Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1944. Heft III
Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Kennzeichnung der durch Punkttransformationen erzeugten linearen Funktionaloperatoren.

Von **Eberhard Hopf** in München.

Vorgelegt von H. Tietze am 13. Oktober 1944.

Ω sei eine Menge (Raum) mit den Elementen (Punkten) $x, y, \ldots$. Die Teilmengen von Ω seien mit $A, B, \ldots$ bezeichnet. $T = Tx$ sei eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Punktraumes Ω auf sich selbst. Unter $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ seien in ganz Ω definierte Funktionen verstanden. Dem Folgenden sei die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der in Ω reellen und beschränkten Funktionen zugrundegelegt. Der Punkttransformation $x \to Tx$ kann man den Funktionaloperator $f \to Lf : f(x) \to f(Tx)$ zuordnen (davon macht man in der Ergodentheorie Gebrauch). Er hat folgende Eigenschaften:

a) L bildet $\mathfrak{M}$ genau auf sich ab und besitzt eine in $\mathfrak{M}$ eindeutige Inverse L^{-1}.

b) L ist linear: $L(f+g) = Lf + Lg$.

c) L und L^{-1} sind nicht negativ: Mit $f \geqq 0$ ist $Lf \geqq 0$ und $L^{-1}f \geqq 0$.[1])

d) $L\,1 = 1$.

Im folgenden wird die umgekehrte Aussage bewiesen:

Zu jeder Funktionaloperation L mit diesen vier Eigenschaften gibt es eine Punkttransformation T der erwähnten Art, derart, daß

$$Lf(x) = f(Tx)$$

für jedes f aus $\mathfrak{M}$ besteht.

B e w e i s. Aus b) folgt die Identität $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ für rationale α, β beliebigen Vorzeichens.

---

[1]) Relationen wie $f = g$, $f \geqq g$, $f > g$ sind hier stets als in ganz Ω gültig aufzufassen.

Aus a) und b) folgt dasselbe für die Inverse L^{-1}.

Aus a), b) und c) folgt: Mit $f \geqq g$ ist stets $Lf \geqq Lg$ und $L^{-1}f \geqq L^{-1}g$.

Unter $\max(f, g)$ sei diejenige Funktion verstanden, welche in jedem Punkte x den Wert $\max\big(f(x), g(x)\big)$ besitzt. Wir beweisen zunächst die Identität

$$L \max(f, g) = \max(Lf, Lg). \tag{1}$$

Aus $\max(f, g) \geqq f$ und $\geqq g$ und aus a) und b) folgt nämlich $L \max(f, g) \geqq Lf$ und $\geqq Lg$, also

$$L \max(f, g) \geqq \max(Lf, Lg).$$

Nach a), b) und c) gilt dasselbe für die Inverse L^{-1}. Ersetzt man in dieser, mit L^{-1} geschriebenen Ungleichung f, g durch Lf, Lg respektive, so folgt

$$L^{-1} \max(Lf, Lg) \geqq \max(f, g)$$

und damit schließlich (1). Ebenso beweist man

$$L \min(f, g) = \min(Lf, Lg). \tag{2}$$

Dafür, daß eine Funktion f nur die Werte Null und Eins annimmt, ist das Bestehen der Relation

$$\max(f, 1 - f) = 1$$

notwendig und hinreichend. Wegen b) und d) ist nun $L(1 - f) = L\,1 - Lf = 1 - Lf$. Ist f von jener Art, so gilt hiernach und nach (1) die Relation

$$\max(Lf, 1 - Lf) = L\,1 = 1,$$

m. a. W.: Nimmt f keine anderen Werte als Null oder Eins an, so gilt dasselbe von Lf. Ergänzung hierzu: Nimmt dabei f beide Werte Null und Eins wirklich an, so tut es auch Lf. Das letztere gilt wegen $L\,0 = L^{-1}\,0 = 0$ und $L\,1 = L^{-1}\,1 = 1$. Dieselben Aussagen gelten auch für die Inverse L^{-1}.

Wir bezeichnen mit φ_A die charakteristische Funktion der Punktmenge A,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ in } A \\ 0, & x \text{ in } \Omega\text{-}A, \end{cases}$$

$\varphi_\Omega = 1$, $\varphi_0 = 0$ (für die Nullmenge). Für die Vereinigung $A+B$ und den Durchschnitt $A \cdot B$ zweier Mengen gelten die Relationen

$$\varphi_{A+B} = \max(\varphi_A, \varphi_B), \; \varphi_{A \cdot B} = \min(\varphi_A, \varphi_B). \tag{3}$$

Nach Obigem existiert zu jedem A ein eindeutig bestimmtes A', derart, daß $L\varphi_A = \varphi_{A'}$ ist. Auch ist A bei beliebigem A' durch $L^{-1}\varphi_{A'} = \varphi_A$ eindeutig bestimmt. Mit $A \neq 0$ ist $A' \neq 0$ und umgekehrt. Damit ist eine umkehrbar eindeutige Mengentransformation $A' = TA$ definiert,

$$L\,\varphi_A = \varphi_{TA}, \; L^{-1}\varphi_A = \varphi_{T^{-1}A}, \tag{4}$$

$T0 = 0$, $T\Omega = \Omega$. T hat die Eigenschaften

$$T(A+B) = TA+TB, \; T(A \cdot B) = TA \cdot TB. \tag{5}$$

Sie folgen aus (1), (3) und (4); z. B. ist

$$\varphi_{T(A+B)} = L\,\varphi_{A+B} = \max(L\varphi_A, L\varphi_B) = \max(\varphi_{TA}, \varphi_{TB}) = \varphi_{TA+TB}.$$

Aus alledem folgt: Besteht A aus einem einzigen Punkt x, so enthält auch TA nur einen Punkt Tx; die Mengenabbildung T wird durch eine Punktabbildung Tx erzeugt.

Wir beweisen, daß für jedes f

$$Lf(x) = f(\overset{-1}{Tx}) \tag{6}$$

ist. Wir beweisen es zunächst für jedes g, welches nur endlich viele, und zwar rationale Werte annimmt. Ein solches g hat die Form

$$g(x) = \alpha\varphi_A(x) + \beta\varphi_B(x) + \ldots$$

mit endlich vielen Summanden und paarweise fremden Mengen $A, B, \ldots$; $\alpha, \beta, \ldots$ sind die Werte von g. Wegen der Linearität von L und wegen (4) ist

$$Lg(x) = \alpha\, L\, \varphi_A(x) + \beta\, L\, \varphi_B(x) + \dots .$$
$$= \alpha\, \varphi_{TA}(x) + \beta \varphi_{TB}(x) + \dots . = \alpha\, \varphi_A(\overset{-1}{T_x}) + \beta \varphi_B(\overset{-1}{T_x})$$
$$+ \dots = g(\overset{-1}{T_x}).$$

Zu beliebigem beschränktem $f(x)$ und zu beliebigem natürlichem n gibt es ein $g(x)$ der obigen Art mit

$$0 \leqq f(x) - g(x) \leqq \frac{1}{n} \tag{7}$$

in ganz Ω. Dann ist auch

$$0 \leqq f(\overset{-1}{T_x}) - g(\overset{-1}{T_x}) \leqq \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Aus (7) folgt

$$0 \leqq Lf(x) - Lg(x) \leqq L\frac{1}{n} = \frac{1}{n} L\, 1 = \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Da (6) für g richtig ist, folgt aus (8) und (9)

$$|\, Lf(x) - f(\overset{-1}{T_x})\, | \leqq \frac{1}{n}.$$

Da n beliebig ist, folgt (6) allgemein.