Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen.[1])

Von **Otto Szász.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Gegeben sei der Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{|1} + \frac{a_2}{|1} + \frac{a_3}{|1} + \cdots, \tag{1}$$

wo die a_ν beliebige reelle oder komplexe Zahlen mit Einschluß der Null sind. Sei ferner

$$s = \sum_2^\infty{}^\nu |a_\nu| = |a_2| + |a_3| + \cdots$$

konvergent. Bekanntlich konvergiert der Kettenbruch unter der Bedingung:[2]) $\quad s \leqq 1.$

Im folgenden gebe ich einen einfachen Beweis dieses Satzes, wobei sich eine kleine Erweiterung seines Gültigkeitsbereiches

---

[1]) Diese Mitteilung ist ein Teil einer größeren Arbeit, welche als Habilitationsschrift im Mai 1914 der damaligen Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften Frankfurt a. M. vorgelegen hat, jedoch bisher nicht gedruckt wurde.

[2]) Für reelle negative a_ν bewies den Satz schon M. A. Stern in seiner Note: Über die Konvergenz der Kettenbrüche. [Nachrichten etc. Göttingen, 1863, S. 136—143.] Für beliebige a_ν und $s < 1$ zuerst Herr Helge von Koch: Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues [Bull. Soc. Math. de France, t. 23, 1895, p. 33—40], von neuem und auch für den Fall $s = 1$ Herr A. Pringsheim: „Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen

ergibt; es mußte nämlich bisher vorausgesetzt werden, daß für unendlich viele λ $a_\lambda \neq 0$ ist.[1]) Ich konnte diese Einschränkung — soweit als möglich — beseitigen. Ferner leite ich speziell für den Fall lauter reeller nicht-positiver $a_\nu (a_\nu \leqq 0)$ eine Verallgemeinerung dieses Satzes ab.

§ 1.

Die Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) seien:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

bereits Herr von Koch hat bewiesen,[2]) daß dann A_ν und B_ν gegen bestimmte endliche Grenzen konvergieren:

$$\lim_{\nu=\infty} A_\nu = A, \quad \lim_{\nu=\infty} B_\nu = B.$$

Die Konvergenz des Kettenbruches ist daher damit gleichbedeutend, daß B nicht verschwindet.[3])

Nun ist offenbar:

$$B_{\nu+1} - B_\nu = a_{\nu+1} B_{\nu-1} \quad (\nu \geqq 1);$$

setzt man hier statt ν sukzessive $\nu+1$, $\nu+2$, ..., $\nu+\varkappa$ ein und summiert, so folgt:

Gliedern. [Diese Sitzungsber., Bd. 35, 1905, S. 359—380.] Einen allgemeineren Satz bewies ich in meiner Arbeit: Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen [diese Sitzungsber., Jahrg. 1912, S. 323—361], S. 341.

[1]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913, S. 259. Dieses Werk wird im folgenden unter „Perron, Lehrbuch" zitiert.

[2]) A. a. O.; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 315—346. — Herr E. Maillet (Sur les fractions continues algebriques [Journal de l'École Polytechnique, II^e Série, XII^e Cahier, 1908, p. 41—62]; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 346) hat ferner bewiesen, daß A und B nicht gleichzeitig verschwinden können. Ich zeigte dies (a. a. O., S. 331—332) mit Hilfe der Kettenbruchdeterminanten-Darstellung. Daß Herr Maillet dies schon früher (auf anderem Wege) bewiesen hatte, war mir damals leider entgangen.

[3]) Ist $B = 0$, $A \neq 0$, so divergiert der Kettenbruch außerwesentlich.

$$B_{\nu+\varkappa} - B_\nu = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + a_{\nu+2} B_\nu + \cdots + a_{\nu+\varkappa} B_{\nu+\varkappa-2},$$

und wenn man hier zur Grenze für $\varkappa = \infty$ übergeht, erhält man schließlich die Gleichung:

$$B - B_\nu = \sum_1^\infty{}^\lambda a_{\nu+\lambda} B_{\nu+\lambda-2} \qquad (\nu \geqq 1). \tag{2}$$

Nun gibt es offenbar in der abgeschlossenen Menge:

$$|B_0|, \ |B_1|, \ |B_2|, \ \ldots; \ |B|$$

eine größte Zahl; ist $|B|$ selbst dieses Maximum, so ist — wegen $|B_0| = 1 - |B| \geqq 1$ und daher konvergiert der Kettenbruch in diesem Falle. Hat aber $|B|$ einen kleineren Wert, so gibt es ein kleinstes $n\,(n > 1)$, für das die Ungleichheiten bestehen:

$$|B_n| > |B_{n+\varkappa}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Nun folgt aus Gl. (2) für $\nu = n$:

$$|B - B_n| \leqq |B_n| \sum_1^\infty{}^\lambda |a_{n+\lambda}| \tag{4}$$

und damit hier Gleichheit gelte, ist wegen der Ungleichheit (3) notwendig, daß die Gleichungen bestehen:

$$a_{n+3} = 0, \ a_{n+4} = 0, \ a_{n+5} = 0, \ \ldots \tag{5}$$

Ferner folgt aus Ungleichung (4):

$$|B_n| - |B| \leqq |B_n| \sum_1^\infty{}^\lambda |a_{n+\lambda}|$$

und schließlich:

$$|B| \geqq |B_n| \left(1 - \sum_1^\infty{}^\lambda |a_{n+\lambda}|\right) \geqq 0.$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, daß der Kettenbruch für $s < 1$ konvergiert; ist aber $s = 1$, so kann B nur dann verschwinden, wenn die Gleichungen (5) gelten und wenn zugleich

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| = 1$$

ist. Es müssen also, wenn $n > 2$ ist, auch die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_2 = 0, \ \ldots, \ a_n = 0.$$

Für $n = 1$ hat man jetzt offenbar:

$$\left.\begin{array}{lll} B_2 = 1 + a_2, & B_3 = 1 + a_2 + a_3, & B_\nu = B_3 \\ A_2 = a_1, & A_3 = a_1(1 + a_3), & A_\nu = A_3 \end{array}\right\} (\nu = 4, 5, \ldots);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_2 und a_3 reell und nicht positiv sind und $a_2 + a_3 = -1$ ist. Und zwar ist der Kettenbruch für $a_1(1 + a_3) = 0$ wesentlich divergent, sonst außerwesentlich divergent.

Ebenso hat man für $n \geqq 2$:

$$\left.\begin{array}{l} B_2 = 1, \ldots, B_n = 1, \; B_{n+1} = 1 + a_{n+1}, \; B_{n+2} = 1 \\ \qquad\qquad + a_{n+1} + a_{n+2}, \; B_{n+\nu} = B_{n+2} \\ A_2 = a_1, \ldots, A_n = a_1, \; A_{n+1} = a_1(1 + a_{n+1}), \\ \qquad A_{n+2} = a_1(1 + a_{n+1} + a_{n+2}), \; A_{n+\nu} = A_{n+2} \end{array}\right\} (\nu \geqq 3);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_{n+1} und a_{n+2} reell und negativ sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, und zwar ist er dann wesentlich divergent.

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz abgeleitet:

Satz 1. Der Kettenbruch mit beliebigen Elementen $\left[\begin{matrix} a_\nu \\ 1 \end{matrix}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty{}^\nu |a_\nu| \leqq 1$ ist; nur wenn für ein $n (n \geqq 1)$ a_{n+1} und a_{n+2} reelle nicht-positive Zahlen sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, während alle übrigen a_ν verschwinden, wird der Kettenbruch wesentlich divergent, bzw. im Falle $n = 1$, $a_1(1 + a_3) \neq 0$ außerwesentlich divergent.

§ 2.

Speziell für Kettenbrüche mit lauter reellen nicht-positiven Elementen läßt sich der Satz noch etwas erweitern.

Sei also:

$$a_\nu = -r_\nu, \quad r_\nu \geqq 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

sei ferner $r_\nu \leqq 1$ $(\nu \geqq 2)$ und $\sum_2^\infty{}^\nu r_\nu$ konvergent.

Ich setze zur Abkürzung:

$$\pi_0 = 1, \ \pi_1 = 1, \ \pi_2 = 1 - r_2, \ \pi_\nu = (1 - r_2)(1 - r_3) \ldots (1 - r_\nu),$$
$$\lim_{\nu = \infty} \pi_\nu = \pi;$$

$$\sigma_1 = r_2, \ \sigma_2 = r_2 + r_3, \ \sigma_\nu = \sum_1^\nu {}^\lambda r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1}, \quad \lim_{\nu = \infty} \sigma_\nu = \sigma;$$

sei $\sigma \leqq 1$, offenbar ist $\sigma_{\nu-1} \leqq \sigma_\nu \leqq 1$.

Nun beweise ich die Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - \sigma_{\nu-1} \leqq B_\nu \leqq \pi_\nu \\ B_\nu \leqq B_{\nu-1} \end{array}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots); \tag{6}$$

dieselben sind offenbar für $\nu = 2, 3$ gültig. Ich nehme an, daß sie für $\nu = \varkappa - 1$, $\varkappa \, (\varkappa \geqq 3)$ bereits bewiesen sind, und zeige, daß sie dann auch für $\nu = \varkappa + 1$ gelten. In der Tat, aus der Rekursionsformel:

$$B_{\varkappa+1} = B_\varkappa - r_{\varkappa+1} B_{\varkappa-1}$$

folgt zunächst die Ungleichung:

$$B_{\varkappa+1} \leqq B_\varkappa,$$

ferner nach Voraussetzung:

$$B_{\varkappa+1} \leqq B_\varkappa (1 - r_{\varkappa+1}) \leqq \pi_\varkappa (1 - r_{\varkappa+1}) = \pi_{\varkappa+1},$$

und schließlich:

$$B_{\varkappa+1} \geqq 1 - \sigma_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+1} \pi_{\varkappa-1} = 1 - \sigma_\varkappa;$$

somit sind die Ungleichungen (6) allgemein gültig. Hieraus folgt:

$$1 - \sigma \leqq B \leqq \pi,$$

ist also $\sigma < 1$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $\sigma = 1$, dann betrachte ich zwei Fälle gesondert:

1. Es gibt unter den $r_\nu \, (\nu \geqq 2)$ wenigstens eines mit dem Werte 1; sei nun n der kleinste Index, für den $r_n = 1$ ist.

Für $n = 2$ hat man:

$$r_2 = 1, \ \sigma_1 = \sigma_2 = 1;$$

hieraus folgt: $r_3 = 0$; jetzt ist: $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, ..., daher divergiert der Kettenbruch.

Für $n \geqq 3$ hat man:

$$r = 1, \; \sigma_n = \sum_1^n \lambda\, r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} = \sigma_{n+1} = \cdots = \sigma;$$

daher ist (wegen $\pi_{\lambda-1} \geqq \pi_\lambda$):

$$\sigma \geqq \sum_1^n \lambda\, r_{\lambda+1} \pi_\lambda = \pi_{n-1} + r_{n-1} \pi_{n-2} + \cdots + r_2 \pi_1 \tag{7}$$

und Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Gleichungen bestehen:

$$r_{\lambda+1} \pi_\lambda = r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Für $\lambda = 1$ ist diese Gleichung eine Identität; für $\lambda = 2$, ..., n ist für das Bestehen der Gleichung (8) notwendig und hinreichend, daß mindestens eine der beiden Zahlen: r_λ, $r_{\lambda+1}$ verschwindet. Daher kann Gleichung (8) durch die folgende ersetzt werden:

$$r_\lambda r_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Jetzt beweise ich noch die Identität:

$$\pi_\nu + \sum_1^{\nu-1} \lambda\, r_{\lambda+1} \pi_\lambda = \pi_\nu + r_\nu \pi_{\nu-1} + \cdots + r_2 \pi_1 = D_\nu = 1 \quad (\nu \geqq 2); \tag{10}$$

bezeichnet man nämlich diese Summe vorübergehend mit D_ν, so ist offenbar

$$D_\nu = (1 - r_\nu) \pi_{\nu-1} + r_\nu \pi_{\nu-1} + \cdots + r_2 \pi_1 = D_{\nu-1},$$

und da $D_2 = 1$ ist, so gilt Gleichung (10) allgemein.

Somit lautet Ungleichung (7):

$$\sigma \geqq 1,$$

und Gleichheit gilt hier allemal dann, wenn die Bedingung (9) erfüllt ist; insbesondere muß — da $r_n = 1$ ist — $r_{n-1} = 0$ und $r_{n+1} = 0$ sein.

Jetzt ist:

$$B_{n-1} = B_{n-2}, \; B_n = 0, \; B_{n+1} = 0, \; \ldots,$$

also divergiert der Kettenbruch.

2. Sei durchwegs $r_\nu < 1$ ($\nu \geqq 2$), dann ist sicherlich:

$$\pi_\nu > 0,\ \pi > 0.$$

Ist nun $B = \pi$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $B < \pi$; dann gibt es ein kleinstes $\varkappa$ ($\varkappa \geqq 2$, da $B_2 = \pi_2$) derart, daß (vgl. Ungl. (6)):

$$B_\nu < \pi_\nu \text{ für } \nu = \varkappa + 1,\ \varkappa + 2, \ldots \tag{11}$$

und

$$B_\varkappa = \pi_\varkappa \tag{12}$$

ist. Nun folgt aus Gl. (2), wenn man darin $\nu = \varkappa + 1$ setzt:

$$B = B_{\varkappa+1} - \sum_1^\infty{}^\lambda r_{\varkappa+\lambda+1} B_{\varkappa+\lambda-1},$$

daher ist (vgl. Ungl. 6):

$$B \geqq 1 - \sigma_\varkappa - \sum_{\varkappa+1}^\infty{}^\lambda r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} = 1 - \sigma,$$

und mit Anwendung der Ungleichung (11) und Gleichung (12) folgt, daß hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn:

$$B_{\varkappa+1} = 1 - \sigma_\varkappa \text{ und } r_\nu = 0 \text{ für } \nu = \varkappa + 3,\ \varkappa + 4, \ldots$$

ist. Damit nun $B_{\varkappa+1} = 1 - \sigma_\varkappa$ sei, muß auch $B_\varkappa = 1 - \sigma_{\varkappa-1}$ sein (vgl. S. 285), und die Hinzuziehung der Gleichung (12) liefert die Bedingung:

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa = 1.$$

Nun ist, mit Beachtung der Ungleichung $\pi_{\nu-1} \geqq \pi_\nu$:

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa = r_2\pi_0 + \cdots + r_\varkappa \pi_{\varkappa-2} + \pi_\varkappa \geqq r_2\pi_1 + \cdots + r_\varkappa \pi_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa,$$

also mit Rücksicht auf (10):

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa \geqq 1,$$

und Gleichheit gilt hier dann und nur dann, wenn $\varkappa = 2$ oder

$$r_2 r_3 = 0,\ \ldots,\ r_{\varkappa-1} r_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa \geqq 3) \tag{13}$$

ist (vgl. die Formeln (7)—(9)). Unter diesen Bedingungen ist offenbar auch

$$\sigma_{\lambda-1} + \pi_\lambda = 1 \text{ für } \lambda = 2, \ldots, \varkappa,$$

da jetzt keine neuen Bedingungen zu den Gleichungen (13) hinzutreten müssen. Und nun ist tatsächlich:

$$\begin{aligned} B_2 &= 1 - \sigma_1 = \pi_2, \; B_3 = 1 - \sigma_2 = \pi_3, \; \ldots \\ B_\varkappa &= 1 - \sigma_{\varkappa-2} - r_\varkappa \pi_{\varkappa-2} = 1 - \sigma_{\varkappa-1} = \pi_\varkappa, \\ B_{\varkappa+1} &= 1 - \sigma_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+1}\pi_{\varkappa-1} = 1 - \sigma_\varkappa. \end{aligned}$$

Für $\varkappa = 2$ fällt Bedingung (13) fort.

Damit nun $B = 0$ sei, muß nach dem vorhergehenden

$$1 - \sigma_\varkappa - r_{\varkappa+2}\pi_\varkappa = 0$$

sein. Dies heißt aber:

$$\pi_\varkappa - r_{\varkappa+1}\pi_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+2}\pi_\varkappa = 0$$

oder, nach Division mit $\pi_{\varkappa-1}$ (es ist $\pi_{\varkappa-1} > 0$):

$$1 - r_\varkappa - r_{\varkappa+1} - r_{\varkappa+2} + r_\varkappa r_{\varkappa+2} = 0.$$

Diese Resultate fasse ich in folgenden Satz zusammen:

Satz 2. Der Kettenbruch mit reellen nicht-positiven Elementen $\left[\frac{-r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty{}^\nu r_\nu$ konvergiert, und

$$\begin{aligned} r_2 + r_3 + \sum_3^\infty{}^\lambda r_{\lambda+1}(1-r_2)(1-r_3)\ldots(1-r_{\lambda-1}) &\leqq 1, \\ r_\nu \leqq 1 \quad (\nu \geqq 2) \end{aligned} \tag{14}$$

ist; nur in den folgenden drei Fällen:

1. $r_2 = 1, \; r_3 = 0$
2. $r_\lambda r_{\lambda+1} = 0$ für $\lambda = 2, \ldots, n, \; r_n = 1 \quad (n \geqq 3)$
3. $\left.\begin{aligned} &r_{\lambda-1} r_\lambda = 0 \text{ für } \lambda = 3, \ldots, n; \; r_\lambda = 0 \text{ für } \lambda \geqq n+3, \\ &r_n + r_{n+1} + r_{n+2} - r_n r_{n+2} = 1 \end{aligned}\right\} (n \geqq 2)$

divergiert der Kettenbruch.

Für $n = 2$ fällt im Falle 3) die Bedingung $r_{\lambda-1} r_\lambda = 0$ fort.

Da $\pi_{\lambda-1} \leqq 1 - r_2$ $(\lambda \geqq 3)$ ist, so ist offenbar Ungl. (14) sicher erfüllt, wenn

$$r_2 + r_3 + (1 - r_2)\sum_3^\infty{}^\lambda r_{\lambda+1} \leqq 1, \; r_\nu \leqq 1 \; (\nu \geqq 2) \text{ ist.}$$