Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1943

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über Orthogonalisierung, Kurventheorie und allgemeine Drehbewegung.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 14. Mai 1943.

1. Die zu einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ gehörenden Frenetschen Formeln (für den R^n) stellen einen Sonderfall der allgemeineren Aufgabe dar, für die Bewegung eines starren Körpers um einen festgehaltenen Punkt — wenn diese Bewegung durch die Vektoren $\xi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eines mit dem Körper festverbundenen orthogonalen n-Beins dargestellt wird — die Geschwindigkeitsvektoren $\xi_i'(t)$ als lineare Verbindungen der Vektoren $\xi_i(t)$ darzustellen. Für die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ werden dabei die Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ des begleitenden n-Beins durch „Orthogonalisierung" aus $\mathfrak{x}', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ gewonnen, sowie der letzte Vektor ξ_n als vektorielle Ergänzung der $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ zu einem positiven orthogonalen n-Bein. Gewöhnlich beschränkt sich die Darstellung auf den Fall $n = 3$ (was sich z. B. schon bei der genannten Ergänzung zeigt, wenn sie in der Gestalt $\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2$ als Vektorprodukt erscheint), wobei nicht nur die Fälle $n > 3$, sondern auch eine gleichförmige Behandlung von $n = 2$ beiseite bleiben. Gerade die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionszahl n verdeutlicht aber einerseits die Sonderstellung gegenüber allgemeinen Drehbewegungen eines orthogonalen n-Beins und läßt andererseits die Rolle der durch die Orthogonalisierung hereinkommenden und in die Formeln für die $n-1$ Krümmungen eingehenden Gramschen Determinanten erkennen.[1] Die bezüglichen Sätze seien hier kurz zusammengestellt.[2]

[1] Vgl. hierzu auch Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Diss. Göttingen 1905, § 3 und die dort angeführte Arbeit von J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, Crelle's Journal f. Math. 94 (1883). – Sei noch beigefügt, daß die in der bekannten Diss. von Paul Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Göttingen 1918, in Kap. VIII gegebene Verallgemeinerung der Formeln für die Kurvenkrümmungen nach anderer Richtung geht.

[2] Eine Darstellung mit Ausführung der Beweise soll im Crelleschen Journal

2. Ist $1 \leqq m \leqq n$, so erhält man zu m linear-unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ durch „normierte Orthogonalisierung" das durch

$$\sqrt{\Gamma_{\mu-1}\,\Gamma_\mu}\;\xi_\mu = \Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mu-1}, 1\\ \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mu-1}, \mathfrak{x}_\mu\end{pmatrix} \quad (1 \leqq \mu \leqq m) \qquad (1)$$

definierte System orthogonaler Einheitsvektoren $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Dabei bedeutet[3]

$\Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mu\\ \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mu\end{pmatrix}$ die Determinante $|a_{\varrho\sigma}|$ aus den Elementen $a_{\varrho\sigma} = \mathfrak{y}_\varrho\,\mathfrak{x}_\sigma$, und die Gramsche Determinante Γ_μ ist durch $\Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mu\\ \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mu\end{pmatrix}$ definiert ($\Gamma_0 = 1$).

3. Bedeutet $\Delta(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ die Determinante $|x_{\nu\lambda}|$ der n Vektoren $\mathfrak{x}_\nu = (x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu n})$, dann ist die vektorielle Ergänzung $\mathfrak{x}_n$ zu $n-1$ Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ definiert durch das Bestehen der Gleichung

$$\Delta(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}_n\,\mathfrak{y}$$

für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{y}$.

4. Für ein bewegliches System von stetig differenzierbaren orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gelten Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{z}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,\mathfrak{z}_k, \qquad (2)$$

bei denen die Koeffizienten c_{ik} stetig sind und eine schief-symmetrische Matrix bilden:

$$c_{ik} + c_{ki} = 0. \qquad (3)$$

Umgekehrt liefert bei vorgegebenen stetigen, den Bedingungen (3) genügenden, sonst beliebigen c_{ik} die Auflösung des Differentialgleichungssystems (2) stets ein bewegtes System von orthogonalen Einheitsvektoren, also eine Drehbewegung eines starren

f. Math. unter dem Titel „Über Frenetsche Formeln, Poinsotsche Bewegungen und Gramsche Determinanten" erscheinen.

[3] Das analog zu erklärende Symbol auf der rechten Seite von (1) bedeutet ersichtlich einen Vektor.

Körpers, die im wesentlichen (d. h. bis auf die Anfangslage des Vektorensystems im Körper) eindeutig bestimmt ist.

5. Sei $h \geqq 0$ und die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ mindestens $(n + h)$-mal stetig-differenzierbar. Das begleitende n-Bein werde hergestellt durch Orthogonalisierung (Nr. 2) aus $\mathfrak{x}', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ und Bildung der vektoriellen Ergänzung ξ_n zu den durch die Orthogonalisierung gewonnenen $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Dann hat das zu $\mathfrak{z}_i = \xi_i$ gehörige Differentialgleichungssystem (2) die Besonderheit, daß alle $c_{ik} = 0$ sind für $k > i + 1$. Die $n - 1$ „Krümmungen" $c_{i,i+1} = K_i$ sind dabei $(n + h - i - 1)$-mal stetig-differenzierbar und gegeben durch

$$K_i = \frac{1}{\Gamma_i} \sqrt{\frac{\Gamma_{i-1}\,\Gamma_{i+1}}{\Gamma_1}} \quad \text{für } 1 \leqq i < n - 1, \tag{4}$$

$$K_{n-1} = \frac{\sigma}{\Gamma_{n-1}} \sqrt{\frac{\Gamma_{n-2}\,\Gamma_n}{\Gamma_1}} = \frac{1}{\Gamma_{n-1}} \sqrt{\frac{\Gamma_{n-2}}{\Gamma_1}}\, \Delta(\mathfrak{x}', \ldots, \mathfrak{x}^{(n)}), \tag{5}$$

wenn Γ_μ bzw. Δ wie in Nr. 2 bzw. 3 erklärt ist (dabei $\mathfrak{x}_\mu = \mathfrak{x}^{(\mu)}$ gesetzt) und $\sigma = \pm 1$ im Falle $\Delta \neq 0$ das Vorzeichen von Δ (und damit jenes der „Torsion" K_{n-1}) bedeutet.[4] Umgekehrt kann man die $K_1, \ldots, K_{n-1}$ vorgeben ($K_i = K_i(t)$ sei $(n + h - i - 1)$-mal stetig-differenzierbar, $K_i > 0$ für $i < n - 1$, sonst beliebig); man erhält dann durch Integration von

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -K_i\,\xi_{i-1} + K_{i+1}\,\xi_{i+1} \tag{6}$$

(die Glieder mit ξ_0 und ξ_{n+1} sind dabei wegzulassen) eine bis auf Ausgangspunkt und Ausgangslage der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eindeutig bestimmte Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ mit t als Bogenlänge und $\xi_1, \ldots, \xi_n$ als begleitendem n-Bein.

[4] Zu (4), (5) vgl. die aus andersartigen Entwicklungen hergeleitete Formel (15), S. 42 der (Leipzig 3. VI. 1881 datierten) Arbeit von G. E. A. Brunel (damals Abbeville) „Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions" in den Math. Annalen 19 (1882), S. 37–55. [Zusatz bei der Korrektur.]