Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Kongruenzeigenschaften von aus den natürlichen Zahlen gebildeten Potenzsummen.

Von A. Voss.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Mai 1917.

Bezeichnet man die Summen

$$1^h + 2^h + 3^h + \cdots + n^h$$

für ganze positive h mit S_n^h, so ergeben sich für $h = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Ausdrücke von der folgenden Form

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$S_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{(3n^2+3n-1)}{5} \cdots$$

und auch für die folgenden Werte von h treten bei ungeradem h stets die Faktoren $n^2(n+1)^2$, bei geradem h aber die Faktoren $n(n+1)(2n+1)$ hervor. Man kennt nun die allgemeine Entwicklung von S_n^h vermöge des aus den Bernoullischen Zahlen B_h gebildeten Bernoullischen Polynoms

$$\varphi_h(x+1) = \frac{(x+B)^{h+1} - B^{h+1}}{h+1},$$

das für ganze x mit dem S_x^h zusammenfällt, nämlich

$$2h\varphi_{2h-1}(x+1) = x^2(x+1)^2 M$$
$$2(2h+1)\varphi_{2h}(x+1) = x(x+1)(2x+1)N,$$

wobei M eine ganze rationale Funktion $h-2$ Grades in $x(x+1)$ ist, deren Koeffizienten aus den mit gewissen von h abhängigen

Faktoren multiplizierten Bernoullischen Zahlen B_1 bis zu B_{2h-2} gebildet sind, während N in ähnlicher Weise eine ganze rationale Funktion h-Grades von $x(x+1)$ ist, welche die Bernoullischen Zahlen bis zu B_{2h} nebst anderen Faktoren linear enthält[1]).

Aus dieser wichtigen, an die Eulersche Summationsformel anknüpfenden Darstellung geht nun freilich hervor, daß die Faktoren n, $n+1$, $2n+1$ und zum Teil auch deren Quadrate in den Werten der Potenzsummen auftreten. In welcher Weise aber, läßt sich dabei nicht übersehen, da die Bernoullischen Zahlen mit den Eulerschen ganzen Zahlen E durch die Formel

$$B_h = \frac{h(E+1)^{h-1}}{2^h(2^h-1)}$$

verknüpft sind. Ich führe daher im folgenden eine direkte Untersuchung, um das Auftreten jener Faktoren selbst in den Potenzsummen zu ermitteln. Dabei erwies es sich zweckmäßig, in Verbindung mit den S_n^h noch andere Summen, die mit Σ_n^h, Ω_n^h, A_n^h bezeichnet sind, heranzuziehen.

Einen wesentlichen Unterschied macht es dabei immer, ob h, der Index der Potenzsumme, gerade oder ungerade ist. Anstatt S_n^h soll übrigens, und so auch bei den anderen Summen, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, einfach S^h geschrieben, also nur der Index hervorgehoben werden.

§ 1.

Die Kongruenz $2S^h \equiv 0$; mod. $n(n+1)$ bei ungeradem h.

Hier liegt die Sache allerdings sehr einfach. Denn bei geradem n läßt sich das erste und letzte, das zweite und das vorletzte Glied usw. von

$$S^h = 1^h + 2^h + \cdots n^h$$

zu einem durch $n+1$ teilbaren Paare vereinigen, so daß also

[1]) Vgl. z. B. E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, deutsch von Kowalewski, Leipzig 1904, S. 302.

Ia) $$S^h \equiv 0;\ \text{mod}\ n+1 \text{ für } n \equiv 0 \ \text{mod}\ 2$$

ist. Ist aber n ungerade, so gilt dasselbe, nur bleibt das Mittelglied $\left(\frac{n+1}{2}\right)^h$ übrig, da das vorhergehende $\left(\frac{n-1}{2}\right)^h$ das folgende $\left(n+1-\frac{n-1}{2}\right)^h$ ist. Soll auch dies durch $n+1$ teilbar sein, so muß

$$(n+1)^h = 2^h(n+1)q$$

oder $(n+1)^{h-1} = 2^h q$, wo q eine ganze Zahl ist, sein.

Da nun $n = 2k+1$, so folgt

$$(k+1)^{h-1} = 2q$$

und diese Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn k eine ungerade Zahl ist. Es ergibt sich daher

Ib) $$S^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ n+1,$$

wenn $$n = 4k-1 \text{ oder } = 2k \text{ ist.}$$

Ebenso ist in S^h die Summe des ersten und vorletzten Gliedes usw. durch n teilbar. Bei ungeradem n ist daher

IIa) $$S^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ n.$$

Ist dagegen n gerade, so bleibt das Mittelglied $\left(\frac{n}{2}\right)^h$ übrig, da das vorhergehende $\left(\frac{n}{2}-1\right)$, das folgende $\left(n-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^h$ ist. Dies aber ist gleich dem $n$fachen einer ganzen Zahl q, wenn

$$n^{h-1} = 2^h q$$

ist, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $n = 2k$, also

$$k^{h-1} = 2q,$$

oder k selbst eine gerade Zahl ist. Es ist daher allgemein

1) $$2S^n \equiv 0;\ \text{mod.}\ n(n+1), \qquad \text{dagegen}$$

2) $$S^n \equiv 0;\ \text{mod.}\ n+1 \text{ für } n = 2k,\ 4k-1$$
$$S^n \equiv 0;\ \text{mod.}\ n \text{ für } n = 2k-1,\ 4k$$

bei ungeradem h.

Man kann natürlich auch so verfahren, daß man

$$S^h = (n-(n-1))^h + (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h + n^h$$

setzt, woraus sofort bei ungeradem h

$$2\,S^h = n\,P$$

und in analoger Weise

$$2\,S^h = (n+1)\,Q$$

folgt, womit wieder 1) bewiesen ist, während die genaueren Angaben unter 2) unberücksichtigt bleiben.

Aber dieser einfache Weg läßt sich bei geradem h nicht mehr benutzen. In Wirklichkeit liegen auch die Verhältnisse bei geradem h ganz anders; sie erfordern zunächst die Untersuchung der Teilbarkeit von S^h nach dem Modul $2n+1$, der im folgenden beständig durch σ bezeichnet werden soll.

§ 2.

Die Summen S^h und Σ^h.

Aus der Identität

$$(n+1)^h - (n-1)^h = 2\left\{\binom{h}{1} n^{h-1} + \binom{h}{3} n^{h-3} + \cdots + \binom{h}{4} n^4 + \binom{h}{2} n^2 + 1\right\}$$

bei ungeradem h findet man sogleich

$$(n+1)^h - (n-1)^h = 2\left\{\binom{h}{1} n^{h-1} + \binom{h}{3} n^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} n^2 + 1\right\}$$

$$(n-1)^h - (n-3)^h = 2\left\{\binom{h}{1} (n-2)^{h-1} + \binom{h}{3} (n-2)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} (n-2)^2 + 1\right\}$$

$$(n-3)^h - (n-5)^h = 2\left\{\binom{h}{1} (n-4)^{h-1} + \binom{h}{3} (n-4)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} (n-4)^2 + 1\right\}$$

. . . . . .

Ist nun $n = 2k-1$, so lautet die letzte, $k$te Gleichung

$$(n-(2k+1))^h - (n-(2k-1))^h = 2\left\{\binom{h}{1} + \binom{h}{3} + \cdots + \binom{h}{2} + 1\right\}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen entsteht

$$\begin{aligned}(n+1)^h = 2\Big\{&\binom{h}{1}(1 + 3^{h-1} + \cdots + (2k-1)^{h-1}) \\ &+ \binom{h}{3}(1 + 3^{h-3} + \cdots + (2k-1)^{h-3}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \binom{h}{2}(1 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2) + k\Big\},\end{aligned}$$

in der rechts die Potenzsummen der ungeraden Zahlen auftreten. Setzt man daher

$$1) \qquad \Sigma_n^h = 1 + 3^h + 5^h + \cdots (2n-1)^h = \Sigma^h,$$

so ergibt sich, falls man linker Hand $n = 2k-1$ setzt, und dann wieder statt h n schreibt, die folgende, für jedes n und ungerades h gültige Gleichung

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned}2^{h-1}n^h - n = &\binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots \\ &+ \binom{h}{4}\Sigma^4 + \binom{h}{2}\Sigma^2.\end{aligned}$$

Diese Formel kann zur rekurrenten Berechnung der sämtlichen Σ von geradem Index dienen. Ist dagegen $n = 2k$, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned}(2k+1)^h - (2k-1)^h = 2\Big\{&\binom{h}{1}2^{h-1}k^{h-1} + \binom{h}{3}2^{h-3}k^{h-3} + \cdots \\ &+ \binom{h}{2}2^2k^2 + 1\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2k-1)^h - (2k-3)^h = 2\Big\{&\binom{h}{1}2^{h-1}(k-1)^{h-1} \\ &+ \binom{h}{3}2^{h-3}(k-1)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}2^2(k-1)^2 + 1\Big\},\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und als letzte, $k$te Gleichung

$$(2+1)^h-(2-1)^h=2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}+\cdots+\binom{h}{2}2^2+1\right\}$$

mithin für jedes n bei ungeradem h

$$(2n+1)^h-(1+2n)=2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}S^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}S^{h-3}+\cdots\right.$$

$$\text{II)}\qquad\left.+\binom{h}{2}2^2S^2\right\},$$

womit die S^h von geradem Index rekurrent dargestellt wird.

Ist nun zweitens h gerade, so ergibt sich auf analoge Weise

$$(n+1)^h-(n-1)^h=2\left\{\binom{h}{1}n^{h-1}+\binom{h}{3}n^{h-3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{h}{3}n^3+\binom{h}{1}n\right\},$$

also bei ungeradem $n=2k-1$

$$\text{III)}\qquad 2^{h-1}k^h=\binom{h}{1}\Sigma_k^{h-1}+\binom{h}{3}\Sigma_k^{h-3}+\cdots+\binom{h}{1}\Sigma_k^1.$$

Bei geradem $n=2k$ hat man endlich

$$(2n+1)^h-1=2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}S^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}S^{h-3}+\cdots\right.$$

$$\text{IV)}\qquad\left.+2^3\binom{h}{3}S^3+2\binom{h}{2}S^1\right\},$$

also zwei weitere Rekursionsformeln für die S und Σ mit ungeradem Index. Die Formeln II), IV) sind einfacher, wie die gewöhnlich zur Bestimmung der S^h angewendete; sie bieten auch bei der Ausrechnung im Gegensatz zu der Anwendung der Bernoullischen Zahlen den Vorteil, daß die fraglichen Faktoren n, $n+1$, $2n+1$ sich ganz ohne Mühe erkennen lassen. So ist z. B., wenn $\Theta=n\,(n+1)\,(2n+1)$ gesetzt wird

$$90\,S^8=\Theta\{5(n^6+3n^5+n^4-3n^3)-n^2(9n-3)\}$$

und die rechte Seite ist immer durch $2\cdot5\cdot9$ teilbar.

Daß übrigens $(2n+1)\,((2n+1)^{h-1}-1)$ in II) bei ungeradem h immer den Faktor 2^3 enthält, sieht man sofort, wenn man die beiden letzten Glieder der Entwicklung von $(2n+1)^{h-1}-1$ zu

$$2n(h-1)\,(n(h-2)+1)$$

zusammenrückt. Und ebenso enthält die linke Seite von IV) den Faktor 2^3, denn die Vereinigung der beiden letzten Glieder derselben liefert hier

$$2nh\,(n(h-1)+1).$$

§ 3.

Beziehungen zwischen S^h und Σ^h.

Wir betrachten jetzt gleichzeitig die beiden Summen

1)
$$S^h = 1^h + 2^h + \cdots + n^h$$
$$\Sigma^h = 1^h + 3^h + \cdots + (2n-1)^h.$$

Aus der Identität

$$2^h S^h = (\sigma - (2n-1))^h + (\sigma - (2n-3))^h + \cdots + (\sigma-3)^h + (\sigma-1)^h$$

für $\sigma = 2n+1$ erhält man

2)
$$2^h S^h = n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} + (-1)^h\Sigma^h.$$

Aus den Gleichungen

$$\Sigma^h = 1 + 3^h + 5^h + \cdots + (2n-1)^h$$
$$2^h S^h = 2^h + 4^h + \cdots + (2n-2)^h + (2n)^h$$

folgt durch Addition

3)
$$\Sigma^h + 2^h S^h = S^h + P,$$

falls
$$P = (n+1)^h + (n+2)^h + \cdots + (2n)^h$$

gesetzt wird. Bringt man nun P auf die Form

$$P = (\sigma - n)^h + (\sigma - (n-1))^h + \cdots + (\sigma-1)^h,$$

so folgt

$$P = n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}S^{h-1} + (-1)^{h-1}S^h,$$

so daß nun aus 3) folgt

$$4)\quad \Sigma^h + 2^h S^h = S^h + n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma S^{h-1} + (-1)^h S^h.$$

Durch diese Gleichung, welche zugleich die Umkehrung des Systems der linearen Gleichungen 2) für die Σ darstellt, sind sämtliche Σ vermöge der S bestimmt. Setzt man diesen Wert von Σ^h an Stelle des letzten Gliedes von 2) rechts ein, so folgt die Gleichung

$$5)\quad \begin{aligned}((2^h-1)S_n^h - n\sigma^h)(1+(-1)^h) &= -\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} \\ &+ (-1)^h\left\{-\binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma S^{h-1}\right\}.\end{aligned}$$

Ist nun h eine gerade Zahl, so ergibt sich aus 5) die neue Gleichung

$$2\cdot(2^h-1)S^h = 2n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}(\Sigma^1+S^1) + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}(\Sigma^2 + S^2) - \cdots - \binom{h}{1}\sigma(\Sigma^{h-1}+S^{h-1}),$$

aus der die für das folgende wichtige Kongruenz

$$\text{I)}\qquad (2^h-1)S_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$$

folgt, da der Faktor 2 links offenbar wegen des ungeraden σ fortgelassen werden kann.

Aus 2) folgt noch

$$2^h S^h - (-1)^h \Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma$$

oder bei geradem h

$$2^h S^h - \Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2;$$

bei ungeradem h dagegen

$$2^h S^h + \Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma.$$

Aus I) folgt jetzt mit Hülfe der eben gewonnenen Kongruenz bei geradem h

II) $$S^h - \Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma,\ \text{für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Daß der Faktor $2^h - 1$ in I) hinreichend ist, damit die Kongruenz bestehe, ist vorhin gezeigt. Dabei erhebt sich aber zunächst die Frage, ob nicht schon einer der beiden Teilfaktoren von

$$2^h - 1 = \left(2^{\frac{h}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{h}{2}} + 1\right)$$

schon genügt, um die Kongruenz herbeizuführen, oder auch vielleicht irgend ein anderer, bei speziellen Werten von h auftretender Teiler von $2^h - 1$. Das letztere kann natürlich eintreten, so daß man nicht verlangen wird, daß die hier gefundenen Resultate mit jeder weiteren Vereinfachung bei wirklicher Ausrechnung übereinstimmen werden. Auch für das folgende ist der Gesichtspunkt festzuhalten, daß der charakteristische Faktor $2^h - 1$ eben für alle h gültig sein soll.

Daß nun aber unter dieser Voraussetzung nicht etwa einer der Teilfaktoren desselben bereits ausreicht, lehren die einfachsten Beispiele. So ist z. B. $S_3^6 = 65$ nicht durch 7, $S_1^6 = 4890$ nicht durch 9, $S_{10}^6 = 1078405$ nicht durch 21 teilbar, so daß die beiden Faktoren von $2^6 - 1 = 7 \cdot 9$ erforderlich sind.

Freilich kommen auch andere Fälle vor. Für $h = 8$ ist $2^8 - 1 = 255 = 17\,(3 \cdot 5)$, und es ist $S_2^8 = 257$ nicht durch 5, $S_4^8 = 72354$ nicht durch 9 teilbar. Aber $S_8^8 = 24684612$ ist durch 17 schon selbst teilbar, so daß in diesem speziellen Falle der Faktor $2^4 + 1$ überflüssig ist, und ähnlich ist es auch bei $h = 10$, wo der Faktor $2^5 - 1 = 31$ in $S_{15}^{10} = 529882277575$ schon selbst enthalten ist. Dies steht damit in Zusammenhang, daß nach einer später zu erweisenden Formel dann be-

reits S_n^{h-1} denselben Faktor hat, also in den soeben angegebenen Fällen $S_3^7 = 3297456$ schon durch 17[1]), S_{15}^9 durch 31 teilbar ist. Ich habe die Frage, wann bei ungeradem h $S^h \equiv 0$; mod. σ ist, nicht weiter verfolgen können.

§ 4.

Neue Rekursionsformel für S^h.

Nach § 3, 5) ist bei geradem h

$$2(2^h-1)S^h = 2n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 \cdots - \binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1}$$

$$1) \qquad - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 \cdots - \binom{h}{1}\sigma S^{h-1}.$$

Ersetzt man jetzt rechts jedes Σ durch seinen Wert nach § 3, 4)

$$\Sigma^k = (1-2^k)S^k + n\sigma^k - \binom{h}{1}\sigma^{k-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{k-2}S^2 -$$

$$2) \qquad + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma S^{k-1} + (-1)^h S^k,$$

so läßt sich S^h rekurrent durch die S von niederem Index ausdrücken. Um diese Rechnung, die bei direkter Ausführung besondere Betrachtungen über Binomialkoeffizienten erfordert, bequem durchführen zu können, ist es zweckmäßig, S^k durch eine symbolische Potenz $(S)^k$ zu ersetzen, was offenbar gestattet ist, so lange es sich nur um lineare Verbindungen der S^k handelt. Man erhält so an Stelle von 2) die einfachere Gleichung

$$2\,a) \qquad \Sigma^k = (1-2^k)S^k + n\sigma^k + (\sigma - S)^k - \sigma^k.$$

Führt man nun die symbolischen Potenzen von S auch im zweiten, die S^k enthaltenden Teil von 1) ein, welcher dann gleich $(\sigma - S)^h - \sigma^h - S^h$ ausfällt, so ergibt sich als Wert der linken Seite von 1) der Ausdruck

---

[1]) Es ist daher auch Σ_3^7 durch 17 teilbar.

$$2n\sigma^h - \binom{h}{1}\{n\sigma + (1-2)S^1 + (\sigma - S) - \sigma\}\,\sigma^{h-1}$$
$$+ \binom{h}{2}\{n\sigma^2 + (1-2^2)S^2 + (\sigma - S)^2 - \sigma^2\}\,\sigma^{h-2}$$
$$- \binom{h}{3}\{n\sigma^3 + (1-2^3)S^3 + (\sigma - S)^3 - \sigma^3\}\,\sigma^{h-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \binom{h}{2}\{n\sigma^{h-2} + (1-2^{h-2})S^{h-2} + (\sigma - S)^{h-2} - \sigma^{h-2}\}\,\sigma^2$$
$$- \binom{h}{2}\{n\sigma^{h-1} + (1-2^{h-1})S^{h-1} + (\sigma - S)^{h-1} - \sigma^{h-1}\}\,\sigma$$
$$+ (\sigma - S)^h - \sigma^h - S^h.$$

Die Summation dieser Glieder ergibt für diejenigen Teile, welche keine S^k, sondern nur symbolische Potenzen von S enthalten

$$n\sigma^h\left\{2 - \binom{h}{1} + \binom{h}{2} - \cdots + \binom{h}{2} - \frac{h}{1}\right\}$$
$$+ \sigma^h\left\{\binom{h}{1} - \binom{h}{2} + \binom{h}{3} \cdots - \binom{h}{2} + \binom{h}{1} - 1\right\} - \sigma^h$$
$$+ \sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}(\sigma - S) + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}(\sigma - S)^2 - \cdots$$
$$- \binom{h}{1}\sigma(\sigma - S)^{h-1} + (\sigma - S)^h - S^h.$$

Da hier nun die beiden ersten Zeilen gleich Null sind, und auch die dritte den Wert

$$(\sigma - (\sigma - S))^h - S^h = 0$$

besitzt, ergibt sich bei geradem h die grundlegende Entwicklung

$$2(2^h - 1)S^h = (2-1)\binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + (1-2^2)\binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots$$
$$\text{I)} \qquad + (1-2^{h-2})\binom{h}{2}\sigma^2 S^{h-2} + (2^{h-1}-1)\binom{h}{1}\sigma S^{h-1},$$

in der n, außer in σ, nicht mehr vorkommt, und jedes S^k rechts mit dem charakteristischen Faktor $(2^k - 1)$ multipliziert ist.

Bei ungeradem h ergibt sich auf dieselbe Weise aus 5)

$$0 = (2-1)\binom{h}{1}\sigma^{h-2}S^1 + (1-2^2)\binom{h}{2}\sigma^{h-3}S^2 + \cdots$$
$$+ (2^{h-2}-1)\binom{h}{2}\sigma S^{h-2} + \binom{h}{1}(1-2^{h-1})S^{h-1},$$

oder für $h-1 = h_1$

II)
$$(h_1+1)(2^{h_1}-1)S^{h_1} = (2-1)\binom{h_1+1}{1}\sigma^{h_1-1}S^1$$
$$+(1-2^2)\binom{h_1+1}{2}\sigma^{h_1\cdot 2}S^2 + \cdots + \binom{h_1+1}{2}(2^{h_1-1}-1)\sigma S^{h_1-1},$$

so daß sich wieder nur eine Relation für den geraden Index h_1 ergibt. Sie wiederholt indessen, obwohl sie keineswegs identisch mit der Gleichung I) ist, nur in weniger ausdrucksvoller Form die Kongruenz

$$(2^{h_1}-1)S^{h_1} \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma.$$

Aus II) folgt noch, daß, wenn S^{h_1-1} bereits den Faktor σ hat, $(2^{h_1}-1)S^{h_1}$ denselben Faktor quadratisch enthalte, worauf schon am Schluß von § 4 aufmerksam gemacht wurde.

Hätte man übrigens direkt die Summen Σ in die Gleichung 1) eingetragen, so muß man ebenfalls zur Gleichung I) oder II) gelangen. Da nun zwischen den S^k hierbei keine weiteren Beziehungen benutzt werden, so müssen sich auch genau dieselben Koeffizienten ergeben. Hieraus erhält man die folgenden Identitäten zwischen Binomialkoeffizienten, und zwar bei geradem h:

$$\binom{h}{k} - \binom{k+1}{k}\binom{h}{k+1} + \binom{k+2}{k}\binom{h}{k+2}$$
$$+ \cdots (-1)^{k-1}\binom{h-1}{k}\binom{h}{k-1} = (-1)^{k-1}\binom{h}{k},$$

bei ungeradem h dagegen:

$$\binom{h}{k} - \binom{k+1}{k}\binom{h}{k+1} + \binom{k+2}{k}\binom{h}{k+2}$$
$$+ \cdots (-1)^{k}\binom{h-1}{k}\binom{h}{h-1} = (-1)^{k}\binom{h}{k},$$

wobei $k < h$ zu nehmen ist. Sie lassen sich auch ohne Schwierigkeit direkt erweisen.

Eine zu I) analoge Formel läßt sich nun auch für die Summen Σ herleiten. Man hat zunächst nach § 3, 2)

$$3) \qquad 2^h S^n = (n-1)\sigma^h + (\sigma - \Sigma)^h$$

bei jedem h, wenn man an Stelle von Σ^h ebenfalls eine symbolische Potenz $(\Sigma)^h$ einführt. Nun ist bei geradem h nach § 3, 5)

$$4) \qquad \begin{aligned} 2(2^h - 1)S^h &= (2n-1)\sigma^h + (\sigma - \Sigma)^h - \Sigma^h \\ &\quad - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 - \cdots - \binom{h}{1}\sigma S^{h-1}. \end{aligned}$$

Zieht man von der mit 2 multiplizierten Gleichung 3) die Gleichung 4) ab, so bleibt

$$\begin{aligned} 2S^h &= 2(n-1)\sigma^h - (2n-1)\sigma^h + (\sigma - \Sigma)^h + \Sigma^h + \cdots \\ &\quad + \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 - \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + \binom{h}{1}\sigma S^{h-1} \end{aligned}$$

oder, wenn man die symbolischen Potenzen wieder entfernt

$$5) \qquad \begin{aligned} S^h &= -\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 - \binom{h}{3}\sigma^{h-3}\Sigma^3 + \cdots \\ &\quad + (-1)^1\binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} + 2\Sigma^h + \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 - \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 \\ &\quad + \binom{h}{3}\sigma^{h-3}\Sigma^3 + \binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} - S^h \end{aligned}$$

eine Formel, die, nebenbei bemerkt, dadurch von Interesse erscheint, daß sie die Differenz $\Sigma^k - S^k$ rekurrent bei geradem h ausdrückt.

Nun ersetze man in 5) links S^h durch seinen Wert aus 3). Dann folgt

$$5\,a) \qquad \frac{(n-1)\sigma^h + (\sigma - \Sigma)^h}{2^h} = (\sigma - \Sigma)^h - \sigma^h + \Sigma^h + P,$$

wobei, wenn man auch rechts alle S^k nach 3) einsetzt, der Ausdruck P gleich

$$\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{1}{2}((n-1)\sigma+\sigma-\Sigma)-\binom{h}{2}\sigma^{h-2}\frac{1}{2^3}((n-1)\sigma^2$$
$$+(\sigma-\Sigma)^2)+\cdots+\binom{h}{1}\sigma\frac{1}{2^{h-1}}((n-1)\sigma^{h-1}+(\sigma-\Sigma)^{h-1})$$
$$-\frac{(n-1)\sigma^h+(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}$$

wird. Dieser Wert aber kann, wenn man alle σ^h enthaltenden Glieder zusammenfaßt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$P=(n-1)\sigma^h\left\{\binom{h}{1}\frac{1}{2}-\binom{h}{2}\frac{1}{2^2}+\binom{h}{3}\frac{1}{2^3}-\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{h}{1}\frac{1}{2^{h-1}}-\frac{1}{2^h}\right\}+\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{1}{2}(\sigma-\Sigma)-\binom{h}{2}\sigma^{h-2}\frac{1}{2^2}(\sigma-\Sigma)^2$$
$$+\cdots+\binom{h}{1}\frac{1}{2^{h-1}}(\sigma-\Sigma)^{h-1}-\frac{(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}$$

oder, wenn man nach dem binomischen Satze die beiden Teile je für sich gruppiert

$$P=(n-1)\sigma^h\left\{-1+\binom{h}{1}\frac{1}{2}-\binom{h}{2}\frac{1}{2^2}\cdots-\frac{1}{2^h}\right\}+(n-1)\sigma^h+\sigma^h$$
$$+\left\{-\sigma^h+\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{\sigma-\Sigma}{2}-+\cdots+\binom{h}{1}\frac{(\sigma-\Sigma)^{h-1}}{2^{h-1}}-\frac{(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}\right\},$$

so daß

$$P=(n-1)\sigma^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\frac{1}{2^h}(\sigma+\Sigma)^h+\sigma^h$$

wird. Es ergibt sich also aus 5a)

$$\frac{(n-1)\sigma^h}{2^h}=(\sigma-\Sigma)^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\sigma^h+\Sigma^h$$
$$+(n-1)\sigma^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\frac{1}{2^h}(\sigma+\Sigma)^h$$

oder

$$(\sigma-\Sigma)^h(2^h-1)=-2(n-1)\sigma^h(2^{h-1}-1)+(\sigma+\Sigma)^h-2^h\Sigma^h,$$

also, wenn man endlich wieder zu den Ausdrücken Σ^k selbst übergeht

$$\Sigma^h(2^h-1)+n(2^{h-1}-1)=\sigma 2^h\left\{\binom{h}{1}\sigma^{h-2}\Sigma^1+\binom{h}{3}\sigma^{h-4}\Sigma^3 + \cdots+\binom{h}{1}\Sigma^{h-1}\right\}-2(2^{h-1}-1)\sigma^2\left\{\binom{h}{2}\sigma^{h-4}\Sigma^2+\cdots + \binom{h}{2}\Sigma^{h-2}\right\}.$$

§ 5.

Die Kongruenz $2(2^h-1)S^h\equiv 0$; mod. $n(n+1)$ bei geradem h.

Die Formel I) des § 4 zeigt nun auch den Weg, um zur Entscheidung über die in S^h auftretenden Faktoren $n(n+1)$ bei geradem h zu gelangen.

Setzt man zur Abkürzung

$$(2^h-1)S^h=\varrho_h,$$

so ist nach derselben

$$2\varrho_h=\binom{h}{1}\varrho_1\sigma^{h-1}+\binom{h}{3}\varrho_3\sigma^{h-3}+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}\sigma^3+\binom{h}{1}\varrho_{h-1}\sigma - \left\{\binom{h}{2}\varrho_2\sigma^{h-2}+\binom{h}{4}\varrho_4\sigma^{h-4}+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\sigma^2\right\},$$

wobei in dem zweiten mit dem Minuszeichen versehenen Teile nur Potenzsummen von geradem Index, im ersten nur solche von ungeradem vorkommen. Setzt man jetzt $\sigma=2n+1$ und entwickelt nach Potenzen von n, so folgt[1])

$$2\varrho_h=nP+\binom{h}{1}\varrho_1+\binom{h}{3}\varrho_3+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}+\binom{h}{1}\varrho_{h-1} - \left\{\binom{h}{2}\varrho_2+\binom{h}{4}\varrho_4+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\right\}, \tag{1}$$

wird dagegen $\sigma=2(n+1)-1$ genommen, und dann nach den Potenzen von $n+1$ entwickelt, so folgt

$$2\varrho_h=(n+1)Q-\left\{\binom{h}{1}\varrho_1+\binom{h}{3}\varrho_3+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}+\binom{h}{1}\varrho_{h-1}\right\} - \left\{\binom{h}{2}\varrho_2+\binom{h}{4}\varrho_4+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\right\}. \tag{2}$$

[1]) Unter P und Q sind hier wie auch im folgenden ganzzahlige Ausdrücke zu verstehen.

Es ist jetzt zu beweisen, daß die in 1) und 2) rechterhand die ϱ enthaltenden Teile mod. n und mod. $n+1$ der Null kongruent sind. Für die Anfangswerte von h, etwa von 2 bis 20, läßt sich dies direkt erkennen, wenn man aufmerksam die Gruppierung der bereits gefundenen ϱ mit den Binomialkoeffizienten betrachtet. Aber der allgemeine Nachweis, daß

$$3) \qquad 2\varrho_h \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1)$$

läßt sich auf diesem Wege nicht wohl erbringen, weil dabei ganz spezielle Zahleneigenschaften dieser Koeffizienten zur Verwendung kommen. Man wird daher versuchen, die vollständige Induktion anzuwenden.

Es sei demnach vorausgesetzt, daß für $h = 2, 4, \ldots h-2$ der Satz 3) bereits bestehe. Dann läßt sich auf Grund von 1) und 2) und nach § 1 behaupten, daß jedenfalls

$$4\varrho_h \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1)$$

sein muß. Aber daraus würde mit Sicherheit nur geschlossen werden können, daß allgemein

$$2^\mu \varrho_h \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1)$$

sein muß, wobei μ eine ganze positive Zahl ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\mu = 1$ ist. Dazu führt die Anwendung der bekannten Rekursionsformel, die man zur Berechnung der S^k anzuwenden pflegt, welche wir hier anführen, weil sie auch weiterhin zur Verwendung gelangt. Es ist

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{h}{1} n^k + \binom{h}{2} n^{k-1} + \cdots + \binom{h}{2} n^2 + \binom{h}{1} n + 1$$

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \binom{h}{1} (n-1)^k + \binom{h}{2} (n-1)^{k-1} + \cdots$$

$$+ \binom{h}{2} (n-1)^2 + \binom{h}{2} (n-1) + 1$$

. . . . . .

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = \binom{h}{1} 1 + \binom{h}{2} 1 \cdots + \binom{h}{2} 1 + \binom{h}{1} 1 + 1,$$

wobei rechts der Abkürzung wegen $h = k + 1$ gesetzt ist. Durch Addition folgt

$$1) \quad (n+1)^{k+1} - (n+1) = \binom{h}{1} S^k + \binom{h}{2} S^{k-1} + \cdots + \binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{1} S^1$$

und die linke Seite hat den Faktor $n(n+1)$.

Nun ist nach § 3, II) bei ungeradem h

$$\frac{(2n+1)^{h-1} - 1)(2n+1)}{2} = \binom{h}{1} 2^{h-1} S^{h-1} + \binom{h}{3} 2^{h-3} S^{h-3} + \cdots$$

$$2) \qquad + \binom{h}{2} 2^2 S^2.$$

Setzt man in 1) $k = h - 1$, so ist

$$(n+1)((n+1)^{h-1} - 1) = \binom{h}{1} S^{h-1} + \binom{h}{2} S^{h-2} + \cdots$$

$$3) \qquad + \binom{h}{2} S^2 + \frac{h}{1} S^1.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 3) von der Gleichung 2) ergibt sich

$$\frac{((2n+1)^{h-1} - 1)(2n+1)}{2} - (n+1)((n+1)^{h-1} - 1)$$

$$4) \qquad = \binom{h}{1} \varrho_{h-1} + \binom{h}{3} \varrho_{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} \varrho_2$$

$$- \left\{ \binom{h}{2} S^{h-2} + \binom{h}{4} S^{h-4} + \cdots + \binom{h}{1} S^1 \right\}.$$

Multipliziert man die Identität 4) noch mit 2, so haben rechts alle S^1, S^3, . . . S^{h-2} wegen des ungeraden h nach § 1 den Faktor $n(n+1)$. Aber auch die linke Seite hat ihn, denn

$$(2n+1)^{h-1} - 1$$

ist gleich Null für $n = 0$ und für $n = -1$ wegen des geraden $h - 1$. Wird nun vorausgesetzt, daß die zu erweisende Kongruenz bereits für

$$2\varrho_2, \; 2\varrho_4, \; \ldots \; 2\varrho_{h-3}$$

besteht, so erhält man aus 4)

$$2h\varrho_{h-1} \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1),$$

d. h. die Kongruenz besteht auch für den nächst höheren Index $h-1$. Und da h ungerade ist, vorhin aber bereits erkannt war, daß der Faktor von ϱ_{h-1} nur eine Potenz von 2 sein kann, folgt jetzt $\mu = 1$. Somit ist die Kongruenz

$$2\varrho_{h-1} \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1)$$

für $h \equiv 1;$ mod. 2 allgemein als richtig erwiesen.

§ 6.

Über die Kongruenz $AS^h \equiv 0;$ mod. $n^2(n+1)^2$ bei ungeradem h.

Mit Hülfe der vorhergehenden Untersuchung gelingt es jetzt auch, die Teilbarkeit von S^h durch $n^2(n+1)^2$ bei ungeradem h zu erkennen. Dazu dienen zunächst die an § 1 anknüpfenden Entwicklungen.

Setzt man bei ungeradem h

$$S^h = (n-(n-1))^h + (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h + n^h$$

und entwickelt nach Potenzen von n, so erhält man

$$2S^h = n^h(n+1) - \binom{h}{1} n^{h-1} S^1 + \binom{h}{2} n^{h-2} S^2 + \cdots$$

I)
$$- \binom{h}{2} n^2 S^{h-2} + \binom{h}{1} n S^{h-1}$$

und ebenso entsteht aus

$$S^n = (n+1-n)^h + (n+2-n)^h + \cdots + (n+1-2)^h + (n+1-1)^h$$

$$2S^h = n(n+1)^h - \binom{h}{1}(n+1)^{h-1} S^1 + \binom{h}{2}(n+1)^{h-2} S^2 - \cdots$$

II)
$$- \binom{h}{2}(n+1)^2 S^{h-2} + \binom{h}{1}(n+1) S^{h-1}.$$

Subtrahiert man von der mit n multiplizierten Gleichung II) die mit $n+1$ multiplizierte Gleichung I), so bleibt

1)
$$-2S^h = n^2(n+1)^2((n+1)^{h-2} - n^{h-2}) + P,$$

wo P in folgender Weise geschrieben werden kann

$$P = -\Big\{\binom{h}{1} S^1(n(n+1)^{h-1} - (n+1)n^{h-1}) + \binom{h}{2} S^3(n(n+1)^{h-3} - (n+1)n^{h-3}) + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-2}(n(n+1)^2 - (n+1)n^2)\Big\}$$
$$+ \binom{h}{2} S^2(n(n+1)^{h-2} - (n+1)n^{h-2}) + \binom{h}{4} S^4(n(n+1)^{h-4} - (n+1)n^{h-4}) + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-3}(n(n+1)^3 - (n+1)n^3).$$

Aus der Gleichung 1) folgt unmittelbar die in § 1 auf anderem Wege bewiesene Kongruenz

$$2S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1) \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2,$$

denn jedes Glied hat jetzt rechts den Faktor $n(n+1)$, der nun durch τ bezeichnet werden soll.

Multipliziert man jetzt 1) mit 2, so hat jedes rechts vorkommende S^h von ungeradem Index den Faktor τ. Man hat daher:

$$-4S^h = \tau^2\Big\{((n+1)^{h-2} - n^{h-2}) - \binom{h}{1}\frac{2S^1}{\tau}((n+1)^{h-2} - n^{h-2})$$
$$+ \cdots - \binom{h}{2}\frac{2S^{h-2}}{\tau}(n+1-n)\Big\} + \tau\Big\{\binom{h}{2}2S^2((n+1)^{h-3} - n^{h-3})$$
$$+ \binom{h}{4}2S^4((n+1)^{h-5} - n^{h-5}) + \cdots + \binom{h}{3}2S^{h-3}((n+1)^2 - n^2)\Big\}.$$

Nun würde man, wenn jede der Summen S^k mit geradem Index mit ihrem charakteristischen Faktor multipliziert und dividiert, auch aus dem zweiten Teile in 2) den Faktor τ^2 absondern können. Aber hierbei würde eine sehr unvollkommene Betrachtung entstehen, weil das Auftreten des Faktors τ bei einem S^{2k} von dem bei allen niederen Indices $k = 1, 2, \ldots$ abhängig gemacht würde, und dieselbe Unübersichtlichkeit eintritt, die bei der Anwendung der Bernoullischen Zahlen vorliegt. Es bleibt vielmehr zu zeigen, daß man auf viel einfachere Art auch in dem zweiten Teil von 2 den Faktor τ^2 erkennen kann.

Zu diesem Zwecke setzen wir

III) $$(n+1)^p - n^p = P_p.$$

Dann besteht die Identität

3) $$P_p = Q_{p-1} + \tau P_{p-2}, \text{ falls}$$

IV) $$Q_p = (n+1)^p + n^p$$

gesetzt wird, und zugleich ist

4) $$Q_p = \sigma Q_{p-1} - \tau Q_{p-2}; \quad \sigma = 2n+1.$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_p &= \sigma Q_{p-1} - \tau Q_{p-2} \\ \sigma Q_{p-1} &= \sigma^2 Q_{p-2} - \tau\sigma Q_{p-3} \\ \sigma^2 Q_{p-2} &= \sigma^3 Q_{p-3} - \tau\sigma^2 Q_{p-4} \\ \sigma^{p-2} Q_2 &= \sigma^{p-1} Q_1 - \tau\sigma^{p-2} Q_0, \end{aligned}$$

wobei nach IV) $Q_0 = 2$, $Q_1 = \sigma$ findet man

5) $$Q_p = \sigma^{p-1} Q_1 - \tau\{Q_{p-2} + \sigma Q_{p-3} + \cdots + 2\sigma^{p-2}\}.$$

Aus den für ein gerades p zu benutzenden Gleichungen

$$\begin{aligned} P_p &= Q_{p-1} + \tau P_{p-2} \\ \tau P_{p-2} &= \tau Q_{p-3} + \tau^2 P_{p-4} \\ \tau^2 P_{p-4} &= \tau^2 Q_{p-5} + \tau^3 P_{p-6} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau^{\frac{p-2}{2}} P_2 &= \tau^{\frac{p-2}{2}} Q_1 + \tau^{\frac{p}{2}} P_0, \text{ wo } P_0 = 0 \end{aligned}$$

findet man

6) $$P_p = Q_{p-1} + \tau M,$$

oder, wenn man aus 5) den Ausdruck für Q_{p-1} einsetzt,

V) $$P_p = \sigma^{p-1} + \tau N,$$

wobei M und N ganzzahlige Werte besitzen. Setzt man diese Ausdrücke für die P_p in 2) ein, so bleibt als einziges Glied rechts, welches den Faktor τ^2 nicht enthält

7) $$\tau\left\{\binom{h}{2} 2S^2\sigma^{h-4} + \binom{h}{4} 2S^4\sigma^{h-6} + \cdots + \binom{h}{3} 2S^{h-3}\sigma\right\}.$$

Nun ist aber

$$\sigma^q = (2n+1)^q = (2n+1)^2 (2n+1)^{q-2}$$
$$= 4n(n+1)\sigma^{q-2} + \sigma^{q-2},$$

demnach schließlich bei ungeradem q

8) $$\sigma^q = 4\tau M_1 + \sigma.$$

Setzt man dies in 7) ein, so handelt es sich noch um den Ausdruck

$$2\left\{\binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{4} S^4 + \cdots + \binom{h}{3} S^{h-3}\right\} \sigma\tau.$$

Aus der Gleichung 1) des § 5

$$(n+1)\left((n+1)^{h-1} - 1\right) = \binom{h}{1} S^{h-1} + \binom{h}{2} S^{h-2} + \cdots$$
$$+ \binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{1} S^1,$$

deren linke Seite den Faktor τ hat, entnimmt man aber bei ungeradem h, daß

$$2\left\{\binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{4} S^4 + \cdots + \binom{h}{3} S^{h-3}\right\},$$

welches nur Summen von geradem Index enthält, gleich

$$\tau N_1 - 2\left\{\binom{h}{1} S^1 + \binom{h}{3} S^3 + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-2}\right\} - 2\binom{h}{1} S^{h-1}$$

ist, wo nun das letzte Glied geraden Index hat. Nach § 1 haben aber alle Glieder hier bis auf dieses den Faktor τ. Sonach folgt

$$4S^h = \tau^2 R + 2\sigma\binom{h}{1} S^{h-1}.$$

Es besteht demgemäß bei ungeradem h die Kongruenz

$$4(2^{h-1} - 1) S^h \equiv 0; \text{ mod. } n^2(n+1)^2, \text{ bei } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Ist h eine Primzahl, so kann h in dem Faktor $2^{h-1} - 1$ selbst als unwesentlich fortgelassen werden. Man hat z. B.

$$4 \cdot 3 \cdot S^5 \equiv 0; \text{ mod. } n^2(n+1)^2,$$

was auch mit der wirklichen Ausrechnung übereinstimmt.

Indessen darf man auch hier nicht durchgehend volle Übereinstimmung mit der unmittelbaren Ausrechnung erwarten. Denn es ist nicht ausgeschlossen, daß einzelne in $2^{h-1}-1$ enthaltene Faktoren bei speziellen Werten von h nach beiderseits gehoben werden können. Dies ist bereits für $h=7$ der Fall, wo unsere Untersuchung den Faktor 3 einmal zu oft enthält. Andererseits liefert aber auch die wirkliche Ausrechnung

$$S^7 = \frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4+6n^3-n^3-4n+2)$$

mit dem überzähligen Nenner 2, der für jedes n aus dem eingeklammerten Teile entfernt werden kann.

Man kann die vorhin geführte Untersuchung durch eine andere Analyse bestätigen, welche allerdings mehrere Unterfälle zu unterscheiden hat, dafür aber auch das Resultat noch etwas präziser faßt.

1. Ist zunächst n eine gerade Zahl $2k$, so schreibe man

$$S^h = ((2k-1)^h + 1^h) + ((2k-2)^h + 2^h) + \cdots + ((k+1)^h + (k-1)^h) + k^h + (2k)^h.$$

Jedes der eingeklammerten $k-1$ Paare ist durch $2k$ teilbar. Setzt man diesen Faktor durch Division überall heraus, so folgt

$$\begin{aligned} S^h = {} & 2k\{(2k-1)^{h-1} - (2k-1)^{h-2} + \cdots - (2k-1) + 1\} \\ & + 2k\{(2k-2)^{h-1} - (2k-2)^{h-2}2 + \cdots - (2k-2)2^{h-2} + 2^{h-1}\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2k\{(2k-(k-1))^{h-1} - (2k-(k-1))^{h-2}(k-1) + \cdots \\ & - (2k-(k-1))^1(k-1)^{h-2} + (k-1)^{h-1}\} + k^h + (2k)^h. \end{aligned}$$

Wird nun jede der Potenzen ausgeführt, so ergibt sich[1])

$$S^h = 2k\{2kQ + hS_{k-1}^{h-1}\} + k^h + (2k)^h.$$

Wird mit $4(2^{h-1}-1)$ multipliziert, so folgt, da S_{k-1}^{h-1} dann nach § 5 den Faktor $2k$ wegen des geraden Index $h-1$ enthält,

[1]) Unter Q, Q_1, Q_2 usw. werden hier immer ganze Zahlen verstanden.

$$4(2^{h-1}-1)S^h = 4k^2Q(2^{h-1}-1) + (2k)^2 gh = 4k^h(2^{h-1}-1)$$
$$\text{oder} \qquad + 4k^2 \cdot 2 \cdot (2k)^{h-2}(2^{h-1}-1)$$

A) $\quad 4(2^{h-1}-1)S^h \equiv 0;$ mod. n^2 für $n \equiv 0;$ mod. 2.

Ist h eine Primzahl, so kann man noch durch h dividieren; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch die ganze Zahl g noch Faktoren mit $2^{h-1}-1$ gemein hat (vgl. die vorhin gemachte Bemerkung).

2. Um auch die Kongruenz nach dem Modul $(n+1)^2$ nachzuweisen, setze man

$$S^h = ((2k)^h + 1^h) + ((2k-1)^h + 2^h) + \cdots ((2k-(k-1))^h + k^h).$$

Man hat jetzt wieder k Paare, von denen jedes durch $2k+1 = n+1$ teilbar ist. Ordnet man sie in der folgenden Gestalt

$$S^h = ((2k+1-1)^h + 1^h) + ((2k+1-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+1-k)^h + k^h),$$

so erhält man auf dieselbe Weise wie bei 1)

$$S^h = (2k+1)\{(2k+1)Q_1 + hS_k^{h-1}\}.$$

Da jetzt $(2^{h-1}-1)S_k^{h-1} = (2k+1)g$ nach § 3, so ergibt sich

B) $\quad (2^{h-1}-1)S^n \equiv 0;$ mod. $(n+1)^2;$ für $n \equiv 0;$ mod. 2.

3. Ist dagegen n ungerade gleich $2k+1$, so gruppiere man zunächst so:

$$S^h = ((2k)^h + 1^h) + ((2k-1)^h + 2^h) + \cdots + ((k+1)^h + k^h) + (2k+1)^h$$

und schreibe die ersten k Paare folgendermaßen

$$((2k+1-1)^h + 1^h) + ((2k+1-1-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+1-k)^h + k^h).$$

Nun wird

$$S^h = (2k+1)\{2k+1-1)^{h-1} - (2k+1-1)^{h-2} + \cdots - (2k+1-1) + 1\} + (2k+1)\{(2k+1-2)^{h-1} - (2k+1-2)^{h-2}2 + \cdots - (2k+1-2)2^{h-2} + 2^{h-1}\} + \cdots + (2k+1)\{(2k+1-k)^{h-1} - (2k+1-k)^{h-2}k + \cdots - (2k+1-k)k^{h-2} + k^{h-1}\} + (2k+1)^h$$

und hieraus folgt

$$(2^{h-1}-1)\,S^h = (2k+1)^2\,(2^{h-1}-1)\,Q + (2k+1)^2\,hg + (2k+1)^h\,(2^{h-1}-1)$$

oder

C) $$(2^{h-1}-1)\,S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } n \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Zum Nachweis für die Kongruenz nach dem Modul $(n+1)^2$ setze man endlich

$$S = ((2k+1)^h + 1^h) + ((2k)^h + 2^h) + \cdots ((k+2)^h + k^h) + (k+1)^k$$

und ordne die ersten k Paare, so daß

$$S^h = ((2k+2-1)^h + 1^h) + ((2k+2-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+2-k)^h + k^h) + (k+1)^h.$$

Man erhält dann

$$S^h = (2k+2)\,\{(2k+2)\,Q + h\,S_k^{h-1}\} + (k+1)^h$$

oder

$$4\,S^h\,(2^{h-1}-1) = 4\,(2k+2)^2\,Q\,(2^{h-1}-1) + hq\,(2k+2)^2\,2 + (2k+2)^2\,(k+1)^{h-2},$$

also endlich

D) $$4\,S^h\,(2^{h-1}-1) \equiv 0;\ \text{mod. } (n+1)^2 \text{ für } n \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Durch die 4 Kongruenzen A, B, C, D ist das Auftreten des quadratischen Faktors in jedem einzelnen Falle dargestellt.

§ 7.

Die Summen $\Sigma^h = 1 + 3^h + 5^h + \cdots (2n-1)^h$.

Die Formel III) des § 2 für gerades h

1) $$(2^{h-1})\,n^h = \binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots + \binom{h}{3}\Sigma^3 + \binom{h}{1}\Sigma^1$$

drückt alle Σ^h von ungeradem Index k durch Σ von niedrigerem ungeradem Index aus. Demnach ist für $h = 2$ $\Sigma^1 = n^2$ und jedes Σ von ungeradem Index wird daher auch den Faktor n^2 enthalten, abgesehen von der jedesmal noch erforderlichen

Division durch h. Es entsteht daher kein übersichtliches Resultat für Σ^h, sondern zunächst nur die Kongruenz

$$A\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2,$$

in der A einen Faktor bedeutet, der, wie man leicht aus der Natur der Binomial-Koeffizienten erkennt, nur eine ungerade Zahl sein kann.

Für ein ungerades h hat man dagegen aus I) des § 3 die Gleichung

$$2)\qquad n((2n)^{h-1}-1) = \binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}\Sigma^2,$$

welche alle Σ von geradem Index durch ebensolche von niederem Index ausdrückt. Da die linke Seite von der Form

$$n\left((2n)^{\frac{h-1}{2}}-1\right)\left((2n)^{\frac{h-1}{2}}+1\right)$$

stets den Faktor $n(2n-1)(2n+1)$ enthält, folgt für die Σ von geradem Index die Kongruenz

$$B\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n\sigma\sigma_1 \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Aus 1) erhält man

für $h = 2$ $\quad \Sigma^1 = n^2$
„ $h = 4$ $\quad \Sigma^3 = n^2(2n^2-1)$
„ $h = 6$ $\quad 3\Sigma^5 = n^2(16n^4-20n^2+7)$
„ $h = 8$ $\quad 3\Sigma^7 = n^2(48n^6-112n^4+98n^2-31)$
. . . . . .

und ebenso aus 2)

für $h = 3$ $\quad 3\Sigma^3 = n\sigma\sigma_1$
„ $h = 5$ $\quad 15\Sigma^4 = n\sigma\sigma_1(12n^2-7)$
„ $h = 7$ $\quad 21\Sigma^6 = n\sigma\sigma_1(48n^4-72n^2+31)$
„ $h = 9$ $\quad 45\Sigma^8 = n\sigma\sigma_1(320n^6-880n^4+916n^2-461)$
. . . . . .

wobei wie früher $\sigma = 2n+1$, $\sigma_1 = 2n-1$ gesetzt ist.

Im folgenden sollen die Faktoren A, B, welche den soeben angeführten Beispielen entsprechen, vollständig angegeben werden.

Zunächst mögen indes einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf S und Σ gleichzeitig beziehen. Nach § 3, 4) ist

$$\Sigma^h + (2^h - 1 - (-1)^h) S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma,$$

also

$$\Sigma^h + 2(2^h - 1) S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2$$
$$\Sigma^h + 2^h S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Aus der letzten Kongruenz, an deren Stelle man auch schreiben kann

$$\Sigma^h + 2^h S^h = P\sigma^2 + h\sigma S^{h-1}$$

folgt durch Multiplikation mit $2^{h-1} - 1$ aus § 3

$$(2^{h-1} - 1)(2^h S^h + \Sigma^h) = (2^{h-1} - 1) P\sigma^2 + g h \sigma^2,$$

also

3) $$(2^{h-1} - 1)(2^h S^h + \Sigma^h) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma^2 \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Ist insbesondere h eine Primzahl, so hat man

3a) $$\frac{(2^{h-1} - 1)}{h}(2^h S^h + \Sigma^h) = \sigma^2 Q.$$

In der Tat findet man, falls die vorhin bestimmten Werte der Σ für $h = 3, 5, 7 \ldots$ eingesetzt werden

$$2^3 S^3 + \Sigma^3 = n^2 \sigma^2$$
$$3(2^5 S^5 + \Sigma^5) = n^2 \sigma^2 (2\sigma^2 - 2\sigma - 1)$$
$$3(2^7 S^7 + \Sigma^7) = n^2 \sigma^2 \left(\frac{3\sigma^2 - 1}{2} - 3\sigma^3 + 2\sigma + 1\right).$$

Ich füge dazu einige Sätze, die den Unterschied zwischen dem Verhalten der Summen S und Σ betreffen.

a) Aus der Gleichung § 3, 3)

4) $$\Sigma^h + (2^h - 1) S^h = (n+1)^h + \cdots + (n+n)^h$$

folgt

5) $$\Sigma^h + 2^h (2^{h-1} - 1) S^h \equiv 0; \text{ mod. } n$$

bei jedem h. Ist nun h ungerade, so hat man nach § 1, 1) aus 5)

Ia) $$\Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } n \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2$$

und nach § 5) aus 5)

Ib) $$(2^h - 1)\Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } n \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

b) Aus der Identität 4) folgt ferner durch Entwicklung nach den Potenzen von $n+1$

6) $$\Sigma^h + 2(2^h - 1) S^h \equiv (-1)^{h+1};\ \text{mod. } n+1$$

bei jedem h. Ist nun h ungerade, mithin $2S^h$ nach § 1, 1) durch $n+1$ teilbar, so hat man

$$\Sigma^h \equiv 1;\ \text{mod. } n+1;\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Bei geradem h wird dagegen

$$(\Sigma^h + 1)(2^h - 1) \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Es ist also Σ^h bei ungeradem h nie durch $n+1$ teilbar; bei geradem h kann Σ^h nur etwa solche Faktoren mit $n+1$ gemein haben, die zugleich in $2^h - 1$ enthalten sind.

c) Für ungerades h ist ferner

$$2^h S^h + \Sigma^h = ((2n-2)^h + 1^h) + ((2n-3)^h + 2^h) + \cdots + (n^h + (n-1)^h) + (2n-1)^h + (2n)^h.$$

Da jedes der $n-1$ eingeklammerten Paare den Faktor $\sigma_1 = 2n-1$ hat, folgt

7) $$2^h S^h + \Sigma^h \equiv +1;\ \text{mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Ist dagegen h gerade, so ist

$$\Sigma^h = \sigma_1^h + (\sigma_1 - 2)^h + (\sigma_1 - 4)^h + \cdots + (\sigma_1 - (2n-4))^h + (\sigma_1 - (2n-2))^h$$

und aus dieser Identität findet man

8) $$2^h S^h - \Sigma^h \equiv 1;\ \text{mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Die beiden Kongruenzen 7) und 8) lassen sich zu

9) $$2^h S^h - (-1)^h \Sigma^h \equiv 1;\ \text{mod. } \sigma_1$$

für jedes h zusammenfassen.

Um noch eine weitere Beziehung abzuleiten, setzen wir

$$\Sigma^h + (2^h - 1) S^h = P,$$

wo $$P = (n+1)^h + \cdots + (2n)^h \text{ ist.}$$

Daraus folgt

$$2^h P = (\sigma_1 + 3)^h + (\sigma_1 + 5)^h + \cdots + (\sigma_1 + 2n - 1)^h + 4n^h$$

oder

$$2^h P - \Sigma^h = \sigma_1 Q_1 + (4n)^h - 1 = \sigma_1 Q_2 + 2^h - 1,$$

also

$$(2^h - 1)\Sigma + 2^h(2^h - 1)S^h - (2^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$

oder

10) $$(2^h - 1)(\Sigma^h + 2^h S^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$

bei jedem h.

Aus 9) und 10) ergibt sich jetzt bei geradem h

$$(2^h - 1)(2^h S^h - \Sigma^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$
$$(2^h - 1)(2^h S^h + \Sigma^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1,$$

also durch Addition

11) $(2^h S^h - 1)(2^h - 1) \equiv 0$; mod. σ_1 für $h \equiv 0$; mod. 2

und durch Subtraktion

II) $(2^h - 1)\Sigma^h \equiv 0$; mod. σ_1 für $h \equiv 0$; mod. 2.

Ist dagegen h ungerade, so wird durch 10) nur die Kongruenz 9) wiederholt. In Verbindung mit der Gleichung 9) lehrt die Gleichung 11), daß bei geradem h S^h nur solche Faktoren mit σ_1 gemein haben kann, die auch in $2^h - 1$ enthalten sind.

Durch diese Betrachtungen sind sowohl die hauptsächlichsten Eigenschaften, welche Σ und S gemein haben, als auch diejenigen, in denen sie voneinander abweichen, dargestellt.

Wir kehren jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, bei ungeradem h die Kongruenz $A\Sigma^h \equiv 0$; mod. n^2, bei geradem h die Kongruenz $B\Sigma^h \equiv 0$; mod. $n\sigma\sigma_1$ zu erweisen. Für den modul σ_1 ist sie übrigens schon durch II), für n durch Ib) erledigt.

Es sei nun zunächst h ungerade und n eine gerade Zahl $2k$. Dann hat Σ^h eine gerade Anzahl von Gliedern. Nimmt man das erste und letzte Glied, das zweite und das vorletzte usw. zusammen, so hat man

$$\Sigma^h = ((4k-1)^h + 1^h) + ((4k-3)^h + 3^h) + \cdots + (2k+1)^h + (2k-1)^h$$

und die rechte Seite ist auch gleich

$$((4k-1)^h + 1^h) + ((4k-3)^h + 3^h) + \cdots + ((4k-(2k-1))^h + (2k-1)^h).$$

Da jedes dieser k Paare wegen des ungeraden h den Faktor $4k$ enthält, wird also

$$\begin{aligned}\Sigma^h = {} & 4k\{(4k-1)^{h-1} - (4k-1)^{h-2}1 + \cdots + 1\} \\ & + 4k\{(4k-3)^{h-1} - (4k-3)^{h-2}3 + \cdots + 3^{h-1}\} \\ & + 4k\{(4k-5)^{h-1} - (4k-5)^{h-2}5 + \cdots + 5^{h-1}\} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 4k\{(4k-(2k-1))^{h-1} - (4k-(2k-1))^{h-2}(2k-1) \\ & \cdots + (2k-1)^{h-1}\}.\end{aligned}$$

Führt man jede der hier auftretenden Potenzen nach dem binomischen Satze aus und beachtet, daß $h-1$, $h-2$, $h-3$ ... abwechselnd gerade und ungerade sind, so entsteht bei ungeradem h und geradem n die Gleichung

$$\Sigma_n^h = 4k(4kQ_1 + h\Sigma_k^{h-1}, \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Da nun nach der in diesem § bewiesenen Kongruenz

$$(2^{h-1} - 1)\Sigma_k^{h-1}$$

bereits den Faktor k enthält, so folgt

$$(2^{h-1} - 1)\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } n \equiv 0,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

und insbesondere, wenn h eine Primzahl

$$\text{III a)} \qquad \frac{2^{h-1}-1}{h}\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2.$$

2. Ist dagegen n eine ungerade Zahl $2k+1$, so bleibt bei analoger Anordnung in Paare, wie bei 1), ein Mittelglied $(2k+1)^h$ übrig, während die übrigen sich zu Paaren zusammenfügen lassen. Denn dem Glied $(2k+1)^h$ geht vorher $(2k-1)^h$, und es folgt $(2k+3)^h$. Es ist aber

$$2k+3 = 4k+2-(2k-1).$$

Man erhält also zunächst:

$$\Sigma_n^h = ((4k+1^h)+1^h)+((4k-1)^h+3^h)+\cdots+((4k-(2k-3))^h + (2k-1)^h)+(2k+1)^h$$

und kann die rechte Seite auch folgendermaßen schreiben:

$$((4k+2-1)^h+1^h)+((4k+2-3)^h+3^h)+\cdots + [((4k+2-(2k-1))^h+(2k-1)^h)]+(2k+1)^h.$$

Demnach wird

$$\Sigma_n^h = 2\cdot(2k+1)\{(4k+2-1)^{h-1}-(4k+2-1)^{h-1}+\cdots+1\}$$
$$+2(2k+1)\{(4k+2-3)^{h-1}-(4k+2-3)^{h-1}3+\cdots+3^{h-1}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2(2k+1)\{(4k+2-(2k-1))^{h-1}-(4k+2$$
$$-(2k-1))^{h-1}(2k-1)+\cdots+(2k-1)^{h-1}\}+(2k+1)^h$$

oder

$$\Sigma_n^h = 2(2k+1)(2\cdot(2k+1)P+h\,\Sigma_k^{h-1})+(2k+1)^h.$$

Multipliziert man jetzt mit $2^{h-1}-1$ und benutzt die in § 3 nachgewiesene Kongruenz

$$(2^{h-1}-1)\,\Sigma_k^{h-1} \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma = 2k+1,$$

so erhält man

III b) $(2^{h-1}-1)\,\Sigma_n^h \equiv 0;$ mod. n^2 für $n \equiv 1,\ h \equiv 1;$ mod. 2,

so daß nunmehr die Gleichung

IV) $$(2^{h-1}-1)\,\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2$$

für jedes ungerade h besteht.

Die Kongruenzen I b), II), IV) enthalten die sämtlichen Eigenschaften, welche am Eingange dieses § von den Summen Σ behauptet sind, wenn man noch die aus § 3, I) und II) folgende

$$(2^h-1)\,\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$$

hinzu nimmt.

Die unter 3 a) erwiesene Kongruenz läßt sich jetzt noch erweitern. Da nämlich

$$4\,(2^{h-1}-1)\,S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$
$$(2^{h-1}-1)\,\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

ergibt sich für ungerades h

$$(2^{h-1}-1)\,(2^h S^h + \Sigma^h) \equiv 0;\ \text{mod. } n^2\sigma^2,$$

was nach den früher angeführten Beispielen (S. 176) zu vermuten war.

§ 8.

Die Summen $\Omega_n^h = \sum_1^n (-1)^{n+1} n^h$.

Diese Summen besitzen weit einfachere Eigenschaften, wie die in den vorhergehenden §§ betrachteten S und Σ. Setzt man

1) $\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h - 4^h + \cdots + (-1)^n (n-1)^h + (-1)^{n+1} n^h,$

so erhält man sofort die folgende Identität

2) $$(n+1)^h + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}\left\{2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1 + \Omega_n^0\right\},$$

in der bei geradem n das Symbol Ω_n^0 gleich Null, bei ungeradem n gleich Eins zu setzen ist. Die Gleichung 2) ergibt sich, wenn man die Identitäten

$$(n+1)^h + n^h = 2\,n^h + \binom{h}{1} n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1} n + 1$$

in geeigneter Weise für $n = 1, 2 \ldots n$ durch Plus- und Minus-Zeichen vereinigt. Man erhält so

bei ungeradem n

I) $$(n+1)^h = 2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1,$$

und bei geradem n

II) $$(n+1)^h - 1 = -\left\{2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1\right\}.$$

Bei ungeradem n tritt also — wenigstens abgesehen von einem Divisor 2^n — in jedem Ω^n der Faktor $n+1$ auf,

bei geradem n ebenso der Faktor n. Berechnet man aus I) und II) die Werte der Ω für $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so erhält man

bei geradem n

$$-2\,\Omega_n^1 = n$$
$$-2\,\Omega_n^2 = n(n+1)$$
$$-4\,\Omega_n^3 = n^2(2n+3)$$
$$-2\,\Omega_n^4 = n(n+1)(n^2+n-1)$$
$$-4\,\Omega_n^5 = n^2(2n^3+5n^2-5)$$
$$-2\,\Omega_n^6 = n(n+1)(n^4+2n^3-2n^2-3n+3),$$

und bei ungeradem n

$$2\,\Omega_n^1 = n+1$$
$$2\,\Omega_n^2 = n(n+1)$$
$$4\,\Omega_n^3 = (n+1)^2(2n-1)$$
$$2\,\Omega_n^4 = n(n+1)(n^2+n-1)$$
$$4\,\Omega_n^5 = (n+1)^2(2n^3+n^2-4n+2)$$
$$2\,\Omega_n^6 = n(n+1)(n^4+2n^3+n^2-2n+9).$$

Aus diesen Angaben erhellt, daß die folgenden Kongruenzen zu vermuten sind.

1) $2\,\Omega_n^h \equiv 0$; mod. n
für $n \equiv 0$; mod. 2 bei jedem h
für $n \equiv 1$; mod. 2 für $h \equiv 0$; mod. 2.

A) 2) $2\,\Omega_n^h \equiv 0$; mod. $n+1$
für $n \equiv 1$ bei jedem h
für $n \equiv 0$ bei $h \equiv 0$; mod. 2.

3) $4\,\Omega_n^h \equiv 0$; mod. n^2 bei $n \equiv 0$, $h \equiv 0$; mod. 2.

4) $4\,\Omega_n^h \equiv 0$; mod. $(n+1)^2$ bei $n \equiv 1$, $h \equiv 1$; mod. 2.

Diese Gesetzmäßigkeit läßt sich indessen nicht durch die wirkliche Ausrechnung oder durch eine an sie angeschlossene vollständige Induktion bestätigen, da sie auf der besonderen Zusammenwirkung der bei den Ω sukzessiv auftretenden Zahlenkoeffizienten beruht. Um sie allgemein nachzuweisen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Setzt man bei geradem n

$$\Omega_n^h = (n-(n-1))^h - (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h - n^h,$$

so ergibt sich die Identität

$$\Omega_n^h = (-1)^{n+1} n^h + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2$$

Ia) $$+ \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h}\Omega_n^h.$$

Bei ungeradem n aber folgt analog

$$\Omega_n^h = 0\cdot n^h + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2$$

Ib) $$+ \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h}\Omega_n^h$$

und man kann Ia) und Ib) mittels des Symbols Ω_0, welches für gerades n gleich -1, für ungerades n gleich Null zu setzen ist, in die folgende Gleichung zusammenfassen:

$$\Omega_n^h(1-(-1)^{n+h}) = n^h\Omega_0 + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1$$

III) $$+ (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1}.$$

Setzt man ferner $n+1=\tau$, so ergibt sich auf dieselbe Weise bei geradem n

$$\Omega_n^h = (-1)^{n+2}\binom{h}{1}\tau^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+3}\binom{h}{2}\tau^{h-2}\Omega_n^2$$

IIa) $$+ \cdots + (-1)^{n+h}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h+1}\Omega_n^h$$

und bei ungeradem n

$$\Omega_n^h = \Omega_0^1\tau^h + (-1)^{n+2}\binom{h}{1}\tau^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+3}\binom{h}{2}\tau^{h-2}\Omega_n^2$$

IIb) $$+ \cdots + (-1)^{n+h}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h+1}\Omega_n^h$$

und die Gleichungen IIa) und IIb) können mittels des Symbols Ω_0^1, welches bei geradem n gleich Null, bei ungeradem n gleich Eins zu setzen ist, zu der folgenden Gleichung vereinigt werden:

$$\Omega_n^h (1 - (-1))^{n+h+1} = \tau^h \Omega_0^1 + (-1)^{n+2} \binom{h}{1} \tau \Omega_n^1 + \cdots$$

IV)
$$+ (-1)^{n+h} \binom{h}{1} \tau \Omega_n^{h-1}.$$

Aus der Gleichung III) folgt bei geradem h und ungeradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } h \equiv 0,\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

und bei ungeradem h und geradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Ebenso folgt aus IV) bei geradem h und geradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 0,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2$$

und endlich bei ungeradem h und ungeradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Diese Kongruenzen lassen sich bei ungeradem h auch direkt erweisen.

1. Es ist nämlich bei geradem $n = 2k$ und ungeradem h

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h$$

in die folgenden Paare zerlegbar

$$\Omega_n^h = ((2k-1)^h + 1^h) - ((2k-2)^h + 2^h) + \cdots$$
$$+ (-1)^k ((2k - (k-1))^h + (k-1)^h) - (k^h (-1)^k + (2k)^h).$$

Da jedes der $k-1$ eingeklammerten Paare den Faktor $2k$ hat, erhält man in der Tat

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } n \equiv 0,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

2. Ist dagegen $n = 2k+1$ und h ungerade, so zerlegt man Ω_n^h in der folgenden Weise

$$\Omega_n^h = ((2k+2-1)^h + 1^h) - ((2k+2-2)^h + 2^h) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} ((2k+2-k)^h + k^h) + (-1)^k (k+1)^h,$$

so daß jetzt

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2 \text{ wird.}$$

Aber diese einfachen Mittel reichen nicht aus, um

a) bei geradem h und geradem n die Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n;$$

b) bei geradem h und ungeradem n die Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1$$

nachzuweisen.

Setzt man bei a)

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h,$$

so ist

$$\Omega_n^h = \Sigma_k^h - 2^h S_k^h$$
$$S_n^h = \Sigma_k^h + 2^h S_k^h.$$

Aus der Gleichung

$$\Omega_n^h + S_n^h = 2\,\Sigma_k^h$$

folgt $\quad 2\cdot(2^h-1)\,\Omega_n^h + 2\,(2^h-1)\,S_n^h = 4\,\Sigma_k^h\,(2^h-1)$

und hieraus ergibt sich nach der § 7, I b) bewiesenen Kongruenz $(2^h-1)\,\Sigma^h \equiv 0$, mod. n für $h \equiv 0$; mod. 2, daß

V) $\quad 2\cdot(2^h-1)\,\Omega_n^h \equiv 0;$ mod. n für $n \equiv 0,\ h \equiv 0;$ mod. 2

sein muß. Der Faktor 2^h-1 aber kann hier fortgelassen werden, da, wie eingangs dieses § bemerkt wurde, bei Ω_n^h nur eine Potenz von 2 in Betracht kommen kann.

Setzt man ähnlich bei b) $n = 2k+1$, so ist

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h + (2k+1)^h,$$

also

$$\Omega_n^h = \Sigma_{k+1}^h - 2^h S_k^h$$
$$S_n^h = \Sigma_{k+1}^h + 2^h S_k^h,$$

oder

$$\Omega_n^h + S_n^h = 2\,\Sigma_{k+1}^h.$$

Hieraus folgt zunächst nach § 7, 5) bei ungeradem h, wo demnach $\Sigma_{k+1}^h \equiv 0$; mod. $k+1$ ist, die bereits vorhin erwiesene Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

dagegen nach Multiplikation mit $2\,(2^h-1)$ bei geradem h

$$2\cdot(2^h-1)\,\Omega_n^h+2\cdot(2^h-1)\,S_n^h=4\,(2^h-1)\,\Sigma_{k+1}^h$$

oder

VI) $\quad 2\,\Omega_n^h\equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } n\equiv 1,\ h\equiv 0;\ \text{mod. } 2.$

Jetzt betrachte man endlich die Gleichung III) bei geradem n und ungeradem h. Dann folgt

$$2\,\Omega_n^h\equiv nh\,\Omega_n^{h-1};\ \text{mod. } n^2.$$

Da aber $h-1$ gerade und n gerade sind, folgt aus der Anwendung von V) auf die rechte Seite

$$4\,\Omega_n^h\equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h\equiv 1,\ n\equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Und ebenso erhält man aus IV) für ungerades h und ungerades n

$$2\,\Omega_n^h\equiv \tau h\,\Omega_n^{h-1};\ \text{mod. } \tau^2.$$

Da jetzt nach VI) auf der rechten Seite $2\,\Omega_n^{h-1}$ bereits den Faktor τ enthält, bleibt

$$4\,\Omega_n^h\equiv 0;\ \text{mod. } \tau^2 \text{ für } n\equiv 1,\ h\equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Hiermit sind aber alle Kongruenzen in der Tabelle A erwiesen.

§ 9.

Die Summen $\Delta_n^h=1-3^h+5^h-\cdots+(2n-1)^h(-1)^{n+1}$.

Es sollen hier endlich noch die Summen Δ_n^h untersucht werden. Dabei wird sich zugleich ergeben, wie die analogen Betrachtungen weiter fortgesetzt werden können.

Wir entwickeln zunächst Gleichungen zur rekurrenten Berechnung der Δ^h.

Setzt man $\sigma_1=2n-1$, so wird

$$(\sigma_1+1)^h+(\sigma_1-1)^h=2\left(\sigma_1^h+\binom{h}{2}\sigma_1^{h-2}+\cdots\right.$$
$$\left.+(1+(-1)^{h-1})\binom{h}{1}\sigma_1+(1+(-1)^h\sigma_1^0)\right).$$

Aus dieser Identität folgt durch geeignete Zusammenfassung mit dem Plus- und Minus-Zeichen für $n=1,2,\ldots$

1) $$2^{h-1} n^h = -\left(\Delta_n^h + \binom{h}{2}\Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{2}\Delta_n^2\right) \text{ für } n \equiv 0,$$
$$h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

2) $$2^{h-1} n^h - 1 = \Delta_n^h + \binom{h}{2}\Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{2}\Delta_n^2 \text{ für } n \equiv 1,$$
$$h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

3) $$2^{h-1} n^h = -\left(\Delta_n^h + \binom{h}{2}\Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{1}\Delta_n^1\right) \text{ für } n \equiv 0,$$
$$h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

4) $$2^{h-1} n^h = \left(\Delta_n^h + \binom{h}{2}\Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{1}\Delta_n^1\right) \text{ für } n \equiv 1,$$
$$h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Diese Gleichungen sind wieder einfacher wie die des § 8, weil das Δ vom höchsten Index sich unmittelbar als ganzzahliger Ausdruck der Δ von niederem Index ergibt.

Die Summen Δ^h stehen mit den Summen Ω^h in einfacher Beziehung. Man hat nämlich für $\sigma = 2n + 1$

$$2^h \Omega_n^h = 2^h - 4^h + 6^h - \cdots (-1)^n (2n-2)^h + (-1)^{n+1} (2n)^h$$
$$= (\sigma - (2n-1))^h - (\sigma - (2n-3))^h + \cdots (-1)^h (\sigma - 3)^h$$
$$+ (-1)^{n+1} (\sigma - 1)^h.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von σ, so erhält man bei geradem n

$$2^h \Omega_n^h = \sigma^h 0 + \binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Delta_n^1 - \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Delta_n^2 + \cdots + (-1)^h\binom{h}{1}\sigma\Delta_n^{h-1}$$
$$\text{I)} \qquad + (-1)^{h+1}\Delta_n^h;\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2;$$

bei ungeradem n

$$2^h \Omega_n^h = \sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Delta_n^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Delta_n^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma\Delta_n^{h-1}$$
$$\text{II)} \qquad + (-1)^n \Delta_n^h;\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Ferner findet man für $\sigma_1 = 2n - 1$ aus

$$\Delta_n^h = (\sigma_1 - 2(n-1))^h - (\sigma_1 - 2(n-2))^h + \cdots - (\sigma_1 - 2)^h + \sigma_1^h$$

bei ungeradem n

$$\Delta_n^h = 2\binom{h}{1}\sigma_1^{h-1}\Omega_n - 2^2\binom{h}{2}\sigma_1^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots + (-1)^h 2^{h-2}\binom{h}{1}\sigma_1\Omega_n^{h-1}$$

III) $+ \cdots + (-1)^{n+1} 2^h \Omega_n^h + (-1)^{h+2};\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2$

und endlich bei geradem n

$$\Delta_n^h = -\sigma_1^h - 2\binom{h}{1}\sigma_1^{h-1}\Omega_n^1 + 2^2\binom{h}{2}\sigma_1^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots$$

IV) $+ (-1)^{h-1} 2^{h-1}\binom{h}{1}\sigma_1\Omega_n^{h-1} + (-1)^n 2^h \Omega_n^h + (-1)^h,$

so daß die Gleichungen IV) die Auflösungen des linearen Systems I), die Gleichungen III) die Auflösungen von II) sind.

Berechnet man aus den Formeln 1, 2, 3, 4 die Δ für die ersten vier Werte von h, so findet man

aus 1) bei geradem h und geradem n

$$-\Delta_n^2 = 2n^2$$
$$-\Delta_n^4 = 4n^2(2n^2 - 3)$$
$$-\Delta_n^6 = n^2(32n^4 - 120n^2 + 150)$$
$$-\Delta_n^8 = 4n^2(32n^6 - 224n^4 + 700n^2 - 847),$$

aus 2) bei geradem h und ungeradem n

$$\Delta_n^2 = 2n^2 - 1$$
$$\Delta_n^4 = 8n^4 - 12n^2 + 5$$
$$\Delta_n^6 = 32n^6 - 120n^4 + 150n^2 - 61$$
$$\Delta_n^8 = 128n^8 - 896n^6 + 2800n^4 - 3016n^2 + 1385,$$

aus 3) bei ungeradem h und geradem n

$$-\Delta_n^1 = n$$
$$-\Delta_n^2 = n(4n^2 - 3)$$
$$-\Delta_n^5 = n(16n^4 - 40n^2 + 25)$$
$$-\Delta_n^7 = n(64n^6 - 336n^4 + 700n^2 - 427),$$

aus 4) endlich bei ungeradem h und ungeradem n dieselben Werte wie bei 3), aber ohne das links stehende Minus-Zeichen. Es ist übrigens unmittelbar zu sehen, daß

$$\Delta_{2k}^{2h} \equiv 0;\ \text{mod.}\ (2k)^2$$
$$\Delta_{2k}^{2k+1} \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2k$$

sein muß. Ohne noch weitere, unmittelbar aus I), II) folgende Kongruenzen anzugeben, sei noch die folgende Eigenschaft der Δ hervorgehoben.

Zieht man die Gleichung bei geradem h

$$2^{h-1} - 1 = 1 + \binom{h}{2} + \binom{h}{4} + \cdots + \binom{h}{2}$$

von der Gleichung 2) ab, so bleibt

$$2^{h-1}(n^h - 1) = (\Delta_n^h - 1) + \binom{h}{2}(\Delta_n^{h-2} - 1) + \cdots + \binom{h}{2}(\Delta_n^2 - 1).$$

Da h gerade ist, hat die linke Seite immer den Teiler $n^2 - 1$. Folglich ist

$$\Delta_n^h - 1 \equiv 0;\ \text{mod.}\ n^2 - 1 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$$

In der Tat ist auch

$$\Delta_n^2 - 1 = 2(n^2 - 1)$$
$$\Delta_n^4 - 1 = 4(n^2 - 1)(2n^2 - 1)$$
$$\Delta_n^6 - 1 = 2(n^2 - 1)(16n^4 - 44n^2 + 31)$$
$$\Delta_n^8 - 1 = 8(n^2 - 1)(16n^6 - 96n^4 + 254n^2 - 173).$$

Zieht man dagegen bei ungeradem h die Gleichung

$$2^{h-1} n = \left(1 + \binom{h}{2} + \binom{h}{4} + \cdots + \binom{h}{1}\right) n$$

von der Gleichung 3) ab, so hat man

$$2^{h-1} n (n^{h-1} - 1) = -\left\{(\Delta_n^h + n) + \binom{h}{2}(\Delta_n^{h-2} + n) + \cdots + \binom{h}{1}(\Delta_n^1 + n)\right\}$$

und hieraus folgt

$$\Delta_n^k + n \equiv 0;\ \text{mod.}\ (n^2 - 1) \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$$

In der Tat ist auch

$$\Delta_n^3 + n = -4n(n^2-1)$$
$$\Delta_n^5 + n = -8n(n^2-1)(2n^2-3)$$
$$\Delta_n^7 + n = -4n(n^2-1)(16n^4-68n^2+107).$$

Eine analoge Kongruenz gilt endlich auch für den Fall $h \equiv 1$, $n \equiv 1$; mod. 2; man hat dann nämlich

$$\Delta_n^h - n \equiv 0, \text{ mod. } (n^2-1).$$

Für $h \equiv 0$, $n \equiv 0$; mod. 2 findet dagegen kein entsprechender Satz statt.