

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Elementar-geometrischer Beweis des Ponceletschen Schliessungssatzes.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Februar 1916.

Der Ponceletsche Schließungssatz¹⁾ ist bekanntlich Ausgangspunkt für eine Reihe von wichtigen Untersuchungen geworden; er hat einerseits wegen seines Zusammenhanges mit dem Additionstheorem und den Teilungsproblemen der elliptischen Funktionen eine große Bedeutung, er ist ferner nach bestimmter Seite hin von den Kegelschnitten auf höhere algebraische Kurven erweitert worden.²⁾ Poncelet selbst war sich der Wichtigkeit seiner Entdeckung wohl bewußt, sonst hätte er nicht die Figur des Satzes, versehen mit der Umschrift „*aut semper aut nunquam*“, zu seinem Siegel erwählt,³⁾ und Chasles nennt in seinem „Rapport sur les progrès de la géométrie“ (1870) unter den Verdiensten Poncelets den Schließungssatz an erster Stelle.

Es mag als ein Wagnis erscheinen, auf einen so bekannten Stoff nochmals zurückzukommen, doch glaubt der Verfasser im Hinblick auf neuere Untersuchungen und Darstellungen dieses Wagnis unternehmen zu dürfen, selbstverständlich ohne

1) J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822), No. 531 (S. 322).

2) Vgl. hierzu *Math. Enc. III, C 1* (F. Dingeldey), Nr. 24 und 26—28 und *II, B 3* (R. Fricke), Nr. 77.

3) Nach E. Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie I* (Leipzig 1901), S. 149.

den Anspruch, grundsätzlich Neues zu bieten. Von den beiden hier wiedergegebenen Beweisen soll vielmehr der erste nur den Formelaufwand möglichst einschränken, der zweite aber den Rahmen allerelementarster Rechnungen nicht überschreiten.

Demgemäß sollen sich die Beweise auch auf den einfachen von Poncelet selbst vorangestellten Fall beziehen, daß es sich um ein Kreisbüschel

$$(1) \quad x^2 + y^2 - r^2 - 2\lambda(x - a) = 0$$

handelt und zwar um ein hyperbolisches, so daß

$$a > r$$

vorausgesetzt wird. Dann lautet der Satz so:

Legt man von einem beliebig gewählten Punkt P_1 des Kreises K ($\lambda = 0$) die Tangente an einen bestimmten Kreis λ_1 ($< r$) des Büschels und bezeichnet ihren zweiten Schnittpunkt mit K durch P_2 , legt man dann von P_2 aus eine weitere Tangente an einen bestimmten Kreis λ_2 ($< r$) des Büschels, welche K zum zweiten Mal in P_3 schneidet, so berührt unabhängig von der Wahl des Ausgangspunktes P_1 , die Sehne $P_3 P_1$ ebenfalls immer einen und denselben Kreis λ_3 des Büschels.

Erster Beweis (Differentialgeometrisch).

Wir betrachten zunächst nur eine Sehne $P_1 P_2$ des Kreises K und suchen die Bedingung dafür aufzustellen, daß sie beständig einen und denselben Kreis (λ_1) des Büschels berührt.

Es sei $P_1 P_2$ eine bestimmte Lage der Berührungssehne und

$$\sphericalangle A O P_1 = \varphi_1, \quad \sphericalangle A O P_2 = \varphi_2,$$

ferner T ihr Berührungspunkt mit dem Kreis (λ_1) und $Q_1 Q_2$ eine benachbarte Berührungssehne, die denselben Kreis λ_1 berührt, wobei

$$\sphericalangle A O Q_1 = \varphi_1 + d\varphi_1, \quad \sphericalangle A O Q_2 = \varphi_2 + d\varphi_2$$

ist. Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden benachbarten

In derselben Weise folgt

$$s_2^2 = 2\lambda_1(a - r \cos \varphi_2),$$

und aus (2) folgt dann

$$(3) \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r \cos \varphi_2}} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Zentriwinkel (φ_1 und φ_2), welche zu den Endpunkten P_1 und P_2 der Sehne gehören, dann und nur dann die Differentialgleichung (3) erfüllen, wenn die Sehne $P_1 P_2$ beständig einen und denselben Kreis λ_1 berührt.

Auf der andern Seite denken wir uns jetzt φ_1 und φ_2 frei veränderlich, dann kann man immer den Parameter (λ_1) desjenigen Kreises bestimmen, der von $P_1 P_2$ berührt wird. Bei dieser Betrachtung wird also λ_1 eine Funktion von φ_1 und φ_2 und $d\lambda_1$ drückt sich linear durch $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ aus; und wenn λ_1 konstant ist, muß hieraus die Gleichung (3) entstehen. Demnach folgt für diesen allgemeinen Fall

$$(3') \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r \cos \varphi_2}} = d\lambda_1 \cdot f(\varphi_1, \varphi_2).$$

Mit dieser einen einfachen Überlegung ist aber der Schließungssatz bewiesen; denn wenn sowohl $P_1 P_2$ beständig denselben Kreis λ_1 wie $P_2 P_3$ denselben Kreis λ_2 berührt, so folgt durch zweimalige Anwendung von (3), daß auch

$$\frac{d\varphi_3}{\sqrt{a - r \cos \varphi_3}} - \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} = 0$$

ist, daß also auch $P_3 P_1$ beständig denselben Kreis (λ_3) berührt.

Zusatz zum ersten Beweis.

Obwohl dies die bisherige Betrachtung nicht erfordert, möge nun doch noch der Vollständigkeit halber die genaue Berechnung von (3') folgen unter Verwendung der Abkürzungen

$$u_1 = a - r \cos \varphi_1, \quad u_2 = a - r \cos \varphi_2.$$

Aus Fig. 1 entnimmt man

$$2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = s_1 + s_2 = \sqrt{2\lambda_1}(\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}) \cdot (\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}) &= u_2 - u_1 = r(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \\ &= 2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \end{aligned}$$

und hieraus folgt in Verbindung mit der ersten Formel für λ_1

$$\sqrt{2\lambda_1} \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}.$$

Aus der ersten Formel für λ_1 folgt

$$\begin{aligned} (\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}) \frac{d\lambda_1}{\sqrt{2\lambda_1}} = \\ r \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(d\varphi_2 - d\varphi_1) - \sqrt{2\lambda_1} \left(\frac{r \sin \varphi_1 d\varphi_1}{2\sqrt{u_1}} + \frac{r \sin \varphi_2 d\varphi_2}{2\sqrt{u_2}} \right). \end{aligned}$$

Setzt man nun rechts den zweiten Wert ein, also

$$\sqrt{2\lambda_1} = \frac{\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

so findet man nach kurzer Rechnung

$$(3'') \quad \frac{d\varphi_2}{\sqrt{u_2}} - \frac{d\varphi_1}{\sqrt{u_1}} = \frac{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}}{r\sqrt{2\lambda_1}} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin \varphi_2 \sqrt{u_1} + \sin \varphi_1 \sqrt{u_2}} \cdot d\lambda_1,$$

womit (3') ergänzt und bestätigt ist. —

Der Umstand, daß

$$\lambda_1 = \text{constans}$$

ein Integral der Differentialgleichung (3) ist, führt bekanntlich nach einer schon von Euler¹⁾ herrührenden, von Legendre aufgenommenen Betrachtung zum Additionssatz der elliptischen Integrale bzw. der elliptischen Funktionen, und zwar gelangt man mit Leichtigkeit gerade zur Legendreschen Normalform.

¹⁾ Vgl. Fricke, a. a. O., Nr. 1, 6 und 77.

Dies soll natürlich hier nicht rechnerisch durchgeführt werden, aber ein Hinweis mag deswegen erlaubt sein, weil die längst gewonnene Erkenntnis, daß das Integral λ_1 eben gerade durch den Schließungssatz gewonnen wird, noch mehrfach in den Darstellungen über Gebühr zurücktritt.

Zweiter Beweis (Elementargeometrisch).¹⁾

Bei diesem zweiten Beweis, der naturgemäß etwas mehr Rechnung erfordert, dafür aber auch die bisher nicht abgeleitete „Schließungsbedingung“ zwischen den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der von den drei Sehnen $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ und $P_3 P_1$ berührten Kreise liefert, bezeichnen wir die Zentriwinkel

$$\sphericalangle AOP_1, \sphericalangle AOP_2, \sphericalangle AOP_3$$

mit $2\varphi_1, 2\varphi_2, 2\varphi_3,$

weil dadurch die Formeln einfacher werden.

Die Radien der berührten Kreise hängen mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zusammen durch die Gleichungen

$$(4) \quad \varrho_i = \sqrt{r^2 - 2a\lambda_i + \lambda_i^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

¹⁾ Der Ponceletsche Beweis, von E. Kötter (a. a. O., S. 150 genau besprochen) macht bekanntlich von der Betrachtung Gebrauch, daß eine Kurve, die von Kegelschnitten eines Büschels in jedem ihrer Punkte berührt wird, notwendig ein bestimmter Kegelschnitt des Büschels sein muß. — R. Sturm (Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, Leipzig 1908, § 31) erhält den Satz aus allgemeineren über cyklische Involutionen. — Vgl. auch K. Rohn (Jahresberichte der Deutschen Math. Ver. 22 (1913), S. 330—340) und Leipz. Ber. 60 (1908), S. 94—131. — J. Steiner (Ges. Werke I, Berlin 1881, S. 159) hat bekanntlich die Beziehungen für Vierecke, Fünfecke usw. bis zu den Achtecken angegeben, welche bestehen, wenn ein solches Vieleck einem Kreis unbeschrieben und zugleich einem andern einbeschrieben ist. Die Vermutung, die auch E. Kötter schon früher ausgesprochen hat (a. a. O., S. 152), daß Steiner den Schließungssatz aus seinem „Kreisreihen-Satz“ (Werke I, S. 43) abgeleitet hat, ist wohl schwer nachzuprüfen. Ein Versuch, durch die Laguerresche Linieninversion in Verbindung mit der Transformation durch reciproke Radien den viel schwierigeren Ponceletschen Satz aus dem Kreisreihen-Satz abzuleiten, hat zu keinem Ergebnis geführt.

außerdem ist im Hinblick auf Fig. 1 und die neu eingeführten Winkelbezeichnungen (2φ an Stelle von φ)

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= r \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \lambda_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \varrho_2 &= r \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \lambda_2 \cos(\varphi_3 + \varphi_2), \\ \varrho_3 &= -r \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \lambda_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_3). \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diejenige Beziehung zwischen λ_1 , λ_2 und λ_3 aufzustellen, vermöge deren die Formeln 4 und 5 für die Winkel eine ganze Wertschar (∞^1 Wertsysteme) liefern. — Eine endliche Anzahl von (imaginären) Wertsystemen für die trigonometrischen Funktionen erhält man selbstverständlich auch dann, wenn die aufzustellende Bedingung nicht erfüllt ist.

Zunächst eliminieren wir φ_2 aus den beiden ersten Gleichungen (5), wobei beständig von (4) und (5) Gebrauch zu machen ist. Das Ergebnis ist bei Anwendung der Abkürzungen

$$(6) \quad \begin{aligned} u &= \cos(\varphi_1 + \varphi_3), \quad v = \cos(\varphi_1 - \varphi_3), \\ g(u, v) &= (r^2 + \lambda_1 \lambda_2) v - r(\lambda_1 + \lambda_2) - \varrho_1 \varrho_2, \\ f_2(u, v) &= r^2(u^2 + v^2 - 1) - 2aruv + a^2 \end{aligned}$$

die Gleichung zweiten Grades

$$(7) \quad F_2(u, v) \equiv (g(u, v))^2 - 4\lambda_1 \lambda_2 f_2(u, v) = 0.$$

Die weitere Untersuchung wird nun zeigen, daß eine einzige Gleichung zwischen den Parametern λ_1 , λ_2 , λ_3 hinreicht, damit jedes Wertsystem u , v , das die dritte Gleichung (5) oder

$$(8) \quad h(u, v) \equiv \lambda_3 \cdot u - r \cdot v - \varrho_3 = 0$$

erfüllt, auch (7) erfüllt.

[Projektivische Begründung. Die Gleichungen (7) und (8) zeigen unmittelbar, wie man nun die weitere Ausführung zu gestalten hat, wenn man sich der Gedankengänge der analytischen projektiven Geometrie bedienen will und u und v als rechtwinklige Koordinaten deutet.

(7) stellt einen Kegelschnitt dar, der den Kegelschnitt

$$f_2(u, v) = 0$$

in den beiden Schnittpunkten mit der Geraden

$$g(u, v) = 0$$

berührt.

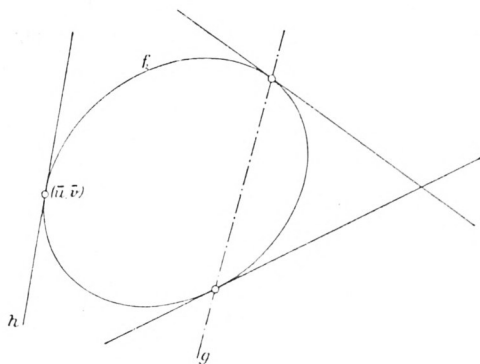


Fig. 2

Soll nun unsere ganze Betrachtung zum Ziel führen, so muß vor allem der Kegelschnitt (7), in dessen Gleichung λ_3 gar nicht vorkommt, von selbst in ein Geradenpaar zerfallen.

Das ist in der Tat der Fall, und man rechnet dies am einfachsten in der Weise nach, daß man zeigt, daß $F_2(u, v) = 0$ den Pol der Geraden $g(u, v) = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ enthält. Dies läßt sich durch kurze Rechnung zeigen, und damit ist dann bewiesen, daß (7) in ein Geradenpaar zerfällt, und zwar in die beiden Tangenten, die von jenem Pol an $f_2(u, v) = 0$ sich legen lassen.

Weiterhin wird verlangt, daß (8) eine der beiden Geraden werden soll, also jedenfalls eine Tangente von $f_2(u, v) = 0$.

Daß dies immer der Fall ist, erkennt man, indem man aus (8) einsetzt

$$rv = \lambda_3 u - Q_3$$

und dann erhält

$$\begin{aligned}
 f_2(u, v) &= r^2(u^2 - 1) + (\lambda_3 u - \varrho_3)^2 - 2a u (\lambda_3 u - \varrho_3) + a^2 \\
 &= u^2(r^2 + \lambda_3 - 2a\lambda_3) + 2u\varrho_3(\lambda_3 - a) + a^2 + \varrho_3^2 - r^2 \\
 &= u^2\varrho_3^2 - 2u\varrho_3(\lambda_3 - a) + \lambda_3^2 - 2a\lambda_3 + a^2 \\
 &= (u\varrho_3 - (\lambda_3 - a))^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Demnach ist (8) in der Tat Tangente und zwar hat der Berührungspunkt die Koordinaten

$$\bar{u} = \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3}, \quad \bar{v} = \frac{\lambda_3 \bar{u} - \varrho_3}{r} = \frac{\lambda_3(\lambda_3 - a) - \varrho_3^2}{r\varrho_3} = \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3}.$$

Jetzt finden wir die „Schließungsbedingung“ leicht: Wenn nämlich $\bar{u}$, $\bar{v}$ einer der beiden Punkte ist, in denen $g(u, v) = 0$ den Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ schneidet, dann ist $h(u, v) = 0$ sicher eine der beiden Tangenten, in die (7) zerfällt (vgl. Fig. 2).

Demnach ergibt sich als einzige Bedingung, daß $g(u, v) = 0$ den Berührungspunkt $(\bar{u}, \bar{v})$ des Geraden $h(u, v) = 0$ mit dem Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ enthält.

Um aber das eigentliche Ziel eines ganz elementaren Beweises zu verfolgen, gehen wir auf die Rechnung nicht ein, die diesen Gedankengang durchführt.]

Die lineare Gleichung (8) kann ersetzt werden durch

$$\begin{aligned}
 (8') \quad u &= \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} + t \cdot r = \bar{u} + t \cdot r, \\
 v &= \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3} + t \cdot \lambda_3 = \bar{v} + t \cdot \lambda_3,
 \end{aligned}$$

wobei t willkürlich bleibt, denn es ist

$$\begin{aligned}
 &\lambda_3(\bar{u} + tr) - r(\bar{v} + t\lambda_3) - \varrho_3 \\
 &= \lambda_3 \cdot \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - r \cdot \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3} - \varrho_3 = \frac{\lambda_3^2 - 2a\lambda_3 + r^2 - \varrho_3^2}{\varrho_3} = 0.
 \end{aligned}$$

Im Anschluß hieran zeigen wir, daß jedes Wertsystem (8') der Gleichung (7) identisch, d. h. für jeden Wert von t erfüllt, sobald

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ ist.}$$

Bevor dieser Nachweis erbracht wird, soll diese Forderung noch genauer berechnet werden. Man erhält zunächst die symmetrisch gebaute Gleichung

$$(9) \quad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + ar^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - r^4 - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \\ = H - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3.$$

Rationalisiert man diese Gleichung, indem man in

$$H^2 - r^2\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2 = 0$$

die Werte (4) der Radien der berührten Kreise einsetzt, so kommt ein Ausdruck, der in r vom sechsten Grade ist und von dem sich überdies der von Null verschiedene Faktor $a^2 - r^2$ abspalten läßt. (9) ist dann ersetzbar durch

$$(9') \quad r^4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1) - 2r^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 \\ + \lambda_3 - 4a) + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 0.$$

Um nun die Wirkung der Bedingung (9) oder (9') zu prüfen, stellen wir zunächst fest, daß

$$g(\bar{u} + tv, \bar{v} + t\lambda_3) = -t(r^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

wird. Außerdem wird

$$f_2(\bar{u} + tr, \bar{v} + t\lambda_3) = At^2 + 2Bt + C \text{ mit}$$

$$A = r^2(r^2 + \lambda_3^2) - 2ar\lambda_3r = r^2\varrho_3^2$$

$$B = r^2(\bar{u}r + v\lambda_3) - ar(\bar{u}\lambda_3 + \bar{v}r)$$

$$= \frac{r}{\varrho_3}(r^2(\lambda_3 - a) + a\lambda_3^2 - r^2\lambda_3 - a(\lambda_3^2 - a\lambda_3 + a\lambda_3 - r^2)) = 0$$

$$C = \bar{u}(r^2\bar{u} - ar\bar{v}) + \bar{v}(-ar\bar{u}) + r^2\bar{v}) - r^2 + a^2$$

$$= \bar{u}\left(r^2\frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - a\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3}\right) + \bar{v}\left(-ar\frac{(\lambda_3 - a)}{\varrho_3}\right)$$

$$+ r\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3} - r^2 + a^2 = \frac{r^2 - a^2}{\varrho_3}(\bar{u}\lambda_3 - vr - \varrho_3) = 0.$$

Demnach wird schließlich

$$\begin{aligned} F_2(\bar{u} + tr, \bar{v} + t\lambda_3) &= t^2(r^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_2t^2r^2\varrho_3^2 \\ &= t^2\{r^4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1) - 2r^2(\lambda_1 + \lambda_2 \\ &\quad + \lambda_3 - 4a) + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, daß jedes beliebige Wertsystem u, v , welches (8) erfüllt, auch (7) erfüllt, sobald die Schließungsbedingung (9) bzw. (9') erfüllt ist.

Zusatz zum zweiten Beweis.

Es mögen noch einige Bemerkungen folgen.

Bei gegebenem λ_1 und λ_2 ist die Schließungsbedingung für λ_3 vom zweiten Grad. Man kann nun noch nachweisen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen ($\lambda_1 < r, \lambda_2 < r$) nur diejenige Wurzel λ_3 in Betracht kommt, die auch kleiner als r ist. Das geht sehr einfach durch die Betrachtung des Grenzfalles, wo die Kreise konzentrisch sind.

Sodann wollen wir den Satz auf den besonderen Fall anwenden, wenn die Sehnen alle denselben Kreis λ berühren. (9') geht dann über in

$$-3r^4 - 2r^2\lambda(3\lambda - 4a) + \lambda^4 = 0$$

oder wegen

$$2a\lambda = r^2 + \lambda^2 - \varrho^2$$

in

$$\lambda^4 - 2r^2\lambda^2 + r^4 - 4r^2\varrho^2 = 0$$

$$\lambda^2 = r^2 \pm 2r\varrho.$$

Von den beiden Werten kommt aber wegen $\lambda < r$ nur der zweite in Betracht, und man erhält die längst bekannte¹⁾ Beziehung, welche zwischen den Radien r und ϱ des unbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks und dem Mittelpunktabstand der Kreise besteht.

Schon Poncelet selbst²⁾ hat aus dem Schließungssatz für Dreiecke den Schließungssatz für Polygone gefolgert, d. h. für

¹⁾ Sie rührt (nach Angabe von M. Cantor) schon von W. Chapple (1746) her.

²⁾ Poncelet, a. a. O., Nr. 534, S. 326.

Sehnen — n — Seite $P_1 P_2 \dots P_n$ eines Kegelschnitts K , dessen Seiten bei der Wanderung von P_1 längs K je einen bestimmten Kegelschnitt eines Büschels berühren, dem auch K angehört. Auch darf darauf hingewiesen werden, daß man selbstverständlich in einzelnen Fällen, z. B. bei der Aufstellung der Beziehung zwischen λ , r und ϱ , vermöge deren sich dem Kreis (r) ein konvexes Sehnenviereck einbeschreiben läßt, dessen Seiten den Kreis (ϱ) berühren, eben auf Grund des Schließungssatzes von einer besonderen Lage ausgehen kann. Übrigens kann gerade für den Fall des Sehnen-Tangentenvierecks noch der Schließungssatz unmittelbar durch trigonometrische Rechnung abgeleitet werden, ein Verfahren, das den Anstoß zu dem hier mitgeteilten Beweis des allgemeinen Schließungssatzes gegeben hat und also dazu geführt hat, den bisher auch in neueren Werken über höhere Elementarmathematik bei Seite gelassenen Satz durch die Art der Begründung da einreihen zu können, wohin er seinem Wesen nach eigentlich gehört.
