugespitzte Formen aus jeder mehrfach zugespitzten Kontur, für welche die Abbildung gelungen ist, sofort angeben und berechnen, also Formen, wie sie in Fig. 1b bis 1f als äußere Konturen skizziert sind.

Solche einfach zugespitzte oder eckige Konturen bieten eben darum ein besonderes Interesse, weil sich für sie die Zirkulation aus der Bedingung des Abströmens mit endlicher Geschwindigkeit an der Zuspitzung eindeutig bestimmen läßt.

2.

Die bisherigen Betrachtungen lassen eine etwas andere Formulierung zu, wenn man statt von einer vorgeschriebenen Urkontur C von einer beliebig gewählten Abbildungsfunktion $z = F(\zeta)$ ausgeht und dann die Bilder C_1 der Kreise K_1 der Ebene ζ aufsucht. Das hat freilich den Nachteil, daß man von vornherein in Bezug auf die Form der Konturen nur allgemeine Kriterien aufstellen kann, während vorher der Anschluß der benachbarten Konturen C_1 an die Urkontur C wenigstens eine gewisse Einsicht in ihre Form gab. Außerdem muß die Prüfung der Eindeutigkeit der Abbildung der Außengebiete erfolgen, die früher nach gelungener Abbildung von C in K sich wenigstens für die umschließenden Konturen C_1 von selbst verstand. Dagegen ist es von Vorteil, daß nun

¹⁾ Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1. Jahrg., 1910, S. 281.

$F(\zeta)$ beliebig angenommen werden kann und nicht erst das oft schwierige Aufsuchen der Abbildung einer vorgelegten Kontur erfordert.

Da z und ζ sich im Unendlichen als einfache Pole entsprechen sollen, werden wir $F(\zeta) = \zeta + f(\zeta)$ ansetzen und nun fordern, daß $f(\zeta)$ als regulär im Unendlichen und dort verschwindend gewählt wird. Jede beliebige derartige Wahl von $f(\zeta)$ liefert durch die Abbildung

$$z = \zeta + f(\zeta)$$

∞^3 Konturen C_1 mit ihren Strömungen. Wir haben nur alle Singularitäten der Abbildung aufzusuchen und dann Kreise K_1 in ζ anzunehmen, die alle Pole und wesentlich singulären Punkte der Abbildung einschließen, während die Verzweigungspunkte auch auf der Kreisperipherie liegen können. Außerdem sind die Kreise groß genug anzunehmen, um die Eindeutigkeit der Abbildung der Außengebiete zu gewährleisten. Je nachdem ein solcher Kreis K_1 noch mehrere, einen, oder keinen Verzweigungspunkt auf der Peripherie enthält, besitzt die entsprechende Kontur C_1 mehrere, eine oder keine Zuspitzung.

Beiläufig bemerkt ist es augenscheinlich, daß, wenn zwei Abbildungen $\zeta + f(\zeta)$ und $\zeta + g(\zeta)$ bekannt sind, die resultierende Abbildung $\zeta + h(\zeta)$ aus beiden, indem sie die Konturen der ersten Abbildung durch die zweite nochmals abbildet, neue Konturen, nämlich die Bilder der Kreise durch $\zeta + h(\zeta)$ liefert. Anders ausgesprochen: Nachdem wir die Strömung um Konturen C_1 schon kennen, erhalten wir sofort die Strömungen um alle Konturen, die Bilder von C_1 sind, sofern nur die Abbildung die Außengebiete eindeutig singularitätenfrei sich entsprechen läßt. So erlaubt jede beliebige Abbildung mit regulärem Entsprechen des Unendlichen z. B. aus jeder beliebigen einfach zugespitzten Kontur mit bekannter Strömung neue zugespitzte Konturen und deren Umströmung abzuleiten. Man hat dazu nur die erste Kontur in solchem Maßstab und solcher Lage zu zeichnen, daß die Singularitäten der Abbildung in ihr Inneres fallen.

Als ein Beispiel für die vorhergehenden Ansätze diene die einfachste Wahl von $f(\zeta)$, nämlich als $\frac{1}{\zeta}$.

Die Abbildung $z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ besitzt als Pol für z (außer $\zeta = \infty$, wie nötig) nur $\zeta = 0$; als Verzweigungspunkte $\zeta = \pm 1$. Die Kreise durch beide Verzweigungspunkte enthalten, wie gefordert, den Pol im Innern; das Außengebiet eines solchen Kreises bildet sich eindeutig in die gesamte Ebene z ab. Die als Bilder der Kreise erscheinenden Konturen sind deshalb doppelt gezählte Kurvenstücke, mit zwei Zuspitzungen ($\zeta = \pm 1$ entsprechend) als Endpunkten.

Der Kreis um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt liefert das Geradenstück von $z = -2$ bis $z = +2$ doppelt gezählt, d. h. den Fall der ebenen Tragfläche von der Tiefe 4. Ein Kreis durch $\zeta = \pm 1$ mit dem Mittelpunkt $\zeta = i \cdot \operatorname{tg} \alpha$, also dem Radius gleich $\frac{1}{\cos \alpha}$ bildet sich in den doppelt gezählten Kreisbogen mit $z = \pm 2$ als Endpunkten und dem Bogenmaß 4α , mit dem Mittelpunkt $-2i \cotg 2\alpha$ und dem Radius $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ ab. Dies gibt die von mir 1910 behandelten Strömungen.

Diejenigen Kreise der ζ -Ebene, welche nur den einen Verzweigungspunkt auf der Peripherie, den anderen im Innern enthalten, enthalten auch den Pol $\zeta = 0$ im Innern und lassen die Aussengebiete eindeutig entsprechen, wie daraus klar ist, daß zu jedem solchen Kreise ein eingeschlossener Kreis durch beide Verzweigungspunkte mit Berührung in dem einen Verzweigungspunkt gezeichnet werden kann. Die entsprechenden Konturen der ζ -Ebene zeigen nur eine Zuspitzung und umschließen je den Kreisbogen, der als entsprechende Kontur für den eingeschlossenen Kreis durch beide Verzweigungspunkte sich ergab. Ist der betrachtete Kreis von jenem eingeschlossenen nur wenig verschieden, d. h. liegt der zweite, innere Verzweigungspunkt nahe der Peripherie, so umschließt die entsprechende Kontur den Kreisbogen sehr nahe, behält die

eine Zuspitzung des Kreisbogens bei und zeigt eine leichte Abrundung der anderen Zuspitzung (der Vorderkante, Fig. 1a). Von der Größe dieser Abrundung hängt dann die Umströmungsgeschwindigkeit derselben ab; und danach ist es zu beurteilen, ob infolge eines großen Geschwindigkeitsgefälles und daraus folgender Wirkung der inneren Reibung eine Wirbelbildung an dieser Vorderkante zu befürchten ist. Die Zuspitzung an der Hinterkante kann durch Wahl der Zirkulationskonstante zum Spaltungspunkt gemacht und so ein Strömungsbild angegeben werden, das nirgends unendliche Strömungsgeschwindigkeit aufweist.

Die Kreise ζ , die beide Verzweigungspunkte einschließen, geben Konturen ohne Zuspitzung, die nicht ohne weiteres die Bestimmung einer ausgezeichneten Zirkulationsströmung unter den unendlich vielen möglichen gestatten.

Das hier gegebene Beispiel führt auf die beiden von Herrn Jonkowsky angegebenen Flügelformen. (Zitat S. 68.)

3.

Bisher waren nur Zirkulationsströmungen, d. h. Strömungen ohne Wirbel im Endlichen betrachtet worden. Ist aber statt der Zirkulation (dem „Wirbel im unendlich Fernen“) ein Wirbel im Endlichen an der Stelle ζ_0 vorhanden, so bleibt das Frühere im wesentlichen gültig, sofern als Strömungsfunktion angesetzt wird

$$W = c_1 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - i c_2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i \cdot c \ln \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \frac{1}{\zeta_0}} \right).$$

Dabei ist ζ_0 der konjugierte Wert zu ζ_0 ; der Ort z_0 des Wirbels in der eigentlich zu untersuchenden Strömung z liefert ζ_0 als entsprechenden Punkt der Abbildung.

Sind mehrere Wirbel zugleich vorhanden oder zugleich im Endlichen liegende Wirbel und Zirkulation, so addieren sich nur die zugehörigen Terme in der Strömungsfunktion. Einen solchen Fall habe ich schon 1905 untersucht. Natürlich ist für Wirbel im Endlichen dann die Kraft zu rechnen, die den

unendlich dünnen Wirbelfaden abtreibt. Nur wenn diese Kraft Null ist, ist der Zustand in der Tat stationär; andernfalls ist das berechnete Strömungsbild nicht mehr als ein Momentanzustand, der als Anfangszustand einer sich zeitlich ändernden Strömung zu betrachten ist. Es würde nun gelten, sich von der Änderung dieses Zustandes, also dem Abtreiben des Wirbels, und insbesondere den Bedingungen, unter denen ein neuer Wirbel etwa an einer scharfen Kante der Kontur entsteht, unter Hinzunahme von Herrn Prandtls¹⁾ Ansätzen ein Bild zu verschaffen.

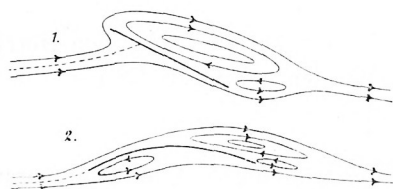


Fig. 2.

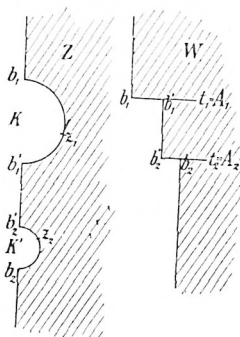


Fig. 3.

Es wird einerseits von Interesse sein, die Möglichkeit des Vorhandenseins stationärer Wirbel bei gewölbten Flächen, nämlich unter der Vorderkante und über der Hinterkante zu untersuchen. Speziell für kleine oder negative Luftstoßwinkel und starke Wölbung würde ein solcher Unterwirbel vorn die Unterschiede in Bezug auf Größe des Auftriebs und Lage des Druckzentrums erklären, welche die Zirkulationstheorie und das Experiment unter solchen Voraussetzungen zeigen. (Fig. 2).

Andrerseits würde durch eine Abschätzung der Bedingungen, unter denen ein verkrüppelter Wirbel an der Hinterkante sich ablöst, gleichzeitig eine Abschätzung des dadurch

¹⁾ Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. des 8. intern. Mathematikerkongresses in Heidelberg, 1904. S. 484.

erzeugten Widerstandes der Fläche gegen die Strömung möglich sein. In der Tat ist ja der Sinn der Zirkulationstheorie vom physikalischen Gesichtspunkte aus der, daß durch Ablösung und Fortführung von Wirbeln in der Fläche um diese selbst ein Kreisen von entsprechender Stärke erzeugt worden ist. Die Zirkulationstheorie nimmt nur als Näherung diese Wirbelerzeugung als abgeschlossen und die fortgetragenen Wirbel im Unendlichen an, während in der Tat bei stationärer Auftriebswirkung der Vorgang so erfolgen dürfte, daß durch Neuablösung von Wirbeln gerade wieder Ersatz des durch die Reibung verloren gehenden Teiles des Kreisens geschaffen wird.

4.

Sind zwei geschlossene, sich nicht überschneidende Konturen C und C' in der Ebene z gegeben, so läßt sich theoretisch die singularitätenfreie, eindeutige Abbildung des übrigen, zweifach zusammenhängenden Gebietes z auf die Ebene ζ mit Ausschluß zweier Kreise immer so vollziehen, daß die unendlich fernen Punkte von z und ζ sich entsprechen. Die allgemeinste Zirkulationsströmung um diese Kreise K und K' enthält zwei Perioden, die des Kreisens um beide Kreise, die zusammen die Periode des logarithmischen Punktes im Unendlichen geben. (Fig. 3).

Die von der Zentrale KK' und den beiden Halbkreisen begrenzte Halbebene ζ sei auf die einfachste Halbebene t abgebildet; den rechtwinkligen Ecken in ζ mögen die Werte $t = b_1, b_1', b_2, b_2'$ entsprechen; ebenso sollen sich die unendlich fernen Punkte von ζ und t entsprechen. Dann ist die Strömungsfunktion für eine in Richtung der Zentralen im Unendlichen verlaufende Strömung $W = Mt$, wo M eine reelle Konstante ist. Eine senkrecht zur Zentrale im Unendlichen verlaufende und außerdem mit einem Kreisen je um die beiden Kreise verbundene Strömung besitzt die Halbkreise zu Strömungslinien, die drei Stücke der Zentrale zu Äquipotentiallinien. Sind dabei z_1 und z_2 die Spaltungspunkte dieser Strömung, gelegen auf den beiden Halbkreisen, und entsprechen

diesen Punkten in der Abbildung t_1 und t_2 , so ist die Strömungsfunktion

$$W = iN \int \frac{(t - t_1)(t - t_2) dt}{V(t - b_1)(t - b_1')(t - b_2)(t - b_2')},$$

mit N als reeller Konstante. Die allgemeinste Zirkulationsströmung um die beiden Kreise ohne Wirbel im Endlichen wird als Summe beider Ansätze für W gefunden; M und N bestimmen die Geschwindigkeitskomponenten im Unendlichen, in Richtung der Zentrale und senkrecht dazu. Die willkürlichen Werte t_1 und t_2 bestimmen zusammen die Stärke des Kreises je um die beiden Kreise K und K' und damit auch die Stärke der Zirkulation um das gesamte System und endlich den Auftrieb des Systems.

Ist nun die Abbildung des Paares von Konturen C und C' auf beliebige Kreise K und K' als $z = F(\zeta)$ geleistet, so ist auch die allgemeinste Zirkulationsströmung um C und C' gefunden. Aber auch jedes beliebige Paar von Kreisen K_1 und K_1' , welche K und K' umschließen — oder doch die Singularitäten der Abbildung umschließen und die Eindeutigkeit im Außengebiet gewährleisten —, liefert ein Paar von Konturen C_1 und C_1' , deren allgemeinste Umströmung mit Zirkulation bekannt ist. Enthalten C und C' Spitzen oder Ecken, so zeigt die Abbildungsfunktion $F(\zeta)$ dort Verzweigungspunkte, die auf K und K' liegen. Legt man dann K_1 und K_1' so, daß ihre Peripherie je nur einen Verzweigungspunkt enthält, so enthalten C_1 und C_1' je nur eine Spitze. Wählt man endlich $t_1 = a_1$ und $t_2 = a_2$ so, daß diese Spitzen Spaltungspunkte werden, so ist dadurch eine eindeutige Zirkulationsströmung um die je einseitig zugespitzten Konturen C_1 und C_1' mit überall endlicher Geschwindigkeit gefunden.

Übrigens könnte man theoretisch auch für eine zweifach zugespitzte Kontur C_1 und eine spitzenlose C_1' eine Strömung mit überall endlicher Geschwindigkeit aufstellen, indem man t_1 und t_2 so wählt, daß beide Spitzen Spaltungspunkte werden.

Im ganzen liefert die Abbildung ∞^6 Konturenpaare, von denen ∞^4 je einfach zugespitzte Konturen zeigen.

Wieder kann man statt von einem vorgegebenen Konturenpaare C und C' und dem schwierigen Aufsuchen der Abbildung desselben, von einer beliebigen angenommen Abbildungsfunktion $z = F(\zeta) = \zeta + f(\zeta)$ ausgehen, und dann zwei beliebige Kreise K_1 und K'_1 in Konturen C_1 und C'_1 abbilden, für die dann die allgemeinste Zirkulation bekannt ist. Leicht gewinnt man dabei in der bekannten Art auch Konturenpaare mit einfacher oder mehrfacher Zuspitzung. Doch ist zu beachten daß die Kreise K_1 und K'_1 nicht nur alle Singularitäten der Abbildung einschließen, sondern auch die Eindeutigkeit der Abbildung des Gebietes außerhalb erreichen lassen müssen. Sonst könnten die Konturen C_1 und C'_1 sich entweder überschneiden, oder sie liegen ineinander und in beiden der unendlich ferne Punkt eines anderen Blattes ζ über z . Es müssen also die Verzweigungspunkte der Abbildung in entsprechender Weise auf das Innere von K_1 und K'_1 verteilt erscheinen.

So z. B. ist es nicht erlaubt, bei der einfachsten Annahme

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$

den Kreis K_1 durch den Verzweigungspunkt $\zeta = 1$, den Pol $\zeta = 0$ im Innern enthaltend, und den Kreis K'_1 durch den Verzweigungspunkt $\zeta = -1$ zu legen, um zwei einfach zugespitzte Konturen C_1 und C'_1 zu erhalten. Denn dann würden diese Konturen, zu verschiedenen Blättern von ζ gehörig, sich überschneiden. Dagegen könnte K_1 durch beide Verzweigungspunkte, K'_1 beliebig außerhalb K_1 gelegt werden und eine eindeutige Zirkulationsströmung um die zweifache zugespitzte Kontur C_1 (einen Kreisbogen) und singularitätenlose Kontur C'_1 mit überall endlicher Geschwindigkeit aufgesucht werden.

Wählt man z. B. $f(\zeta) = \frac{A\zeta + B}{\zeta^2 - 1}$, so kann man die beiden auftretenden Pole und die vier auftretenden Verzweigungspunkte (diese zu je zwei) so auf Kreise K_1 und K'_1 verteilen,

daß Eindeutigkeit in der Abbildung des Außengebietes gewahrt bleibt. Dann erhält man in bekannter Weise sowohl doppelt zugespitzte wie auch einfach zugespitzte Konturenpaare mit bekannter Strömung, die bei je einfacher Zuspitzung eindeutig mit endlicher Geschwindigkeit überall bestimmbar ist.

Auch aus den im speziellen Teile behandelten Fällen von Konturen mit zwei Zuspitzungen kann man nach dem vorigen den Übergang zu einfach zugespitzten Konturen vornehmen.

Endlich sei bemerkt, daß auch hier an Stelle einer Zirkulation das Vorhandensein eines Wirbels im Endlichen (oder mehrerer) zu Grunde gelegt werden kann. Dann ist nur die Strömungsfunktion für die beiden Kreise eine andere, und zwar kann sie natürlich (wie auch im Falle der Zirkulation) durch die Kelvinsche¹⁾ Methode der sukzessiven elektrischen Bilder erhalten werden.

Spezielle Einzelfälle.

1. Strömung um eine Sichel.

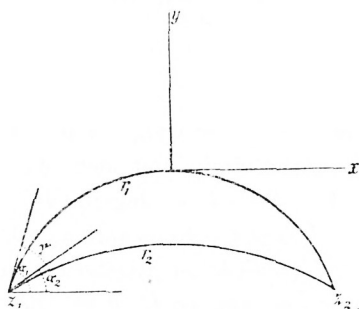


Fig. 4.

Die Kontur bestehe aus zwei Kreisbögen vom Radius r_1 und r_2 und dem Bogenmaß $2a_1$ und $2a_2$, die sich unter dem Winkel $a_2 - a_1 = \gamma$ schneiden (resp. so zusammentreffen) (Fig. 4). Die Länge der gemeinsamen Sehne ist:

$$2r_1 \sin a_1 = 2r_2 \sin a_2 = z_2 - z_1.$$

¹⁾ W. Thomson, Gesammelte Abhandlungen.

Die Abbildung des Außenbereichs der Sichel auf die Halbebene t erfolgt durch

$$z' = e^{i(\pi - \alpha_1)} \left[1 - \frac{z_1 - z_2}{z - z_2} \right]$$

$$z'^{\frac{\pi}{2\pi - \gamma}} = t \cdot \sin \delta + \cos \delta.$$

Dabei ist die Konstante $\delta = \frac{\pi(\pi - \alpha_1)}{2\pi - \gamma}$.

Die Strömungsfunktion ist, ausgedrückt in t :

$$W = 2c_1 \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + 4c_2 \frac{t}{t^2 + 1} + 2c \operatorname{arc} \operatorname{tg} t.$$

Soll noch das Außengebiet der Sichel auf das Außengebiet eines Kreises abgebildet werden, so ist $t = i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$ anzuführen und

$$W = c_1 \left[\zeta + \frac{1}{\zeta} \right] - ic_2 \left[\zeta - \frac{1}{\zeta} \right] + ic \ln \zeta$$

zu setzen.

Da

$$\frac{dz'}{dz} = -e^{i(\pi - \alpha_1)} \frac{2r_1 \sin \alpha_1}{(z - z_2)^2}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{2\pi - \gamma}{\pi} \sin \delta \cdot [z']^{\frac{\pi - \gamma}{2\pi - \gamma}}$$

$$\frac{dW}{dt} = 8c_1 \frac{t}{(1 + t^2)^2} + 4c_2 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{2c}{1 + t^2}$$

ist, ergibt die Entwicklung an der Stelle $z = \infty$, $w = \infty$, $t = i$ für $t = i + \varepsilon$

$$\frac{dW}{dz} = (ic_1 + c_2) \frac{2\pi - \gamma}{\pi} \frac{\sin \delta}{r_1 \sin \alpha_1} \cdot e^{i\delta} + \text{Glieder in } \varepsilon.$$

Dies gleich $V(\cos \beta - i \sin \beta)$ setzend, erhalten wir c_1 und c_2 durch

$$ic_1 + c_2 = \frac{\pi}{2\pi - \gamma} V \cdot \frac{r_1 \sin \alpha_1}{\sin \delta} e^{i(\beta - \delta)}.$$

Weiter ist in die Entwicklung von $\frac{dW}{dz}$ an der Hinterkante z_2 die Bedingung einzuführen, daß dort der unendlich große Term in der Geschwindigkeit verschwinden soll. Das glatte Abströmen geschieht dann dort in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels der beiden die Sichel bildenden Bögen.

Die Bedingung liefert die Gleichung

$$c = 2 (c_1 \sin 2\delta + c_2 \cos 2\delta),$$

woraus

$$c = \frac{2\pi}{2\pi - \gamma} \cdot V \frac{r_1 \sin \alpha_1}{\sin \delta} \cos(\delta + \beta)$$

folgt.

Der Auftrieb auf die Einheit der Sehne und Einheitsbreite der Fläche (senkrecht zur Ebene z), also auf die Flächeneinheit der Sehnenfläche des Zylinders vom Sichelquerschnitt bezogen, ist demnach

$$\begin{aligned} & \pi Q V^2 \cdot \frac{2\pi}{2\pi - \gamma} \cdot \frac{\cos(\delta + \beta)}{\sin \delta} \\ &= \pi Q V^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{2\pi}} \cdot \left[\sin \beta + \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{a_1 + a_2}{4 \left(1 - \frac{\gamma}{2\pi} \right)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Zum Vergleich setzen wir die Formel für den Auftrieb eines reinen Kreisbogens mit derselben Sehne, aber dem Bogenmaß $\alpha_1 + \alpha_2$ hinzu. Dies ist ein Bogen, der die Sichelwinkel gerade halbiert. Der Auftrieb ist für ihn

$$= \pi Q V^2 \left[\sin \beta + \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{a_1 + a_2}{4} \right) \right],$$

wie man sieht, kleiner als der oben berechnete.

Für kleine Winkel α_1 und α_2 und insbesondere für kleine Sichelwinkel $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ ist der Unterschied zwischen beiden Werten relativ nicht bedeutend. Für das Zahlenbeispiel $\alpha_1 = 15^\circ$ einer Wölbung von $\frac{1}{15,2}$ als $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}$ entsprechend, und $\alpha_2 = 7\frac{1}{2}^\circ$,

einer Wölbung $\frac{1}{30,5}$ entsprechend, gibt die genaue Formel für die Sichel

$$\pi \varrho V^2 [1,0213 \cdot \sin \beta + 0,10274 \cdot \cos \beta];$$

die Näherungsformel für das arithmetische Mittel der Bögen oder was bei so kleinem Winkel im wesentlichen dasselbe ist, für das arithmetische Mittel der Pfeile gibt

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,09849 \cdot \cos \beta],$$

um etwa 2 bis 4 Prozent weniger. Mit dieser Ungenauigkeit kann also bei so kleinen $\gamma = a_1 - a_2$ der Auftrieb der Sichel durch den Auftrieb eines unendlich dünnen Kreisbogens von gleicher Sehne und arithmetischem Mittel der Wölbungen oder Pfeile, also der Wölbung $\left(\text{oder } \frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}\right)$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{15,2} + \frac{1}{30,5} \right] = \frac{1}{20,3}$$

ersetzt werden.

Die Auftriebe der beiden Kreisbögen, welche die Sichel bilden, einzeln aufgestellt — also der Kreisbögen von derselben Sehne und je dem Bogenmaß $2a_1$ resp. $2a_2$ einzeln —, wären

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,13163 \cdot \cos \beta]$$

und

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,06335 \cos \beta].$$

Wollte man den Mittelwert aus diesen Auftriebswerten der beiden Sichelbögen als Auftriebswert der Sichel nehmen, so erhielte man

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,09749 \cos \beta],$$

noch etwas schlechter mit dem genauen Werte für die Sichel übereinstimmend als der erste Mittelwert.

Wollte man den Auftrieb eines Bogens mit dem Mittelwerte der Wölbungszahlen 15,2 und 30,5, also der reziproken

Wölbungen, d. h. mit Wölbungszahl 22,8 und Wölbung $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}$
 $= \frac{1}{22,8}$ benützen, so ergäbe sich dafür

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,08554 \cos \beta];$$

ein in durchaus unzulässiger Weise zu kleiner Wert.

Das Gesamtergebnis zeigt, daß bei so kleinen Winkeln α_1, α_2 und insbesondere kleinem $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ es im ganzen wohl zulässig ist, in Bezug auf ihre Auftriebswirkung die Sichel durch einen Mittelbogen von mittlerer Wölbung, etwa den Halbierungsbogen der Sichelwinkel zu ersetzen; freilich ist der erhaltene Wert etwas zu klein. Da in Bezug auf den Auftrieb eines Bogens bei flachen Strömungswinkeln der Unterdruck auf seiner konvexen Seite theoretisch wie experimentell sich wichtiger erweist als der Überdruck auf der konkaven Seite, hätte man vielleicht erwarten können, daß die Wirkung der Sichel mehr von ihrem oberen Grenzbogen als von dem unteren abhängen würde. In der Tat gibt ja auch der Mittelbogen einen etwas zu kleinen Auftriebswert; daß dieser Unterschied nicht größer ist, d. h. daß die Sichel nicht dem Auftrieb nach fast ebensoviel leistet wie ihr oberer Grenzbogen es tun würde, erklärt sich daraus, daß die Strömungen unter und über der Sichel sich gegenseitig beeinflussen. Es wird, und zwar insbesondere deswegen, weil die Abströmung in Richtung der Winkelhalbierenden der Sichelbögen erfolgt, ein geringeres Heraufziehen der strömenden Flüssigkeit, und infolge dessen geringere Zirkulation eintreten. Ein scharfe Zuspitzung der Hinterkante, so daß dort die Kontur statt unter einem Winkel γ , mit einer wirklichen Spitze in Richtung des oberen Bogens verlief, könnte vielleicht die Auftriebswirkung etwas erhöhen.

Für größere Werte von γ ist in der Tat die obere Wölbung der Sichel von weit größerer Bedeutung für den Auftrieb als die untere. Rechnen wir des Beispiels wegen mit einem extremen Fall, nämlich dem Halbkreis mit Durchmesser als Sichel, so wäre $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = 0$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Somit der Auftrieb nach der genauen Formel:

$$\pi \rho V^2 \left[\frac{4}{3} \sin \beta + \frac{4}{3\sqrt{3}} \cos \beta \right],$$

nach der Näherung des Mittelpfeils:

$$\pi \rho V^2 [1 \cdot \sin \beta + (\sqrt{2} - 1) \cos \beta].$$

Die Koeffizienten $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ und $(\sqrt{2} - 1)$ sind 0,770 und 0,414!

Die Näherung ist also hier ganz unzulässig; die obere Wölbung überwiegt der Bedeutung für den Auftrieb nach bei weitem. Der reine, unendlich dünne Halbkreisbogen gäbe als Auftrieb:

$$\pi \rho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 1 \cdot \cos \beta].$$

Anzumerken ist schließlich, daß der Auftrieb der Sichel genauer durch den eines Kreisbogens dargestellt werden könnte,

der eine im Verhältnis $\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{2\pi}}$ größere Sehne und ein Bogen-

maß $\frac{a_1 + a_2}{\left(1 - \frac{\gamma}{2\pi}\right)}$ besitzt.

2. Zwei parallele Platten untereinander.

Zwei Geradenstücke von gleicher Länge L seien so untereinander parallel angeordnet, daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht zu ihnen steht und die Länge h hat. Der Koordinatenursprung z liege in der Mitte dieses Abstandes h , die reelle x -Achse parallel den Geraden (Fig. 5).

Um die Strömungsfunktion zu finden, sei die rechte Halbebene z

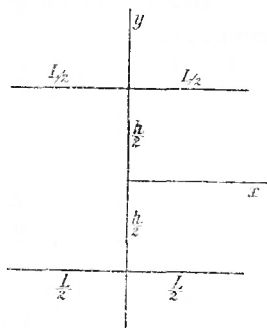


Fig. 5.

(mit zwei Einschnitten) auf die Halbebene t abgebildet. Den Punkten

$$z = i \frac{h}{2}; i \frac{h}{2} + \frac{L}{2}; i \frac{h}{2}; 0, -i \frac{h}{2}; -i \frac{h}{2} + \frac{L}{2}; -i \frac{h}{2}; \infty$$

sollen die Punkte

$$t = -a; -b; -c; 0; +c; +b; +a; \infty$$

entsprechen. Dabei sei $a = \frac{L}{2}$ gewählt, c mit $k' \cdot \frac{L}{2}$; b mit $\lambda \cdot \frac{L}{2}$ bezeichnet.

Die Abbildung erfolgt dann durch

$$z = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} \int_0^t \frac{t^2 - \lambda^2}{V(1-t^2)(k'^2-t^2)} \cdot dt;$$

die Wurzel ist positiv für kleine reelle t zu nehmen.

Da die Druckberechnung für die Platten zwischen $t = k'$ und $t = 1$ (resp. $t = -k'$ und $t = -1$) erfolgen wird, schreiben wir

$$z = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} \int_0^{k'} \frac{t^2 - \lambda^2}{V(1-t^2)(k'^2-t^2)} \cdot dt + C \cdot \frac{L}{2} \int_{k'}^t \frac{\lambda^2 - t^2}{V(1-t^2)(t^2-k'^2)} \cdot dt.$$

Zur Bestimmung von k' , λ und C dienen die drei Gleichungen:

$$\frac{h}{2} = C \cdot \frac{L}{2} \int_0^{k'} \frac{\lambda^2 - t^2}{V(1-t^2)(k'^2-t^2)} dt;$$

$$\frac{L}{2} = C \cdot \frac{L}{2} \int_{k'}^{\lambda} \frac{\lambda^2 - t^2}{V(1-t^2)(t^2-k'^2)} dt;$$

$$\frac{L}{2} = -C \cdot \frac{L}{2} \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda^2 - t^2}{V(1-t^2)(t^2-k'^2)} \cdot dt.$$

Statt der vorletzten dieser Gleichungen schreiben wir besser die Gleichung an:

$$0 = \int_{k'}^1 \frac{\lambda^2 - t^2}{V(1-t^2)(t^2-k'^2)} dt.$$

Die Berechnung der drei Konstanten aus diesen Gleichungen ist schwierig; wir umgehen die Schwierigkeit, indem wir zunächst für k' irgend einen Wert annehmen, also $k' = \cos \vartheta$ mit beliebig gewählten ϑ setzen. Ist dann $k = V1 - k'^2 = \sin \vartheta$, und wird statt t φ mittelst $\sin^2 \varphi = \frac{1-t^2}{1-k'^2}$ eingeführt, so ergibt sich

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} V1 - k^2 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{V1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{E_1}{F_1}$$

durch die Legendreschen vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $k = \sin \vartheta$ ausgedrückt.

Weiter berechnet sich nun C aus

$$\frac{1}{C} = \int_0^{\varphi_0} \frac{(1 - \lambda^2) - k^2 \sin^2 \varphi}{V1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(\varphi_0) - \lambda^2 F(\varphi_0),$$

wo die elliptischen Integrale für den Modul k und das Argument φ_0 , aus $\sin \varphi_0 = +\frac{1}{k} V1 - \lambda^2$, zu berechnen sind.

Endlich findet man

$$\frac{h}{L} = C[E_1 - (1 - \lambda^2) F_1];$$

E_1 und F_1 sind dabei die vollständigen elliptischen Integrale für den komplementären Modul $k' = V1 - k^2 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right)$.

Und es wird:

$$\begin{aligned} z &= -i \frac{h}{2} + C \cdot \frac{L}{2} \int_0^q \frac{(1 - \lambda^2) - k^2 \sin^2 \varphi}{V 1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= -i \frac{h}{2} + C \cdot \frac{L}{2} [E(\varphi) - \lambda^2 \cdot F(\varphi)]. \end{aligned}$$

Der Nachteil, daß statt vom gegebenen $\frac{h}{L}$ vom angenommenen h' ausgegangen wird, ist nicht von Bedeutung. Denn durch wenige Annahmen von h' kann der Zusammenhang zwischen h' und $\frac{h}{L}$ so übersichtlich gewonnen werden, daß die Interpolation für gegebenes $\frac{h}{L}$ das h' sofort sehr genau ergibt. (Man sehe die Tabelle S. 95.)

Die Strömungsfunktion für eine Strömung, die im Unendlichen die Richtung der y -Achse und die Geschwindigkeit $V \sin \beta$ besitzt, ist einfach

$$W = -C \cdot \frac{L}{2} \cdot V \sin \beta \cdot t.$$

Die Strömungsfunktion für die Geschwindigkeit $V \cos \beta$ in der x -Richtung im Unendlichen ist

$$W = V \cos \beta \cdot z.$$

Endlich die Zirkulationsströmung, die ebenso wie die vorige die Geradenstücke zu Stromlinien, die Mittelsenkrechte (y -Achse) zu einer Äquipotentiallinie hat, würde mit Einschluß der vorigen Horizontalströmung durch

$$W = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} V \cos \beta \int \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{V(1 - t^2)(k'^2 - t^2)} dt$$

dargestellt. t_1 und t_2 geben die Spaltungspunkte dieser (von der Vertikalströmung noch absehenden) Strömung.

Trennt man davon die Horizontalströmung $V \cos \beta \cdot z$ ab,

so bleibt für die reine Zirkulationsströmung mit im Unendlichen verschwindender Geschwindigkeit die Strömungsfunktion in der Form übrig:

$$W = i \int \frac{Pt + Q}{V(1 - t^2)(k'^2 - t^2)} dt,$$

mit zwei willkürlichen reellen Konstanten P und Q , die der noch willkürlichen Stärke des Kreisens um die beiden Geradenstücke (Platten) entsprechen.

Als allgemeinste Strömungsfunktion für die rechte Halbebene z erhalten wir also:

$$W = V \cos \beta \cdot z - \frac{L}{2} \cdot C V \sin \beta \cdot t + i \int \frac{Pt + Q}{V(1 - t^2)(k'^2 - t^2)} dt.$$

Die daraus folgende Geschwindigkeit $u - iv$ ist:

$$\frac{dW}{dz} = V \cdot \cos \beta + i \cdot V \sin \beta \frac{V(1 - t^2)(k'^2 - t^2)}{t^2 - \lambda^2} + \frac{Pt + Q}{(t^2 - \lambda^2) \frac{L}{2} \cdot C}.$$

In der linken Halbebene von z findet sich für den entsprechenden (an der y -Achse gespiegelten) Punkt die Geschwindigkeit aus denselben drei Termen zusammengesetzt, doch so, daß die Horizontalkomponente des zweiten Termes (für die Vertikalströmung) und die Vertikalkomponente des dritten Termes (für die reine Zirkulation) die Zeichen wechseln. Dies hat bei der Zusammenfügung der beiden Halbebenen z keinen störenden Einfluß.

Zur Bestimmung der Stärke des Kreisens um die Platten führen wir nun wieder die Annahme ein, daß an den rechten Endpunkten der Geradenstücke $z = \pm i \frac{h}{2} + \frac{L}{2}$ Spaltungspunkte der Gesamtströmung liegen, also an den beiden „Hinterkanten“ glattes Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Es soll also für $t = \mp \lambda + \varepsilon$ in $\frac{dW}{dz}$ das Glied mit dem Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$

verschwinden. Da dort die Wurzel als $\pm i \cdot \sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}$ genommen werden muß, ergibt sich aus beiden Bedingungen:

$$Q = 0 \text{ (auch schon aus Symmetriegründen)}$$

$$P = -\frac{L}{2} \cdot C \cdot V \sin \beta \cdot \frac{\sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}}{\lambda}.$$

Wir schreiben abkürzend

$$\frac{C \cdot \sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}}{\lambda} = A$$

und erhalten als Resultat, indem wir wieder φ einführen:

$$W = V \cdot \cos \beta \cdot z - V \cdot \sin \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot C \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - V \sin \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot \varphi.$$

Und

$$\frac{dW}{dz} = V \cdot \cos \beta \mp V \cdot \sin \beta \cdot \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1-\lambda^2-k^2 \sin^2 \varphi} \mp V \sin \beta \cdot \frac{A \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{C \sqrt{1-\lambda^2-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Für das unendlich Ferne von z ist auch t unendlich, und zwar $z = -i \frac{L}{2} \cdot C t + \dots$

Dabei ist

$$\frac{dW}{dz} = V \cos \beta - i \cdot V \sin \beta + \frac{i \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot V \sin \beta}{z} + \dots$$

Demnach ist nach einem bekannten Satze die Gesamtzirkulation gleich $\frac{L}{2} \cdot A V \sin \beta$, und der Auftrieb des Gesamtsystems des aus beiden unendlich lang gedachten Platten bestehenden Doppeldeckers ist für die Längeneinheit

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cdot L \cdot A.$$

Zum Vergleiche schreiben wir den theoretischen Auftrieb der einzelnen ebenen Fläche von der Tiefe L auf die Längeneinheit hin; er ist

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cdot L.$$

Demnach muß für $\frac{h}{L} = \infty$, d. h. wenn beide Flächen sich nicht mehr stören, $A = 2$ sein; für $\frac{h}{L} = 0$, d. h. wenn beide in eine verschmelzen, $A = 1$.

Um die Vorzeichen zu charakterisieren, welche die drei aus horizontalen, vertikalen und reinen Zirkulationsströmungen herrührenden Geschwindigkeiten an den Platten selbst besitzen, setzen wir die folgenden Skizzen der drei Einzelströmungen bei (Fig. 6).

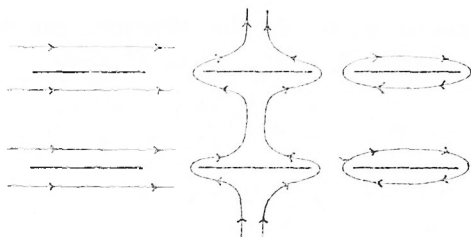


Fig. 6.

Noch sei bemerkt, daß an den Vorderkanten $\pm i \frac{h}{2} - \frac{L}{2}$ sich unendlich große Geschwindigkeit so einstellt, daß für Punkt $z = \pm i \frac{h}{2} - \frac{L}{2} + \delta$ die Entwicklung der Geschwindigkeit mit

$$\frac{i}{V\delta} \cdot V \cdot \sin \beta \sqrt{\frac{L}{2} \cdot A}$$

beginnt.

Wie früher schon gezeigt,¹⁾ folgt daraus an jeder Vorderkante eine Saugkraft in der Plattenrichtung je vom Betrage

$$\pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \frac{A}{2} \quad \text{gegen} \quad \pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cdot L$$

bei der einzelnen Platte.

¹⁾ Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss. 1910, S. 25.

Eleganter wird die Darstellung durch die Einführung von elliptischen resp. Thetafunktionen. Sei die ursprüngliche Variable $t = dn(u)$ mit dem Modul k gesetzt. Dann ergeben sich die früheren Konstanten λ und C aus

$$\lambda^2 = 1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}; \quad C = \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)},$$

wobei noch

$$sn u_0 = \sin \varphi_0 = \frac{1}{k} \sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{k} \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \quad \text{oder} \quad dn u_0 = \lambda$$

ist.

Wir erhalten dann, da die Perioden der eingeführten elliptischen Integrale $K = F_1$, $K' = F_1'$ sind:

$$z = -i \frac{h}{2} + \frac{L}{2} \cdot \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)} \cdot \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{L}{2} \cdot k^2 \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)} \cdot [sn^2 u_0 - sn^2 u],$$

$$W = V \cos \beta \cdot z + V \sin \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{\Theta(u_0)}{\Theta(u_0)} \left[\pm dn u \pm \frac{k^2 sn u_0 cn u_0}{dn u_0} \text{ampl. } u \right],$$

$$\frac{dW}{dz} = V \cos \beta + V \sin \beta \frac{\pm sn u \cdot cn u \cdot dn u_0 \pm sn u_0 \cdot cn u_0 \cdot dn u}{dn u_0 [sn^2 u_0 - sn^2 u]}.$$

Das Rechenschema wäre folgendes. Nach Annahme von k entnimmt man K und K' den Legendreschen Tafeln, rechnet

$\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}}$ und sucht den Wert u_0 für dies als $sn u_0$. Dann ergibt sich das Verhältnis:

$$\frac{h}{L} = \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)} \cdot \frac{\pi}{K}.$$

Da zur Berechnung der Θ die Mitnahme von zwei, höchstens drei Gliedern der trigonometrischen Entwicklung genügt, ist die Zahlenrechnung für jede einzelne Annahme von K verhältnismäßig kurz; übrigens doch wohl die früher gegebene Konstanten- und Auftriebsberechnung noch etwas kürzer.

Als Zirkulation erhalten wir in der neuen Darstellungsform:

$$V \sin \beta \cdot \frac{L}{2} \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)} \frac{k^2 \operatorname{sn} u_0 \operatorname{cn} u_0}{dn u_0} = V \sin \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot k \frac{H(u_0)}{\Theta'(u_0)} \frac{H_1(u_0)}{\Theta_1(u_0)}.$$

Und der Gesamtauftrieb des ganzen Systems wird:

$$\pi_0 V^2 \sin \beta \cdot L \cdot \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)} \frac{k^2 \operatorname{sn} u_0 \operatorname{cn} u_0}{dn u_0} = \pi_0 V^2 \sin \beta \cdot L \cdot k \frac{H(u_0)}{\Theta'(u_0)} \frac{H_1(u_0)}{\Theta_1(u_0)}.$$

Der Gesamtauftrieb des Systems, vom Betrage $\pi_0 V^2 \sin \beta \cdot A$, wirkt in der Richtung senkrecht zur Strömung. Die Komponente davon senkrecht zur Plattenrichtung, vom Betrage $\pi_0 V^2 \sin \beta \cos \beta A$, wird durch Integration über die Platten, d. h. bis in beliebige Nähe der Vorderkanten, bis $z = \pm i \frac{h}{2} - \frac{L}{2} + \delta$ erhalten werden können. Die andere Komponente, in der Plattenrichtung, vom Betrage $\pi_0 V^2 \sin^2 \beta \cdot A$, ist schon vorher als Saugwirkung der Vorderkanten, und zwar als je zur Hälfte an jeder Vorderkante wirkend erkannt worden. Wir wollen nun durch Ausführung der Integration über die Platten die Verteilung des Auftriebes über die beiden einzelnen Platten, insbesondere über ihre rechte und linke Seite, also das Integral

$$- \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$$

untersuchen.

Die drei Terme in der Geschwindigkeit $\frac{dW}{dz}$ ergeben im Quadrate vier zu unterscheidende Summanden.

Der erste, entsprechend der Wechselwirkung der horizontalen und der reinen Zirkulationsströmung, liefert im Integrale den Anteil:

$$I = \frac{\rho}{2} V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^{\kappa} \frac{2 \operatorname{sn} u_0 \operatorname{cn} u_0}{dn u_0} dn u \cdot du.$$

Er liefert, da die Geschwindigkeiten beider Strömungen an den Oberseiten der Platten sich addieren, an den Unterseiten sich subtrahieren, überall positiven Auftrieb. Für jede

der vier Plattenhälften ergibt sich daraus zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K$ der Auftrieb I.

Die Wechselwirkung der horizontalen und der vertikalen Strömung liefert für jede Plattenhälfte den Betrag:

$$\text{II} = \frac{\rho}{2} V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^K 2 \sin u \cos u \, du.$$

Aber da sich die Geschwindigkeiten dieser Strömungen für die rechte Hälfte der unteren Platte an der Unterseite addieren, an der Oberseite subtrahieren, ist für diese Plattenhälfte rechts unten der Auftrieb II negativ in Rechnung zu setzen. Entsprechend für die Plattenhälften links unten $+$ II, rechts oben $-$ II, links oben $+$ II.

Drittens folgt aus der Wechselwirkung der vertikalen und der reinen Zirkulationsströmung für jede Plattenhälfte der Betrag:

$$\text{III} = \frac{\rho}{2} V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^K \frac{2 \sin u_0 \cos u_0}{dn u_0} \frac{\sin u \cos u \, du \, u}{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} \, du.$$

An der rechten Hälfte der unteren Platte subtrahieren sich für die Unterseite diese Geschwindigkeiten, wo $u < u_0$ ist. Dieser Beitrag zum Auftrieb ist also positiv zu rechnen. Für die Oberseite subtrahieren sie sich auch, so daß der dort erscheinende Beitrag negativ wird. Da aber dort $u > u_0$, also der Nenner im Integral negativ wird, ist für die Plattenhälfte rechts unten in der Tat $+$ III als dieser Teil des Auftriebs in Rechnung zu setzen. Entsprechend für die Plattenhälften links unten $-$ III, rechts oben $-$ III, links oben $+$ III.

Bisher waren die doppelten Produkte in $\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$ betrachtet worden. Von den drei quadratischen Termen kann der erste, $V^2 \cos^2 \beta$, bei der Auftriebsberechnung fortgelassen werden, da er überall gleiche Drucke zur Folge hat. Es bleibt

$$\text{IV} = \frac{\rho}{2} V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^K \frac{\sin^2 u \cos^2 u \, du \, n^2 u_0 + \sin^2 u_0 \cos^2 u_0 \, du \, n^2 u}{dn^2 u_0 (\sin^2 u_0 - \sin^2 u)} \, du$$

zu untersuchen. Überall sind hier positive Geschwindigkeitsquadrate, also Unterdrucke, in Rechnung zu ziehen. Die Unterseiten liefern negative, die Oberseiten positive Beiträge zum Auftrieb. Da für die inneren Seiten der Betrag von $u > u_0$, für die äußeren $< u_0$ ist, tritt die Zeichenumkehrung im Integral richtig ein. Es ist für die Plattenhälfte rechts unten $-IV$, links unten $-IV$, rechts oben $+IV$, links oben $+IV$ in Rechnung zu setzen.

Die Verteilung der Auftriebskräfte über die vier Plattenhälften ist durch das Schema dargestellt:

links oben	$I + II + III + IV$	rechts oben	$I - II - III + IV$
links unten	$I + II - III - IV$	rechts unten	$I - II + III - IV$

Die obere Platte erfährt im ganzen den Druckauftrieb	$2(I + IV)$
die untere " " " " " "	$2(I - IV)$

Dazu kommt noch für jede die gleiche Vordersaugkraft.

Der gesamte Druckauftrieb des Systemes senkrecht zur Plattenrichtung beträgt $4 \cdot I$, was sich als das oben schon aus der Zirkulation bestimmte $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \cdot A$ erweisen muß. Dazu kommt natürlich die Summe der beiden Saugkräfte der Vorderkanten $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \cdot A$ in der Plattenrichtung.

Wir bemerken, daß wegen der Ungleichheit der Druckauftriebe für die beiden Einzelplatten und der Gleichheit der Saugkräfte vorn nicht nur die Größe sondern auch die Richtung der Gesamtresultierenden für die beiden Platten verschieden sein wird; die Gesamtresultierende der unteren Platte wird etwas mehr nach vorn (links) hin geneigt sein (von der Normalrichtung zur Strömung gerechnet), die obere Platte etwas nach rechts. Erst die Resultierende wieder dieser beiden, der Gesamtauftrieb des ganzen Systems, fällt in die Normale zur Strömungsrichtung. Dabei ist freilich die theoretische Voraussetzung gemacht, daß die Vordersaugkraft in der Tat unverkrüppelt vorhanden bleibt. Wie durch Abrundung der Vorderkante das vielleicht einigermaßen zu erreichen wäre, das ist schon früher besprochen worden.

Für jede der beiden Platten wird die Lage der Resultierenden dadurch bestimmt, daß außer den in die y -Achse zu legenden Kräften $2(I + IV)$ resp. $2(I - IV)$ noch je das Drehmoment der Kräfte $II + III$ resp. $II - III$ vorhanden ist. Für das Gesamtsystem ist das Drehmoment dasjenige der Kräfte II ; es wirkt im Sinne des Uhrzeigers drehend. Das Kräftepaar III dagegen sucht die beiden Platten gegeneinander zu verdrehen.

Das Drehmoment der Kräfte II findet sich als

$$4 \cdot \frac{\sigma}{2} V^2 \sin \beta \cos \beta C \cdot \frac{L}{2} k^2 \int_0^{\kappa} 2 s n u c n u \cdot z \cdot du,$$

was durch partielle Integration leicht zu lösen ist.

Bei Ausführung der Integrationen III und IV ist zu beachten, daß im Innern des Intervalles ein singulärer Punkt vom Typus $\int \frac{du}{u - u_0}$ liegt. Da hier die Integration bis zu einem beliebig nahe an der Kante u_0 liegenden Punkte, und zwar demselben auf Ober- und Unterseite, fortgeführt werden soll, und einem solchen Punkte auf der Ober- resp. Unterseite der Parameter $u_0 + \varepsilon$ resp. $u_0 - \varepsilon$ mit demselben ε zugehört, so bringt die Integration über den Punkt hinweg, d. h. ohne Ausschaltung des Intervalles von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$, nur einen rein imaginären Summanden zum ungeänderten reellen Resultat. Dieser imaginäre Summand stellt durch seinen Koeffizienten von i , wie bei Ersetzung der Stelle u_0 durch einen beliebig kleinen Halbkreis in u , daher Ersetzung der Kante in z durch ein unendlich nahes Stückchen der benachbarten Stromlinie deutlich wird, die Saugkraft der Kante für die betreffende Strömung dar. Wegen umgekehrter Integrationsrichtung ergeben sich dabei verschiedene Vorzeichen für die untere und die obere Platte.

Die Resultate der Integrationen sind, wenn die Schreibweise mit den anfangs eingeführten Konstanten K, K', λ, C, A gewählt wird:

$$I = \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{A}{2}$$

$$II = \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{C(1-k')}{\pi}$$

$$III = \pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \left\{ \frac{A}{2\pi} \ln \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2-k'^2} \right) \pm i \frac{A}{2} \right\}$$

$$IV = \pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \left\{ \frac{K}{2\pi} \left(\frac{C(1-2\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}{\lambda^2} \right. \right. \\ \left. \left. + C(1-\lambda^2) - \frac{2A}{C} \right) \pm i \frac{A}{2} \right\}.$$

An den Hinterkanten heben sich die beiden in III und IV erscheinenden imaginären Terme (Saugkräfte) fort, an den Vorderkanten summieren sie sich zu dem schon aufgestellten Betrage von $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \cdot \frac{A}{2}$ als Saugkraft für je eine Platte.

Die Druckauftriebe für die einzelnen Plattenhälften sind als $I \pm II \pm III \pm IV$ zu bilden. Der Gesamtdruckauftrieb ist, wie vorausgesehen, $4I = \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \cdot A$.

Die Ausführung der Integration für das Drehmoment der Kräfte II ergibt:

$$D = \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L^2 C^2 \cdot \frac{1-\lambda^2-\frac{k^2}{2}}{2}.$$

Die bisher in der y -Achse angreifende Resultierende $4I$ muß man also, um dies Drehmoment hineinzunehmen, um die Strecke

$$\frac{D}{4I} = \frac{L}{4} \cdot \frac{C(2-2\lambda^2-k^2)}{A}$$

nach vorn (links) verschieben.

Im Falle der Einzelplatte, d. h. hier im Falle entweder $\frac{h}{L} = \infty$ oder $\frac{h}{L} = 0$ beträgt diese Verschiebung nach vorn einfach $\frac{L}{4}$.

Das Drehmoment endlich, das beide Platten gegeneinander bzw. die eine gegen die andere festgehaltene zu verdrehen strebt, beträgt:

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L^2 C^2 \frac{k^4}{2\pi} \frac{sn u_0 cn u_0}{dn u_0} \int_0^K (sn^2 u_0 - sn^2 u) \ln(|sn u_0^2 - sn^2 u|) du.$$

Fügt man zu der in der angegebenen Weise verschobenen Resultierenden 4 I des ganzen Systems noch die beiden an den Vorderkanten wirkenden Saugkräfte hinzu, so ergibt sich als Schlußresultat, daß der theoretische Gesamtauftrieb des Systems (Vordersaugkraft eingeschlossen) im Betrage von $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \cdot A$ in Richtung senkrecht zur Strömung so wirkt, daß seine Angriffslinie durch den Punkt geht, der mitten zwischen den Platten um $\frac{L}{4} \cdot \frac{C^2 (2 - 2k^2 - k^3)}{A}$ gegen die Verbindungslinie der Plattenmitten nach vorn (links) verschoben liegt.

Es mögen nun einige Zahlenresultate folgen.

Für große Werte $\frac{h}{L}$, also entfernte Platten, ist k klein und angenähert (freilich nur für sehr kleine k als gute Näherung):

$$\frac{h}{L} = \frac{4}{k^2} - 2 - \frac{11}{32} k^2 \dots; \quad A = 2 \left(1 - \frac{k^4}{64} \dots \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \dots \right)$$

Die Koeffizienten in I, II, III, IV werden angenähert:

$$1 - \frac{k^4}{64}; \quad \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{k^4}{128} \right); \quad \frac{k^2}{4\pi}; \quad \frac{k^2}{8}.$$

Die Verschiebung der Resultierenden beträgt $\frac{L}{4} \left(1 + \frac{k^4}{128} \right)$.

Für kleine Werte $\frac{h}{L}$, also nahe Platten, ist k nahezu 1, k' klein und es wird angenähert (noch bis $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$ einigermaßen genau), wenn noch $\cos \text{hyp} \frac{\sigma}{2} = + \sqrt[2]{\ln \frac{4}{k'}}$ gesetzt wird:

$$\frac{h}{L} = \frac{\pi}{\sin \operatorname{hyp} \sigma - \sigma}; \quad A = 1 + \frac{\sigma}{\sin \operatorname{hyp} \sigma - \sigma} = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{h}{L} \cdot \ln \left(2\pi \cdot \frac{L}{h} \right) + \dots$$

Die Koeffizienten in I, II, III, IV werden angenähert:

$$\frac{1}{2} + \sigma e^{-\sigma}; \quad \frac{1}{\pi} (1 + 2(\sigma + 1)e^{-\sigma}); \quad \frac{1}{2\pi} (\sigma - \ln 4);$$

$$\frac{1}{2\pi} (\sigma - 1 + 2(\sigma^2 - \sigma - 1)e^{-\sigma}).$$

Die Verschiebung der Resultierenden beträgt:

$$\frac{L}{4} (1 + (26 - 4)e^{-\sigma}).$$

Es folgt eine Tabelle der zusammengehörigen Werte von $\frac{h}{L}$ und A für verschiedene Annahmen von $k = \sin \vartheta$. Aus ihr geht die Beziehung zwischen k und $\frac{h}{L}$ deutlich hervor; für gegebenes $\frac{h}{L}$ findet man das zugehörige k durch Interpolation aus dieser Tabelle schon recht genau, jedenfalls viel genauer, als praktische Zwecke es erfordern würden.

$k = \sin \vartheta;$	$\frac{h}{L}$	A
$\vartheta = 0^\circ$	∞	2
15 ⁰	57,7	1,99985
30 ⁰	13,88	1,9949
45 ⁰	5,76	1,985
60 ⁰	2,87	1,945
68 ⁰	2,018	1,896
75 ⁰	1,456	1,825
80 ⁰	1,113	1,745
82 ⁰	0,984	1,703
85 ⁰	0,787	1,623
87 ⁰	0,644	1,550
88 ⁰	0,562	1,503
89 ⁰	0,460	1,435
89 ⁰ 30'	0,388	1,384
89 ⁰ 45'	0,335	1,344
89 ⁰ 55'	0,275	1,297
89 ⁰ 59'	0,217	1,248
89 ⁰ 59' 59''	0,141	1,178
	0,076	1,111
	0,045	1,072
90 ⁰	0	1,000

Weiter sind für $k = \sin 68^\circ, \sin 82^\circ, \sin 85^\circ, \sin 89^\circ$ die Koeffizienten von

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2} \quad \text{resp.} \quad \pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{L}{2}$$

in I, II, III, IV berechnet, nämlich:

$k = \sin 68^\circ$	$\frac{h}{L} = 2,018$	I 0,948	II 0,619	III 0,144	IV 0,171
$\sin 82^\circ$	0,948	0,852	0,580	0,241	0,335
$\sin 85^\circ$	0,787	0,811	0,558	0,272	0,367
$\sin 89^\circ$	0,460	0,717	0,497	0,340	0,428

Die Druckauftriebe der einzelnen Plattenhälften (für die Längeneinheit) ergeben sich also zu $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{L}{2}$ mal den folgenden Koeffizienten:

	links oben	rechts oben
$\frac{h}{L} = \infty$	$1,637 + 0,000 \operatorname{tg} \beta$	$0,363 + 0,000 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 2,018$	$1,567 + 0,315 \operatorname{tg} \beta$	$0,329 + 0,027 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0,984$	$1,432 + 0,576 \operatorname{tg} \beta$	$0,272 + 0,094 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0,787$	$1,370 + 0,639 \operatorname{tg} \beta$	$0,253 + 0,095 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0,460$	$1,214 + 0,768 \operatorname{tg} \beta$	$0,220 + 0,088 \operatorname{tg} \beta$

Die Zahlen für die unteren Plattenhälften sind dieselben, nur sind die Glieder mit $\operatorname{tg} \beta$ negativ zu nehmen.

In den berechneten Druckauftrieben, die für die obere resp. untere Platte die Beträge haben $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L$ mal

$$1 \pm 0 \cdot \operatorname{tg} \beta; \quad 0,948 \pm 0,171 \operatorname{tg} \beta; \quad 0,852 \pm 0,335 \operatorname{tg} \beta; \\ 0,811 \pm 0,367 \operatorname{tg} \beta; \quad 0,717 \pm 0,428 \operatorname{tg} \beta$$

tritt noch für jede Platte je die Vordersaugkraft hinzu vom Betrage $\pi \varrho V^2 \sin^3 \beta \cdot L$ mal

$$1 \quad 0,948 \quad 0,852 \quad 0,811 \quad 0,717$$

Im ganzen erkennen wir, daß die untere Platte einen etwas kleineren Druckauftrieb zum Gesamtauftrieb beisteuert als die obere. Bei kleinen Winkeln β und nicht gar zu kleinem

Verhältnis $\frac{h}{L}$ ist aber dieser Unterschied nicht eben sehr beträchtlich; für $\frac{h}{L} = 0,984$ und $\beta = 10^\circ$ ist der Druckauftrieb der oberen und der unteren Platte beziehungsweise:

$$(0,852 \pm 0,335 \operatorname{tg} 10^\circ) \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L.$$

Der Koeffizient $(0,852 \pm 0,059)$ zeigt, daß in diesem Falle die obere Platte etwa 7% mehr, die untere ebensoviel weniger als die Hälfte des gesamten Druckauftriebs leistet, also die obere etwa $\frac{1}{7}$ mehr als die untere.

Theoretisch gibt es für jedes Distanzverhältnis $\frac{h}{L}$ einen bestimmten Luftstößwinkel β , von dem ab die obere Platte mehr Auftrieb leistet, als wenn sie allein stünde, und einen zweiten Winkel β , von dem ab die untere Platte sogar negativen Auftrieb erfähre, also eine Tendenz der Strömung bestünde, die Platten auseinander zu reißen. Insbesondere bei äußerst kleinem Verhältnis $\frac{h}{L}$ würde dies auch bei kleinen Luftstößwinkeln β fühlbar. In Wirklichkeit werden aber, da die ganze behandelte Strömung ja nur bei kleinen Winkeln β eine Annäherung der tatsächlichen Erscheinung ergeben dürfte, diese Fälle sich praktisch nie bemerkbar machen.

Dagegen zeigen die obigen Zahlen wieder auffällig, wie schon bei der Einzelplatte (oder hier $\frac{h}{L} = \infty$) bekannt, eine sehr starke Mehrwirkung der vorderen Plattenhälften im Verhältnis zu den hinteren; eine Wirkung, die sich ja auch in der Verlegung der Resultierenden nach vorn äußert.

Diese Verschiebung der Resultierenden des Druckauftriebs des ganzen Systems nach vorn (links) beträgt für

$$\frac{h}{L} = \infty \quad 2,018 \quad 0,984 \quad 0,787 \quad 0,460 \quad 0$$

$$\frac{L}{4} \quad \frac{L}{4} \cdot 1,0259 \quad \frac{L}{4} \cdot 1,0715 \quad \frac{L}{4} \cdot 1,0882 \quad \frac{L}{4} \cdot 1,1132 \quad \frac{L}{4}.$$

Es ist also die Verschiebung des Druckmittelpunktes nach vorn um ein geringes größer als bei der Einzelplatte. Die Resultierende geht durch einen Punkt mitten zwischen beiden Platten, der $\left(\text{für } \frac{h}{L} \text{ etwa gleich } 1\right)$ von der Verbindungslinie der Vorderkanten um etwa 23% der Plattenbreite, statt um 25% wie bei der Einzelplatte absteht.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß der Fall zweier Platten von ungleichen Breiten L_1 und L_2 , wenn die Verbindungslinie ihrer Mitten senkrecht auf beiden steht, in derselben Weise, nur mit komplizierterer Zahlenrechnung, erfolgen kann; ebenso bietet der Fall von drei und mehr Flächen prinzipiell nichts Neues.

3. Strömung um zwei gewölbte, untereinander stehende Schalen.

Die Radien seien r_1 und r_2 , die Bogenlängen $r_1 \cdot 2a_1$ und $r_2 \cdot 2a_2$. Die Verbindungslinie der Zentra sei die y -Achse, die beiden Bögen symmetrisch zu dieser gelegen. Um die Abbildung der rechten Halbebene z mit den beiden krummen Einschnitten auf die Halbebene t bequem durchführen zu können, nehmen wir an, daß sich beide Kreise berühren. Der Berührungspunkt sei als Nullpunkt der Ebene z gewählt (Fig. 7).

Die unter 2 behandelte Strömung ist ein Spezialfall der nun betrachteten, für den der Berührungspunkt im Unendlichen liegt.

Die Abbildung $z = \frac{1}{\zeta}$ führt die rechte Halbebene z mit den beiden krummen Einschnitten in die rechte Halbebene ζ mit zwei geraden Einschnitten über (Fig. 7). Es entspricht $z = \infty$ $\zeta = 0$, den Ecken des Gebietes z entsprechen die Ecken

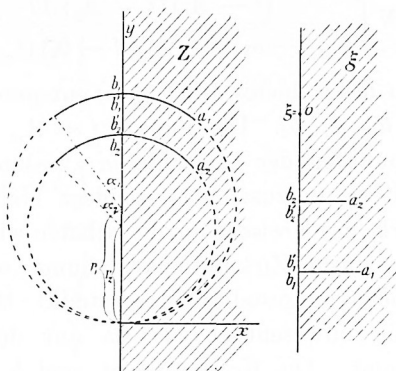


Fig. 7.

$$-\frac{i}{2r_1}; -\frac{i}{2r_1} + \frac{\operatorname{tg} \frac{a_1}{2}}{2r_1}; -\frac{i}{2r_1}; -\frac{i}{2r_2}; -\frac{i}{2r_2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}{2r_2}; -\frac{i}{2r_2}.$$

Die Abbildung des Gebietes ζ auf die Halbebene t erfolgt durch

$$\zeta = -iC \int_0^t \frac{(t-a_1)(t-a_2)dt}{V(t-b_1)(t-b'_1)(t-b'_2)(t-b_2)},$$

wo $t=b_1, a_1, b'_1, b'_2, a_2, b_2$ den Ecken in ζ , und $t=0 \zeta=0$ entspricht.

Die Vertikalströmung, die also im Unendlichen die Richtung der y -Achse und die Geschwindigkeit $V \sin \beta$ besitzt, wird, da $z=\infty$ und $W=\infty$ sich entsprechen sollen, durch $W = \frac{M}{t}$ dargestellt.

Die Horizontalströmung, die im Unendlichen die Richtung der x -Achse und die Geschwindigkeit $V \cos \beta$ besitzt, und ebenso die kreisende Strömung um beide Schalen, besitzt diese Schalen zu Stromlinien, die y -Achse zur Äquipotentiallinie. Unter Berücksichtigung davon, daß wieder $z=\infty$ und $w=\infty$ sich entsprechen sollen, erhält man hier die Strömungsfunktion

$$W = i N \int \frac{(t - A_1)(t - A_2) dt}{V(t - b_1)(t - b'_1)(t - b'_2)(t - b_2)} \cdot \frac{1}{t^2}.$$

Den Ecken des Gebietes W (Fig. 3) entsprechen die Punkte $t = b_1, A_1, b'_1, b'_2, A_2, b_2$. Die Punkte $t = A_1, A_2$ entsprechen den Spaltungspunkten der betrachteten zweiten Strömung, sie fallen nicht mit a_1, a_2 zusammen, sondern bleiben willkürlich, solange die Stärke des Kreisens um die Schalen willkürlich bleibt.

Die allgemeinste Zirkulationsströmung wird durch die Summe der beiden aufgestellten dargestellt. Die Konstante C ist beliebig und unwesentlich, da sie nur den Maßstab der Ebene z bestimmt. Die Konstanten a und b sind durch die Abbildung z auf t bestimmt; M und N durch die Geschwindigkeit und Richtung der Strömung im Unendlichen. Endlich A_1 und A_2 werden wieder durch die Annahme bestimmt, daß für die Gesamtströmung die (rechts liegenden) Hinterkanten der beiden Schalen Spaltungspunkte sein sollen, dort also glattes Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Dann ist die Aufgabe gelöst. Allerdings macht die wirkliche numerische Bestimmung der Konstanten sehr beträchtliche Rechenarbeit, ebenso die Berechnung der Auftriebsverhältnisse im einzelnen, wenn auch die Schwierigkeiten eben nur solche der numerischen Rechnung sind.

Die Berechnung der 6 Konstanten a und b der Abbildung z, ζ, t erfolgt durch Ansetzen der Gleichungen für die Lage der Ecken. Es ist:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2r_1} &= -iC \int_0^{b_1} \frac{(t-a_1)(t-a_2) dt}{V(t-b_1)(t-b'_1)(t-b'_2)(t-b_2)} = -iC \int_{-s}^{d_1} \frac{(\tau^2 - c^2) d\tau}{V(\tau-d_1)(\tau-d'_1)(\tau-d'_2)(\tau-d_2)} \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}{2r_1} &= -iC \int_{b_1}^{a_1} = -iC \int_{d_1}^{-c} \\ 0 &= -iC \int_{b_1}^{b'_1} = -iC \int_{d_1}^{d'_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i \left(\frac{1}{2r_2} - \frac{1}{2r_1} \right) &= -i C \int_{b'_1}^{b'_2} &= -i C \int_{d'_1}^{d'_2} \\
 \frac{\operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}{2r_2} &= -i C \int_{b'_2}^{a_2} &= -i C \int_{d'_2}^{+c} \\
 0 &= -i C \int_{b'_2}^{b_2} &= -i C \int_{d'_2}^{d_2}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde eine Verschiebung der Ebene t durch die Einführung $\tau = t - \frac{1}{4}(b_1 + b'_1 + b'_2 + b_2) = t - s$ vorgenommen. Den Punkten $t = b_1, a_1, b'_1, b'_2, a_2, b_2$ entsprechen dann die Punkte

$$\begin{aligned}
 \tau = d_1 = b_1 - s; \quad c_1 = a_1 - s; \quad d'_1 = b'_1 - s, \quad d'_2 = b'_2 - s; \\
 c_2 = a_2 - s; \quad d_2 = b_2 - s.
 \end{aligned}$$

Es ist dadurch $d_1 + d'_1 + d'_2 + d_2 = 0$ geworden. Da die dritte und die sechste der Bestimmungsgleichungen für die Konstanten zusammen auf die von vornherein klare Forderung, daß für $t = \infty, z = 0$ kein logarithmischer Punkt in der Abbildung z, t erscheinen darf, führt, so ergibt sich sofort die Bedingung $c_1 + c_2 = 0$, und wir setzen $-c_1 = c_2 = c$.

Eine der Konstanten d_1, d'_1, d'_2, d_2 kann beliebig genommen werden, da dies nur den Maßstab in der Ebene τ festlegt; wir wählen etwa $d'_2 = +1$.

Es bleiben demnach, unter Berücksichtigung davon, daß bereits eine Kombination der dritten und sechsten Gleichung verwendet und daher nur eine von diesen mehr verwendbar ist, fünf Gleichungen für C, c und die beiden fehlenden d , endlich s . Dabei wird C durch Quotientenbildung fortgeschafft und dadurch auf den linken Seiten der Gleichungen nur mehr die Form, nicht mehr der Maßstab der Hindernisse (der Schalen) in der Ebene z auftreten. Unmittelbar die nunmehr vier Unbekannten c, d und s aus diesen vier Gleichungen für ge-

gebene Form, d. h. gegebene a_1 , a_2 und $\frac{r_1}{r_2}$ zu berechnen, ist freilich untunlich. Wir schlagen deshalb, wie vorher bei den ebenen Platten, den umgekehrten Weg ein.

Vorher war eine Gestaltskonstante $\frac{h}{L}$ vorhanden. Statt von ihr gingen wir von der Abbildungskonstante k aus und berechneten erst aus deren Annahme das zugehörige $\frac{h}{L}$, d. h. die Gestalt des Hindernisses. Nunmehr haben wir drei Gestaltskonstanten, a_1 , a_2 und $\frac{r_1}{r_2}$. Wir nehmen diesmal zwei Abbildungskonstanten, etwa d_1 und d_1' , beliebig an. Da $d_2' = 1$ war und d_2 aus $d_1 + d_1' + d_2' + d_2 = 0$ sich findet, läßt sich nun aus Gleichung 3 (oder 6) c berechnen. Es ist nämlich

$$\int_{d_1}^{d_1'} \frac{\tau^2 d\tau}{V} - c^2 \int_{d_1}^{d_1'} \frac{d\tau}{V} = 0.$$

Damit sind für die Gestalt die Verhältnisse

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{a_1}{2}}{r_1} : \frac{\operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}{r_2} : \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

bestimmt.

Eine Gestaltskonstante von den drei vorhandenen charakteristischen aber kann man jetzt nach Wahl der zwei Abbildungskonstanten d immer noch beliebig vorschreiben. Es läßt sich z. B. noch fordern, daß die beiden Kreisschalen gleich lange Sehnen haben sollen, also daß

$$2 r_1 \sin a_1 = 2 r_2 \sin a_2$$

sein soll. Das wird dann die Möglichkeit einer Form geben, die, sofern noch durch die günstige Wahl der beiden d flache Schalen, das heißt kleine a_1 und a_2 und etwa Schalenabstand $2(r_1 - r_2)$ annähernd gleich Sehnenlänge gemacht wird, der Form eines Doppeldeckers so nahe kommt, als überhaupt bei

der Annahme berührender Kreise möglich ist. Wie groß zu diesem Zwecke d_1 und d'_1 zu wählen ist, muß durch Versuche und Überschlagsrechnungen festgestellt werden. Es handelt sich ja auch überhaupt nur darum, den theoretischen Typus der untersuchten Strömung klar zu legen, nicht von vornherein gegebene Einzelbeispiele durchzurechnen.

Wir wählen $d_1 = -28$, $d'_1 = -8$. Da $d_2 = +1$, folgt $d_2 = +35$.

Die Ausrechnung der obigen Gleichungen liefert die Verhältnisse:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{a_1}{2}}{r_1} : \frac{\operatorname{tg} \frac{a_2}{2}}{r_2} : \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 11,52 : 17,96 : 29,28.$$

Unter Zufügung der Bedingung gleicher Sehnen erhalten wir die Gestalt durch

$$\frac{r_2}{r_1} = 0,8032; \quad 2a_1 = 22^\circ 2'; \quad 2a_2 = 27^\circ 32'.$$

Die Sehnenlänge ist

$$2r_1 \sin a_1 = 2r_2 \sin a_2 = 0,3822 r_1,$$

die Entfernung der Schalenmitten

$$2(r_1 - r_2) = 0,3936 r_1,$$

also etwa 1,03 mal Sehnenlänge.

Die Konstanten c und s berechnen sich zu $c = 17,53$ und $s = 134,17$.

Unsere Annahme der d und der gleichen Sehnen führt uns also zu zwei Schalen, die ziemlich genau in einem Abstände gleich ihrer gemeinsamen Sehnenlänge untereinander stehen.

Die obere hat das Wölbungsverhältnis $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}} = \frac{1}{20,75}$, die untere $\frac{1}{16,57}$ (Fig. 8). Daß die untere Schale etwas stärker gewölbt ist als die obere, ist bei Annahme gleicher Sehnenlänge nicht zu vermeiden, da die Schalenkreise sich berühren sollen.

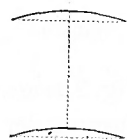


Fig. 8.

Natürlich kann man als die eine bei diesem Rechenschema wählbare Gestaltsbedingung eine andere als die der Sehnen-gleichheit wählen, z. B. die gleicher Wölbung. Rechnerisch verhältnismäßig am einfachsten wird die Durchführung für den Fall, daß man $d'_1 = -d'_2 = -1$ annimmt. Dann wird auch $-d_1 = +d_2$, und setzen wir diese noch willkürliche Größe gleich $\frac{1}{k}$, so nehmen die auftretenden elliptischen Integrale ohne weiteres die Normalform an. Aber aus der Annahme $d'_1 = -d'_2 = -1$ folgt, daß

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{r_2}$$

ist. Geometrisch und für die Gestalt bedeutet das, daß in der Ebene ζ die beiden geraden Einschnitte der Halbebene gleich lang sind (also dort die Form wie im vorigen Paragraphen vorhanden ist), was freilich die Vereinfachung begreiflich macht. Aber in der Ebene z liegen dann die beiden rechten Endpunkte der Schalenbögen (und ebenso natürlich die linken) auf einem Kreise, der die y -Achse im Nullpunkte berührt. Es wird also die Sehne der unteren Schale weit kleiner als die der oberen, was praktischen Formen nicht entspricht. Nur bei äußerst flachen Bögen ist auf diese Weise eine einigermaßen brauchbare Form zu erzielen. Wäre z. B. $\frac{\alpha_1}{2} = 3^\circ$,



Fig. 9.

$r_1 = 1$, also die obere Sehnenlänge 0,209, und $r_2 = 0,9$, also der Abstand der Schalenmitten 0,2, so wäre $\frac{\alpha_2}{2} = 2^\circ 42'$, die untere Sehnenlänge 0,1694. Das Wölbungsverhältnis wäre für die obere Schale $\frac{1}{38,2}$, für die untere $\frac{1}{42,4}$. Die

Fig. 9 zeigt die Verhältnisse. Als Typus, um die Art der Beeinflussung der beiden Schalen und ihrer Strömungen durcheinander einigermaßen erkennen zu lassen, würde die so aufgestellte Form immerhin eine qualitative Vorstellung geben können.

Wenn erst, wie bisher besprochen, die Abbildung der Halbebene z in t geleistet und alle Konstanten bestimmt sind, so bietet die Ermittlung der gesuchten Strömung, d. h. der Konstanten M , N , A_1 und A_2 keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr; ebensowenig die des Auftriebs des ganzen Systems beider Schalen. Nicht so mühelos gestaltet sich die Berechnung der Verteilung dieses Auftriebs im einzelnen über beide Schalen.

Zunächst ist:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\zeta^2}{Ct^2} \cdot \frac{iM\sqrt{(t-b_1)(t-b'_1)(t-b'_2)(t-b_2)} + N(t-A_1)(t-A_2)}{(t-a_1)(t-a_2)}.$$

Wird z unendlich, also $t = \lim \varepsilon = 0$, so wird:

$$\lim \zeta = -iC \frac{a_1 a_2}{V b_1 b'_1 b'_2 b_2} \varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b'_1} + \frac{1}{b'_2} + \frac{1}{b_2} \right) \right) \dots \right].$$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= -C \frac{a_1 a_2}{b_1 b'_1 b'_2 b_2} \left[M \cdot V b_1 b'_1 b'_2 b_2 \cdot i + N \cdot A_1 A_2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon N A_1 A_2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b'_1} + \frac{1}{b'_2} + \frac{1}{b_2} \right) - \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \dots \right] \\ &= -iC M \frac{a_1 a_2}{V b_1 b'_1 b'_2 b_2} - C N \frac{a_1 a_2 A_1 A_2}{b_1 b'_1 b'_2 b_2} \\ &\quad + \frac{i}{z} \cdot \frac{N A_1 A_2}{V b_1 b'_1 b'_2 b_2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b'_1} + \frac{1}{b'_2} + \frac{1}{b_2} \right) \right) \dots \end{aligned}$$

Aus der Geschwindigkeit im Unendlichen bestimmen sich die Konstanten:

$$M = V \sin \beta \frac{V b_1 b'_1 b'_2 b_2}{C a_1 a_2}; \quad N \cdot A_1 A_2 = -V \cos \beta \cdot \frac{b_1 b'_1 b'_2 b_2}{C \cdot a_1 a_2}.$$

Endlich ist die Zirkulationskonstante:

$$\frac{N \cdot A_1 A_2}{V b_1 b'_1 b'_2 b_2} \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b'_1} + \frac{1}{b'_2} + \frac{1}{b_2} \right) \right] = -\frac{V \cos \beta}{C} \frac{V b_1 b'_1 b'_2 b_2}{a_1 a_2} \left[\dots \right].$$

Und der Auftrieb des ganzen Systems beider Schalen ist:

$$- 2 \pi \varrho V^2 \cos \beta \frac{\sqrt{b_1 b'_1 b'_2 b_2}}{C a_1 a_2} \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b'_1} + \frac{1}{b'_2} + \frac{1}{b_2} \right) \right].$$

Zuletzt ist mit Hilfe der Annahme, daß an den Hinterkanten Spaltungspunkte liegen sollen, A_1 und A_2 zu bestimmen. Es soll also für $t = a_1$ und $t = a_2$ $\frac{dW}{dz}$ endlich bleiben.

Oder es soll sein:

$$N A_1 A_2 \left[\frac{a_1^2}{A_1 A_2} - a_1 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + 1 \right] + i M \sqrt{(a_1 - b_1)(a_1 - b'_1)(a_1 - b'_2)(a_1 - b_2)} = 0;$$

d. h.:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1^2}{A_1 A_2} - a_1 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + 1 = \\ & = \operatorname{tg} \beta \sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{a_1}{b'_1} \right) \left(1 - \frac{a_1}{b'_2} \right) \left(1 - \frac{a_1}{b_2} \right)}. \end{aligned}$$

Und analog:

$$\begin{aligned} & \frac{a_2^2}{A_1 A_2} - a_2 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + 1 = \\ & = - \operatorname{tg} \beta \sqrt{\left(\frac{a_2}{b_1} - 1 \right) \left(\frac{a_2}{b'_1} - 1 \right) \left(\frac{a_2}{b'_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{a_2}{b_2} \right)}. \end{aligned}$$

Daraus endlich:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \right) + \\ & + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b'_1} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b'_2} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} \right)} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{b'_1} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{b'_2} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Und der Auftrieb wird für die Längeneinheit des Systems:

$$\begin{aligned}
& - 2 \pi \varrho V^2 \frac{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}}{C \cdot a_1 a_2} \left\{ \cos \beta \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2} \right) \right] \right. \\
& + \sin \beta \cdot \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1'} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2'} \right) \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} \right)} \right]}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}} \\
& \left. + \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{b_1'} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{b_2'} - \frac{1}{a_2} \right) \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{a_2} \right)} \right]}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}} \right\}.
\end{aligned}$$

Nachdem einmal die Abbildungskonstanten c , d , s und C berechnet sind, also $a = c + s$, $b = d + s$ bekannt sind, macht die Auswertung dieser Endformel für den Auftrieb des Systems keine Mühe.

Die Berechnung der Auftriebe der beiden einzelnen Schalen kann, allerdings mühsamer, mit Hilfe der Simpsonschen Regel oder einer ähnlichen Regel erfolgen; dabei wird zugleich die Geschwindigkeit der Strömung an verschiedenen Stellen der Schale berechnet und gibt so eine gewisse Übersicht über den Verlauf der Strömung in der Nähe der Schalen.

Für das in Fig. 8 dargestellte Beispiel der beiden Schalen von gleicher Sehnenlänge gibt die Zahlenrechnung bei horizontaler Strömung ($\beta = 0$) als Gesamtauftrieb $\varrho V^2 \cdot 0,2399$. Davon kommen auf die obere Schale $\varrho V^2 \cdot 0,1145$, auf die untere Schale $\varrho V^2 \cdot 0,1254$. Stünden die Schalen je allein oder in solcher Entfernung voneinander, daß sie gegenseitig keine Störung bewirken, so wäre der Auftrieb der oberen Schale $\varrho V^2 \cdot 0,1158$, der unteren Schale $\varrho V^2 \cdot 0,1450$. Die Summe beider wäre $\varrho V^2 \cdot 0,2608$.

Wir sehen, daß für diesen Fall der Auftrieb infolge der gegenseitigen Störung 0,920 von dem beträgt, was er ungestört als Summe ergeben würde. Immerhin ist der Verlust, ver-

glichen mit dem, welchen das System zweier ebenen Platten für den ähnlichen Fall, daß $\frac{h}{L} = 1,03$ ist, erleidet, kleiner, denn in diesem Fall gab die gestörte Strömung für jeden Winkel β etwa 0,860 des ungestörten Auftriebs.

Auch in Bezug auf die Verteilung des Auftriebsverlustes zeigt der Fall gewölbter Flächen Unterschiede gegenüber dem Falle ebener Flächen. Für diese ist bei kleinen Winkeln β der Verlust der oberen Fläche nicht viel kleiner als der der unteren Fläche. Dagegen zeigt hier die obere gewölbte Fläche fast keinen Auftriebsverlust und fast der ganze Verlust des Systems entfällt auf die untere gewölbte Fläche. Das bezieht sich auf den Winkel $\beta = 0$. Im ganzen kann man sagen, daß bei beliebigem Winkel β derjenige Teil des Auftriebs, der der Wölbung zuzuschreiben ist, also für $\beta = 0$ vorhanden wäre, durch Untereinanderstellen der Schalen weniger Verlust erleidet, als der Teil des Auftriebs, der dem schiefen Anprall der Strömung, also dem Winkel β , zuzuschreiben ist. Insbesondere geht der erstere Verlust so gut wie ganz auf Kosten der unteren Schale, während der zweite sich gleichmäßiger über beide Schalen verteilt.

4. Strömung um die Jalousie.

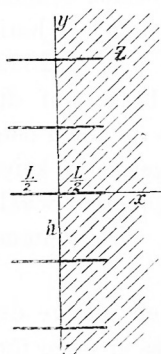


Fig. 10.

Wir nehmen unendlich viele Geradenstücke von der Breite L und dem gegenseitigen Abstände h an, die parallel untereinander gestellt sind, so daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte (die rein imaginäre Achse y) senkrecht zu ihnen ist (Fig. 10). Die x -Achse liege in einem dieser Geradenstücke.

Die Abbildung der rechten Halbebene z (mit den unendlich vielen Einschnitten von der Länge $\frac{L}{2}$) auf die Halbebene t ist durch die Formel gegeben:

$$z = \frac{L}{2} - C \int_0^t \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{\sin(a-t) \sin(a+t)}} \\ = \frac{L}{2} + C \left[\ln \left(\frac{\cos t}{\cos a} + \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\cos a} \right)^2 - 1} \right) \right]_0^t = \frac{L}{2} - iC \left[\arccos \frac{\cos t}{\cos a} \right]_0^t.$$

Man kommt zu dieser Formel aus dem Ansatz für eine endliche Zahl untereinander gestellter Geradenstücke, wenn man sich an die Produktformel für den Sinus erinnert.

Da $t = a$ auf $z = 0$; $t = \pi - a$ auf $z = -ih$ führen soll, sind die Bedingungen für die Konstanten;

$$C \ln \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = \frac{L}{2} \quad \text{und} \quad \pi C = h.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \left(\frac{L}{h} \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{und} \quad \sin a = \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \left(\frac{L}{h} \frac{\pi}{2} \right)$$

und es wird:

$$z = \frac{h}{\pi} \ln \left(\frac{\cos t}{\cos a} + \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\cos a} \right)^2 - 1} \right) = -i \frac{h}{\pi} \arccos \left(\frac{\cos t}{\cos a} \right).$$

Die Strömungsfunktion ist für die Strömung, die im Unendlichen die Richtung der y -Achse besitzt von der Form:

$$W = Mt.$$

Für die Strömung, die im Unendlichen die x -Richtung besitzt und mit einem Kreisen um die Geradenstücke verbunden ist, so daß $t = -\gamma$ ein Spaltungspunkt ist, erhält die Strömungsfunktion die Form:

$$W = N \int \frac{\sin(t + \gamma) \, dt}{\sqrt{\sin(a-t) \sin(a+t)}}.$$

M und N sind dabei reelle Konstanten.

Freilich ist hier, da ja die Jalousie in Richtung y ins Unendliche reicht, $z = \infty$ ein wesentlich singulärer Punkt. Wir

hätten uns auf einen Streifen von $z = +i\frac{h}{2}$ bis $z = -i\frac{h}{2}$ zu beschränken. Dasselbe aber erreichen wir, wenn wir stets nur in der Richtung x ins Unendliche gehen, um die dort vorgeschriebenen Bedingungen zu erfüllen. D. h., wir haben dafür $t = iT$ zu setzen und T reell ins Unendliche gehen zu lassen.

Die gesamte Strömungsfunktion

$$W = Mt + N \int \frac{\sin(t + \gamma) dt}{V \sin(a - t) \sin(a + t)}$$

liefert für die Geschwindigkeit $u - iv$ den Ansatz

$$\frac{dW}{dz} = \frac{MV \sin(a - t) \sin(a + t) + N \sin(t + \gamma)}{-\frac{h}{\pi} \sin t}.$$

Für $t = iT$, $\sin iT = i \sin \text{hyp } T = \frac{i}{2}(e^T - e^{-T})$ wird

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{\pi}{h} \frac{M \sqrt{\frac{i}{2} \left(e^{\frac{a}{i} - T} - e^{-\frac{a}{i} + T} \right) \frac{i}{2} \left(e^{\frac{a}{i} + T} - e^{-\frac{a}{i} - T} \right)} + N \frac{i}{2} \left(e^{\frac{\gamma}{i} + T} - e^{-\frac{\gamma}{i} - T} \right)}{\frac{i}{2} (e^T - e^{-T})}.$$

Demnach:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dW}{dz} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{h} \left(- \frac{Mi e^T + Ne^T (\cos \gamma - i \sin \gamma)}{e^T} \right)$$

oder:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{dW}{dz} \right) = V \cdot \cos \beta - i V \sin \beta = -\frac{\pi}{h} Mi - \frac{\pi}{h} N (\cos \gamma - i \sin \gamma).$$

Daraus folgt:

$$V \cos \beta = -\frac{\pi}{h} N \cos \gamma$$

$$V \sin \beta = \frac{\pi}{h} M - \frac{\pi}{h} N \sin \gamma.$$

Man bemerkt, daß die Zirkulationsströmung hier einen

Beitrag zur Vertikalgeschwindigkeit im Unendlichen liefert. Das ist verständlich, da das Kreisen um jede der Platten von endlichem Betrage ist und, obwohl das einzelne Kreisen nur einen verschwindenden Beitrag zur Geschwindigkeit im Unendlichen liefert, doch die Summation aller dieser Beiträge für die unendlich vielen Platten sehr wohl einen endlichen Beitrag liefern kann. Das läßt sich auch direkt durch Ausführung dieser Summation nachprüfen und verifizieren.

Wir erhalten:

$$N = -\frac{h}{\pi} V \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}; \quad M = \frac{h}{\pi} V \left(\sin \beta - \sin \gamma \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right).$$

Im Vorhergehenden ist die allgemeinste Zirkulationsströmung um die Jalousie aufgestellt, sie enthält in γ noch eine Konstante, die je nach der Stärke des noch unbestimmten Kreisens um jede Platte verschiedenen Wert hat. Wir machen wieder die Annahme, daß die Spaltungspunkte der Gesamtströmung rechts an den „Hinterkanten“ liegen sollen, d. h. daß für $z = \frac{L}{2}$, $t = 0$, $\frac{dW}{dz}$ endlich bleiben soll.

Dafür muß $M \sin \alpha + N \sin \gamma = 0$ sein, d. h.

$$\sin \alpha \left[\sin \beta - \sin \gamma \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] - \sin \gamma \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = 0.$$

Es folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Damit ist die Strömung eindeutig bestimmt.

Zur Berechnung des Auftriebs haben wir die Integration

$$= \frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = + \frac{1}{2} \rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{[M V \sin(a-t) \sin(a+t) + N \sin(t+\gamma)]^2 dt}{\frac{h}{\pi} \sin t V \sin(a-t) \sin(a+t)}$$

auszuführen. Der erste quadratische Term gibt natürlich bei der

Integration als reellen Teil Null. Der Term des doppelten Produktes liefert den Wert:

$$\begin{aligned} & -\varrho V^2 \cos \beta \sin \beta \cdot \frac{h}{\pi} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \right] [2 \operatorname{arc} a + \operatorname{tg} \gamma \cdot \pi i] \\ & = -\varrho V^2 \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \frac{h}{\pi} \frac{2 \operatorname{arc} a + \operatorname{tg} \gamma \cdot \pi i}{1 + \sin a}. \end{aligned}$$

Dieser für eine rechte Plattenhälfte berechnete Wert besitzt dieselbe Größe, aber das umgekehrte Vorzeichen für die linke Plattenhälfte, wo die beiden zusammenwirkenden Geschwindigkeiten, deren Wechselwirkung den Term veranlaßt, sich gerade dort subtrahieren, wo sie sich entsprechend links addieren und umgekehrt.

Der zweite quadratische Term

$$\frac{\varrho}{2} V^2 \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \gamma} \frac{h}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin^2 (t + \gamma) dt}{\sin t \sqrt{\sin (a - t) \sin (a + t)}}$$

gibt unter Einschluß des imaginären Wertes des ersten quadratischen Termes

$$\varrho V^2 h \cos^2 \beta \operatorname{tg} \gamma \left[1 + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin a} i \right] = \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot h \frac{\sin a + \operatorname{tg} \gamma \cdot i}{1 + \sin a}.$$

Dieser Term behält seinen Wert auch dem Vorzeichen nach für die linke Plattenhälfte. Die imaginären Terme stellen mit ihren Koeffizienten wieder die Kantensaugkräfte in der Plattenrichtung dar.

Der Druckauftrieb ist also für die linke bzw. rechte Plattenhälfte

$$\varrho V^2 \sin \cos \beta \cdot \frac{h}{\pi} \frac{\pi \sin a \pm 2 \operatorname{arc} a}{1 + \sin a}.$$

Dazu kommt noch für die linke Plattenhälfte (rechts heben sich entsprechend dem glatten Abströmen die beiden imaginären Terme fort) die Saugkraft der Vorderkante im Betrage:

$$\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot h \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{1 + \sin a} = \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot h \cdot \frac{2 \sin a}{(1 + \sin a)^2}.$$

Für die ganze Platte ist außer dieser Vordersaugkraft (die auch direkt durch die 1910 S. 25 gegebene Formel berechnet werden kann) als Druckauftrieb für die Länge 1 vorhanden:

$$\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot h \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Endlich den Wert von $\sin \alpha$ einsetzend, erhalten wir den Druckauftrieb der Platte als

$$\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot h [1 - e^{-\frac{L}{h}\pi}],$$

die Vordersaugkraft als

$$\varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot h \frac{[1 - e^{-\frac{L}{h}\pi}]}{1 + \operatorname{tg hyp} \left(\frac{L}{h} \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Für $\frac{L}{h}$ beliebig klein, also die Einzelplatte, ergeben sich daraus die bekannten Formeln:

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \quad \text{und} \quad \pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L.$$

Auffällig erscheint, daß die Resultierende nicht senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen steht. Vielmehr bildet sie mit der y -Achse den Winkel δ , für den

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma$$

statt $\operatorname{tg} \beta$ ist.

Begreiflich aber wird das, wenn wir uns erinnern, daß ein Teil der vertikalen Geschwindigkeit im Unendlichen vom Betrage $-\frac{\pi}{h} N \sin \gamma$ von der Zirkulation selbst herrührt. Der

Rest derselben, vom Betrage $\frac{\pi}{h} M$ allein, würde mit der Horizontalgeschwindigkeit $V \cos \beta$ vereinigt, in der Tat eine Strömung im Unendlichen geben, auf der die berechnete Resultierende senkrecht steht. Wir erhalten also:

Die gesamte Auftriebskraft einer Platte steht senkrecht zu derjenigen Strömungsrichtung im Unendlichen, die ohne die Zirkulationswirkung im Unendlichen vorhanden wäre.

Auffallend ist ferner, daß für nahe zusammengrückte Platten, also $\frac{L}{h}$ groß, der Auftrieb für die Einzelplatte gar nicht mehr von der Breite L der Platte abhängt. Der Druckauftrieb wird angenähert für jede Platte $\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta h$; die Vordersaugkraft $\varrho V^2 \sin^2 \beta \frac{h}{2}$.

Für die Tiefeneinheit der Jalousie (in y -Richtung), auf die $\frac{1}{h}$ Platten kommen, ist der Druckauftrieb konstant $\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta$; die Saugkraft $\varrho V^2 \sin \beta \cdot \frac{1}{2}$.

Diese Ergebnisse sind aber auch vom physikalischen Gesichtspunkte aus wohl erklärlich. Bei nahe stehenden und verhältnismäßig langen parallelen Hindernissen ist der wesentliche Punkt, daß die Strömung aus ihrer schiefen Ankunftsrichtung in eine zu den Hindernissen parallele Durchgangsrichtung gezwungen wird. Wie weit dann diese Durchgangsrichtung verfolgt werden muß, d. h. wie groß L ist, sofern es nur groß gegen h ist, kommt nun gar nicht mehr in Betracht und kann den Auftrieb nicht ändern. Auch die Unabhängigkeit des Auftriebs von der Anzahl der (unendlich dünnen) Hindernisse, die auf die Einheit der Jalousietiefe treffen, ist nun begreiflich, da in die einmal erzwungene horizontale Durchgangsströmung noch weitere (unendlich dünne) Hindernisse parallel hineingesteckt werden können. Daß bei gleicher Länge L derselben die Umformung der Strömung vorn (und hinten) aus einer schiefen in eine horizontale doch noch durch Vermehrung der Hinderniszahl ein wenig beeinflusst wird, zeigt sich in der Formel dadurch, daß ja in der Tat die erhaltenen Näherungen nur für $\frac{L}{h} = \infty$ exakt werden.

Aus der letzten Überlegung folgt, daß auch Hindernisse in variablen Abständen h und mit variabler Länge L , sofern

nur L gegen h groß ist, denselben Druckauftrieb $\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta$ für die Tiefeneinheit und Breitereinheit zeigen. Dabei braucht nach der Formel L gar nicht soviel größer zu sein als h ; L etwa 2—3 mal so groß wie h genügt. Es wäre nicht ohne Interesse, die wirbelartigen (obwohl nicht wirklich wirbelnden) Vorgänge an der Vorderkante, wo die schiefe Strömung sich in die horizontale einstellt und wo je ein Spaltungspunkt mit Geschwindigkeit Null und die Kante mit Geschwindigkeit ∞ äußerst nahe beieinander liegen, zeichnerisch genau zu verfolgen. Freilich wäre es noch besser, dabei abgerundete Vorderkanten oder überhaupt Platten von endlicher, wiewohl geringer Dicke, einzuführen, was allerdings rechnerisch Mühe machen würde. Dabei erscheint es mir nicht als ausgeschlossen, daß diese Betrachtungen eine Übertragung auf die Gebiete der Elektrizität und Optik, speziell für die Übergangsschicht zwischen zwei Medien, zulassen könnten.

Um für einige Zahlenwerte Druckauftrieb und Saugkraft mit denjenigen der Einzelplatte, für die sie $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L$ resp. $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L$ betragen, vergleichen zu können, schreiben wir sie in der Form:

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \cdot \frac{h}{L} \frac{1}{\pi} [1 - e^{-\frac{L}{h} \pi}]$$

resp.

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \cdot \frac{h}{L} \frac{1}{2\pi} [1 - e^{-\frac{L}{h} 2\pi}].$$

Es ergeben sich die Koeffizienten für die Verhältnisse:

$\frac{h}{L}$	=	1	2	4	8	16	∞
als		0,317	0,504	0,688	0,827	0,908	1
resp.		0,159	0,317	0,504	0,688	0,827	1

Unterhalb des Wertes $\frac{h}{L} = 1$ hängen die Kräfte praktisch nicht mehr von L , sondern nur noch von h ab, wie vorher besprochen. Es wird dann $\sin \alpha$ annähernd 1, und die Richtung δ des Gesamtauftriebs ist durch $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta$, also bei

flacher Anströmung, β klein, im wesentlichen durch $\delta = \frac{1}{2} \beta$ gegeben.

Übrigens muß noch bemerkt werden, daß der Vergleich mit der Einzelplatte oder mehreren Platten besser so zu ziehen ist, daß man für diese statt der Geschwindigkeit V im Unendlichen, die von der Zirkulationswirkung der unendlich vielen Platten absehende Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ im Unendlichen einführen. $\mathfrak{B}$ hat die Richtung δ , wie früher schon erwähnt; es ist:

$$\mathfrak{B} \cdot \cos \delta = V \cos \beta$$

$$\mathfrak{B} \cdot \sin \delta = V \left(\sin \beta - \cos \beta \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \right).$$

Es folgt:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \beta \frac{(1 + e^{-\frac{L}{h} \pi})}{2}$$

und

$$\mathfrak{B} = V \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2}.$$

Da noch

$$V \cos \beta = \mathfrak{B} \cos \delta,$$

$$V \sin \beta = \mathfrak{B} \sin \delta (1 + \sin \alpha)$$

ist, schreiben wir Druck, Auftrieb und Saugkraft bei der Jalousie lieber als

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot \left(\frac{2}{\pi} \frac{h}{L} \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \left(\frac{L}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

resp.

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin^2 \delta \cdot L \cdot \left(\frac{2}{\pi} \frac{h}{L} \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \left(\frac{L}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Hier werden die Koeffizienten für:

$\frac{h}{L} =$	1	2	4	∞
	0,584	0,835	0,952	1

Diese Zahlen stehen denen für die einzelne Platte oder das Plattenpaar weit näher als die vorher angegebenen. Hier

gehen die für Auftrieb und Saugkraft gefundenen Beträge bei kleinem Verhältnis $\frac{h}{L}$ in die Werte

$$\varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot 2 h$$

resp.

$$\varrho \mathfrak{B}^2 \sin^2 \delta \cdot 2 h$$

über, also der erstere Koeffizient in den doppelten Betrag des früheren bei

$$\varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot h,$$

der zweite Koeffizient in den vierfachen des früheren bei

$$\varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot \frac{h}{2}.$$

Handelt es sich um eine Jalousie von einer großen Anzahl wiewohl nicht unendlich vielen Einzelflächen, so wird die Geschwindigkeit im Unendlichen durch den Effekt des Kreisens bei einer nur endlichen Zahl von Flächen nicht geändert. Der Auftrieb, wie gerechnet, steht nun wirklich senkrecht zur Richtung der Strömung im Unendlichen, wie es ein allgemeiner Satz verlangt, und erlaubt die Gesamtzirkulation, um das nunmehr endliche System zu berechnen. Freilich wird an den obersten und untersten Flächen — insbesondere den obersten — ein korrigierter, stärkerer Auftrieb anzunehmen sein. Eine ungefähre Vorstellung von der Größe der Korrektur erhalten wir dadurch, daß bei zwei Flächen vom Abstandsverhältnisse $\frac{h}{L} = 1$ der durchschnittliche Auftrieb beider als

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 0,855$$

berechnet wurde, bei unendlich vielen Flächen er durchschnittlich aber nur

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 0,584$$

beträgt. Man kann schätzen, daß bei z. B. 20 Flächen von $\frac{h}{L} = 1$ die äußersten Flächen wohl noch etwa 0,7 oder 0,75 als

Koeffizienten erhalten werden, allerdings dann der Auftrieb der mehr inneren Flächen sehr rasch sich im Koeffizienten an 0,584 nähern wird. Es dürfte also für die 20 Flächen insgesamt statt des Auftriebs

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 11,68$$

wohl ein solcher von etwa

$$\pi \varrho \mathfrak{B}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 12,4 \text{ bis } 12,5$$

richtiger anzunehmen sein.

5. Strömung um zwei hintereinander gestellte Platten.

Als Hindernisse der Strömung nehmen wir zwei Geradenstücke an, die auf der reellen x -Achse von $-(L + E)$ bis $-E$ und von $+E$ bis $+(L + E)$ reichen.

Die Horizontalströmung ist dann durch die Strömungsfunktion $W = V \cdot \cos \beta \cdot z$ gegeben.

Für die Vertikalströmung und das Kreisen sind die Geradenstücke Stromlinien, die übrigen Teile der x -Achse Äquipotentiallinien. Für die untere Hälfte der z -Ebene ist demnach, wenn dort die Spaltungspunkte dieser Strömung die Lage z_1 und z_2 besitzen, die Strömungsfunktion:

$$W = -i V \sin \beta \int \frac{(z - z_1)(z - z_2) dz}{V(z^2 - E^2)(z^2 - (E + L)^2)}.$$

Durch Zusammenfügen beider Funktionen erhalten wir die allgemeinste Zirkulationsströmung mit den willkürlichen Konstanten z_1 und z_2 .

Wir machen wieder die Annahme, daß zwei Spaltungspunkte der Gesamtströmung in den Hinterkanten $-E$ und $+(L + E)$ liegen sollen, fordern also, daß für diese Punkte

$$\frac{dW}{dz} = V \cos \beta - i V \sin \beta \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{V(z^2 - E^2)(z^2 - (L + E)^2)}$$

endlich bleiben soll. Dazu ist $z_1 = -E$; $z_2 = -(L + E)$ nötig. Die Vorderkanten $-(L + E)$ und $+L$ erhalten dabei

unendlich große Geschwindigkeiten (müssen also abgerundet werden), und zwar ist für $z = -(L + E) + \delta$:

$$\frac{dW}{dz} = V \sin \beta \cdot \sqrt{\frac{2L(L+E)}{L+2E}} \frac{1}{V\delta} + \dots$$

und für $z = E + \delta$:

$$\frac{dW}{dz} = V \sin \beta \sqrt{\frac{2LE}{L+2E}} \frac{1}{V\delta} + \dots$$

Daraus folgen die Saugkräfte der Vorderkanten in Richtung der negativen x -Achse gleich

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \frac{2L(L+E)}{L+2E}$$

resp.

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \frac{2LE}{L+2E}.$$

Die gesamte Komponente des Auftriebs in der x -Achse für das System ist gleich der Summe dieser Saugkräfte, also gleich

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot 2L.$$

Wir erkennen, daß die hintere (rechte) Fläche verringerte Saugwirkung aufweist, die vordere (linke) vergrößerte, und zwar im Verhältnis $E:L+E$. Gegenüber einer Einzelfläche besitzt die Vordersaugkraft der vorderen Platte das Verhältnis

$$\frac{2(L+E)}{L+2E} = 1 + \frac{L}{L+2E},$$

die der hinteren Platte das Verhältnis

$$1 - \frac{L}{L+2E}.$$

Die gesamte Saugkraft beider Vorderkanten ist gleich derjenigen der beiden Platten, wenn einzeln vorhanden, oder es ändert sich die Summe der Vordersaugkräfte nicht, wenn wir die Platten in ihrer eigenen Richtung (der x -Achse) auseinanderziehen, also E ändern. Wohl aber ändert sich die Verteilung

der Saugkräfte auf beide Platten und zwar vom Koeffizienten 2 resp. 0 für $E = 0$ bis zu den Koeffizienten 1 für $E = \infty$. Diese beiden Grenzangaben sind natürlich von vornherein selbstverständlich.

Die Gesamtzirkulation finden wir, indem wir

$$\frac{dW}{dz} = V \cos \beta - i V \sin \beta \sqrt{\frac{(z + E)(z - E - L)}{(z - E)(z + E + L)}}$$

für z gleich ∞ entwickeln. Es kommt:

$$\frac{dW}{dz} = V \cos \beta - i V \sin \beta \left[1 - \frac{L}{z} \dots \right].$$

Die Zirkulationskonstante C ist also $L \cdot V \sin \beta$ und somit der Gesamtauftrieb des ganzen Systems senkrecht zur Strömungsrichtung

$$\pi \rho V^2 \sin \beta \cdot 2L$$

mit den Komponenten des Druckauftriebs

$$\pi \rho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot 2L$$

in Richtung y , und des schon vorher bestimmten Saugauftriebs

$$\pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cdot 2L$$

in der negativen x -Richtung.

Es ergibt sich, daß auch für den Gesamtauftrieb und für den gesamten Druckauftrieb des ganzen Systems Unabhängigkeit von der Entfernung $2E$ beider Platten theoretisch vorhanden ist. Daß für $E = 0$ und $E = \infty$ der doppelte Auftrieb der Einzelplatte erreicht wird, ist ja selbstverständlich, aber auch für die Zwischenlagen gilt dasselbe.

Dagegen ist Gesamtauftrieb und Druckauftrieb in verschiedenem Maße über die beiden Platten verteilt. Nach dem Früheren wissen wir, daß für $E = \infty$ natürlich jede Platte die Hälfte davon beiträgt, daß aber für $E = 0$ die vordere Platte (als vordere Hälfte einer Platte von der Breite $2L$) als Beitrag zum Druckauftrieb

$$\pi \rho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \left(1 + \frac{2}{\pi} \right),$$

die hintere Platte

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

liefert, also diese Beiträge im Verhältnis $\frac{\pi+2}{\pi-2}$ oder angenähert $\frac{9}{2}$ stehen. Unmittelbar erkennt man nun auch, da die Vorder-
saugkräfte für $\lim E = 0$ in anderer Weise sich verhalten, nämlich gegen $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot 2L$ und $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot 2L \cdot 0$ gehen, daß der aus Saugwirkung und Druckauftrieb zusammengesetzte Gesamtauftrieb jeder einzelnen Platte nicht senkrecht zur Strömungsrichtung sein wird, daß er vielmehr bei der ersten Platte gegen die Strömungsnormale etwas vorwärts geneigt, bei der zweiten, hinteren Platte stärker rückwärts geneigt sein wird. Erst aus der Zusammensetzung dieser beiden Gesamtauftriebe der Einzelplatten zum Gesamtauftrieb des Systems ergibt sich dieser letztere als senkrecht zur Strömung gerichtet.

Es sollen nun die Druckauftriebe der beiden einzelnen Platten durch Integration wirklich gefunden werden. Die beiden in $\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$ auftretenden quadratischen Terme geben bei der Integration über jede Platte Null, der Term der doppelten Produkte gibt das elliptische Integral zweiter Art

$$2 \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \int_E^{E+L} \sqrt{\frac{(z+E)(E+L-z)}{(z-E)(E+L+z)}} dz$$

als Auftrieb für die rechte (hintere) Platte. Wir setzen

$$z^2 = (L+E)^2 \left[1 - \frac{L(L+2E)}{(L+E)^2} u^2\right]; \quad \frac{L(L+2E)}{(L+E)^2} = k^2; \quad u = \sin \varphi$$

und erhalten für das Integral

$$L \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - L \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{L+2E}{L+E} u^2\right) du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{1-k^2 u^2}}$$

oder

$$L \frac{\pi}{2} + E \cdot F_1 - (L + E) E_1,$$

F_1 und E_1 sind dabei die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul:

$$k = \sqrt{\frac{L(L+2E)}{(L+E)^2}}.$$

Der Druckauftrieb der hinteren (rechten) Platte ist also:

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(E_1 - \frac{E}{L} (F_1 - E_1) \right) \right].$$

Für die vordere (linke) Platte ist der Druckauftrieb durch denselben Ausdruck mit positivem Zeichen in der Klammer vor $\frac{2}{\pi}$ gegeben.

Für $E = \infty$ wird:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \dots \right) \\ k^2 &= \frac{2L}{E} & F_1 &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \dots \right). \end{aligned}$$

Somit:

$$E_1 - \frac{E}{L} (F_1 - E_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2}{2} = \text{Null},$$

wie vorausgesehen.

Für $E = 0$ wird:

$$k^2 = 1 - \frac{E^2}{L^2}; \quad E_1 = 1; \quad F_1 = \ln \frac{4}{E|L},$$

also $\frac{E}{L} \cdot F_1 = 0$. Somit, wie vorausgesehen, die Klammer bei $\frac{2}{\pi}$ gleich 1.

Endlich bestimmen wir noch die Lage des resultierenden Druckauftriebs für die einzelnen Platten und für das System.

Das Drehmoment der Auftriebskräfte der rechten Platte in Bezug auf den Nullpunkt ist:

$$D = 2 \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \int_E^{E+L} \sqrt{\frac{(z+E)(E+L-z)}{(z-E)(E+L+z)}} z dz.$$

Und es findet sich:

$$D = L \left[(L+E) E_1 - L \cdot \frac{\pi}{4} \right] 2 \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Ebenso für das Drehmoment an der linken Platte:

$$D = -L \left[(L+E) E_1 + L \frac{\pi}{4} \right] 2 \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Es muß also die Resultierende des Druckauftriebs für die hintere Platte in der Entfernung von deren Vorderkante gleich

$$\frac{E_1 (L+E)^2 - \frac{\pi}{4} L (L+2E) - E^2 F_1}{\frac{\pi}{2} L + E \cdot F_1 - (L+E) E_1}$$

liegen.

Ebenso liegt die Resultierende für die vordere Platte in einer Entfernung von deren Vorderkante gleich

$$\frac{E_1 \cdot E (L+E) + \frac{\pi}{4} L (L+2E) - F_1 E (L+E)}{\frac{\pi}{2} L - E F_1 + (L+E) E_1}.$$

Ungemein einfach ergibt sich aus dem gesamten Drehmoment beider Druckauftriebe ($-\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta L^2$) und dem gesamten Druckauftrieb $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot 2L$ die Lage der Resultierenden dieses gesamten Druckauftriebs für beide Platten, nämlich unabhängig von E um die Strecke $\frac{L}{2}$ nach links von der Mitte des Systems (der y -Achse) geschoben. Die Angriffslinie des Druckauftriebs teilt also die Strecke von der

vorderen Vorderkante bis zur hinteren Hinterkante im Verhältnis $\frac{L + 2E}{3L + 2E}$.

Vereinigen wir den Druckauftrieb

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(E_1 - \frac{E}{L} (F_1 - E_1) \right) \right]$$

und die Vordersaugkraft

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \frac{2E}{L + 2E},$$

so erhalten wir den Gesamtauftrieb der hinteren Fläche. Der Winkel derselben gegen die y -Achse ist durch

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{2E}{(L + 2E) \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(E_1 - \frac{E}{L} (F_1 - E_1) \right) \right]}$$

gegeben; der Faktor von $\operatorname{tg} \beta$ ist kleiner als 1, somit $\delta_1 < \beta$ und der Gesamtauftrieb der hinteren Fläche gegen die Strömungsnormale rückwärts geneigt. Da analog für die vordere Fläche

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{2(L + E)}{(L + 2E) \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(E_1 - \frac{E}{L} (F_1 - E_1) \right) \right]}$$

ist, und der Faktor von $\operatorname{tg} \beta > 1$ ist, ist $\delta_2 > \beta$ und der Gesamtauftrieb der vorderen Fläche gegen die Strömungsnormale nach vorn geneigt. Die beiden Gesamtauftriebe gehen durch die vorher berechneten Schnittpunkte der Angriffslinien der Druckauftriebe mit der x -Achse.

Die Zusammensetzung beider Gesamtauftriebe der Einzelplatten liefert den Gesamtauftrieb des Systems, der vom Betrage

$$\pi \varrho V^2 \sin \beta \cdot 2L$$

senkrecht zur Strömungsrichtung durch den Punkt

$$x = -\frac{L}{2}, \quad y = 0$$

geht.

Es mögen endlich einige Zahlen folgen. Die Rechnung gibt für

$\frac{E}{L}$	als Druckauftrieb der vorderen und hinteren Platte $\pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L$ mal	als Saugkraft an den Vorderkanten $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L$ mal	als Entfernung des Druck- mittelpunktes von der Vor- derkante in Teilen von L für die vordere hintere Fläche	
$= 0$	$1 \pm 0,6366$	1 ± 1	0,3055	0,3729
$= \frac{1}{8}$	$1 \pm 0,4441$	$1 \pm 0,800$	0,2733	0,2884
$\frac{1}{4}$	$1 \pm 0,3559$	$1 \pm 0,667$	0,2647	0,2716
$\frac{1}{2}$	$1 \pm 0,2588$	$1 \pm 0,500$	0,2577	0,2602
1	$1 \pm 0,1691$	$1 \pm 0,333$	0,2534	0,2540
2	$1 \pm 0,1005$	$1 \pm 0,200$	0,2512	0,2513
∞	$1 \pm 0,000$	$1 \pm 0,000$	0,2500	0,2500

Diese Zahlen bestätigen die auf S. 120 aus den Formeln gezogenen Schlüsse. Insbesondere zeigen sie, daß auch in einer Entfernung gleich der doppelten Plattentiefe der Auftrieb der zuerst angeblasenen Platte jenen der folgenden Platte um 20% übertrifft, ja die entsprechenden Saugkräfte an den Vorderkanten sich gar um 40% unterscheiden, während der Angriffspunkt der Resultierenden des Luftwiderstandes auf beiden Platten nahezu wie im ungestörten Falle einer Platte in $\frac{1}{4}$ der Plattentiefe hinter der jeweiligen Vorderkante gelegen ist.