

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II

Mal- bis Julisitzung

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen.¹⁾

Von Otto Szász.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Gegeben sei der Kettenbruch:

$$\left[\begin{matrix} a_r \\ 1 \end{matrix} \right]_1^\infty = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{1} + \cdots, \quad (1)$$

wo die a_r beliebige reelle oder komplexe Zahlen mit Einschluß der Null sind. Sei ferner

$$s = \sum_{r=2}^s |a_r| = |a_2| + |a_3| + \cdots$$

konvergent. Bekanntlich konvergiert der Kettenbruch unter der Bedingung:²⁾ $s \leq 1$.

Im folgenden gebe ich einen einfachen Beweis dieses Satzes, wobei sich eine kleine Erweiterung seines Gültigkeitsbereiches

¹⁾ Diese Mitteilung ist ein Teil einer größeren Arbeit, welche als Habilitationsschrift im Mai 1914 der damaligen Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften Frankfurt a. M. vorgelegen hat, jedoch bisher nicht gedruckt wurde.

²⁾ Für reelle negative a_r bewies den Satz schon M. A. Stern in seiner Note: Über die Konvergenz der Kettenbrüche. [Nachrichten etc. Göttingen, 1863, S. 136–143.] Für beliebige a_r und $s < 1$ zuerst Herr Helge von Koch: Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues [Bull. Soc. Math. de France, t. 23, 1895, p. 33–40], von neuem und auch für den Fall $s = 1$ Herr A. Pringsheim: „Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen

ergibt; es mußte nämlich bisher vorausgesetzt werden, daß für unendlich viele λ $a_\lambda \neq 0$ ist.¹⁾ Ich konnte diese Einschränkung — soweit als möglich — beseitigen. Ferner leite ich speziell für den Fall lauter reeller nicht-positiver a_r ($a_r \leq 0$) eine Verallgemeinerung dieses Satzes ab.

§ 1.

Die Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) seien:

$$\frac{A_r}{B_r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots);$$

bereits Herr von Koch hat bewiesen,²⁾ daß dann A_r und B_r gegen bestimmte endliche Grenzen konvergieren:

$$\lim_{r=\infty} A_r = A, \quad \lim_{r=\infty} B_r = B.$$

Die Konvergenz des Kettenbruches ist daher damit gleichbedeutend, daß B nicht verschwindet.³⁾

Nun ist offenbar:

$$B_{r+1} - B_r = a_{r+1} B_{r-1} \quad (r \geq 1);$$

setzt man hier statt r sukzessive $r+1$, $r+2$, ..., $r+z$ ein und summiert, so folgt:

Gliedern. [Diese Sitzungsber., Bd. 35, 1905, S. 359–380.] Einen allgemeineren Satz bewies ich in meiner Arbeit: Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen [diese Sitzungsber., Jahrg. 1912, S. 323–361], S. 341.

¹⁾ Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913, S. 259. Dieses Werk wird im folgenden unter „Perron, Lehrbuch“ zitiert.

²⁾ A. a. O.; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 315–346. — Herr E. Maillet (Sur les fractions continues algebriques [Journal de l'École Polytechnique, II^e Série, XII^e Cahier, 1908, p. 41–62]; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 346) hat ferner bewiesen, daß A und B nicht gleichzeitig verschwinden können. Ich zeigte dies (a. a. O., S. 331–332) mit Hilfe der Kettenbruchdeterminanten-Darstellung. Daß Herr Maillet dies schon früher (auf anderem Wege) bewiesen hatte, war mir damals leider entgangen.

³⁾ Ist $B = 0$, $A \neq 0$, so divergiert der Kettenbruch außerwesentlich.

$$B_{r+\kappa} - B_r = a_{r+1} B_{r-1} + a_{r+2} B_r + \cdots + a_{r+\kappa} B_{r+\kappa-2},$$

und wenn man hier zur Grenze für $\kappa = \infty$ übergeht, erhält man schließlich die Gleichung:

$$B - B_r = \sum_1^{\infty} a_{r+\lambda} B_{r+\lambda-2} \quad (r \geq 1). \quad (2)$$

Nun gibt es offenbar in der abgeschlossenen Menge:

$$|B_0|, |B_1|, |B_2|, \dots; |B|$$

eine größte Zahl; ist $|B|$ selbst dieses Maximum, so ist — wegen $|B_0| = 1 - |B| \geq 1$ und daher konvergiert der Kettenbruch in diesem Falle. Hat aber $|B|$ einen kleineren Wert, so gibt es ein kleinstes n ($n > 1$), für das die Ungleichheiten bestehen:

$$|B_n| > |B_{n+\kappa}| \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Nun folgt aus Gl. (2) für $r = n$:

$$|B - B_n| < |B_n| \sum_1^{\infty} |a_{n+\lambda}| \quad (4)$$

und damit hier Gleichheit gelte, ist wegen der Ungleichheit (3) notwendig, daß die Gleichungen bestehen:

$$a_{n+3} = 0, a_{n+4} = 0, a_{n+5} = 0, \dots \quad (5)$$

Ferner folgt aus Ungleichung (4):

$$|B_n| - |B| \leq |B_n| \sum_1^{\infty} |a_{n+\lambda}|$$

und schließlich:

$$|B| \geq |B_n| \left(1 - \sum_1^{\infty} |a_{n+\lambda}| \right) \geq 0.$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, daß der Kettenbruch für $s < 1$ konvergiert; ist aber $s = 1$, so kann B nur dann verschwinden, wenn die Gleichungen (5) gelten und wenn zugleich

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| = 1$$

ist. Es müssen also, wenn $n \geq 2$ ist, auch die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_2 = 0, \dots, a_n = 0.$$

Für $n = 1$ hat man jetzt offenbar:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 1 + a_2, \quad B_3 = 1 + a_2 + a_3, \quad B_v = B_3 \\ A_2 &= a_1, \quad A_3 = a_1(1 + a_3), \quad A_v = A_3 \end{aligned} \right\} (v = 4, 5, \dots);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_2 und a_3 reell und nicht positiv sind und $a_2 + a_3 = -1$ ist. Und zwar ist der Kettenbruch für $a_1(1 + a_3) = 0$ wesentlich divergent, sonst außerwesentlich divergent.

Ebenso hat man für $n \geq 2$:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 1, \dots, B_n = 1, \quad B_{n+1} = 1 + a_{n+1}, \quad B_{n+2} = 1 \\ &\quad + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad B_{n+v} = B_{n+2} \\ A_2 &= a_1, \dots, A_n = a_1, \quad A_{n+1} = a_1(1 + a_{n+1}), \\ &\quad A_{n+2} = a_1(1 + a_{n+1} + a_{n+2}), \quad A_{n+v} = A_{n+2} \end{aligned} \right\} (v \geq 3);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_{n+1} und a_{n+2} reell und negativ sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, und zwar ist er dann wesentlich divergent.

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz abgeleitet:

Satz 1. Der Kettenbruch mit beliebigen Elementen $\left[\begin{smallmatrix} a_v \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty |a_v| \leq 1$ ist; nur wenn für ein $n (n \geq 1)$ a_{n+1} und a_{n+2} reelle nicht-positive Zahlen sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, während alle übrigen a_v verschwinden, wird der Kettenbruch wesentlich divergent, bzw. im Falle $n = 1$, $a_1(1 + a_3) \neq 0$ außerwesentlich divergent.

§ 2.

Speziell für Kettenbrüche mit lauter reellen nicht-positiven Elementen läßt sich der Satz noch etwas erweitern.

Sei also:

$$a_v = -r_v, \quad r_v \geq 0 \quad (v = 2, 3, \dots);$$

sei ferner $r_v \leq 1$ ($v \geq 2$) und $\sum_2^\infty r_v$ konvergent.

Ich setze zur Abkürzung:

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_1 = 1, \quad \pi_2 = 1 - r_2, \quad \pi_r = (1 - r_2)(1 - r_3) \dots (1 - r_r),$$

$$\lim_{r=\infty} \pi_r = \pi;$$

$$\sigma_1 = r_2, \quad \sigma_2 = r_2 + r_3, \quad \sigma_r = \sum_1^r r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1}, \quad \lim_{r=\infty} \sigma_r = \sigma;$$

sei $\sigma \leq 1$, offenbar ist $\sigma_{r-1} \leq \sigma_r \leq 1$.

Nun beweise ich die Ungleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \sigma_{r-1} \leq B_r \leq \pi_r \\ B_r \leq B_{r-1} \end{array} \right\} (r = 2, 3, \dots); \quad (6)$$

dieselben sind offenbar für $r = 2, 3$ gültig. Ich nehme an, daß sie für $r = \kappa - 1$, $\kappa (\kappa \geq 3)$ bereits bewiesen sind, und zeige, daß sie dann auch für $r = \kappa + 1$ gelten. In der Tat, aus der Rekursionsformel:

$$B_{\kappa+1} = B_{\kappa} - r_{\kappa+1} B_{\kappa-1}$$

folgt zunächst die Ungleichung:

$$B_{\kappa+1} \leq B_{\kappa},$$

ferner nach Voraussetzung:

$$B_{\kappa+1} \leq B_{\kappa}(1 - r_{\kappa+1}) \leq \pi_{\kappa}(1 - r_{\kappa+1}) = \pi_{\kappa+1},$$

und schließlich:

$$B_{\kappa+1} \geq 1 - \sigma_{\kappa-1} - r_{\kappa+1} \pi_{\kappa-1} = 1 - \sigma_{\kappa};$$

somit sind die Ungleichungen (6) allgemein gültig. Hieraus folgt:

$$1 - \sigma \leq B \leq \pi,$$

ist also $\sigma < 1$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $\sigma = 1$, dann betrachte ich zwei Fälle gesondert:

1. Es gibt unter den r_r ($r \geq 2$) wenigstens eines mit dem Werte 1; sei nun n der kleinste Index, für den $r_n = 1$ ist.

Für $n = 2$ hat man:

$$r_2 = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1;$$

hieraus folgt: $r_3 = 0$; jetzt ist: $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, . . . , daher divergiert der Kettenbruch.

Für $n \geq 3$ hat man:

$$r = 1, \sigma_n = \sum_1^n r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} = \sigma_{n+1} = \dots = \sigma;$$

daher ist (wegen $\pi_{\lambda-1} \geq \pi_\lambda$):

$$\sigma \geq \sum_1^n r_{\lambda+1} \pi_\lambda = \pi_{n-1} + r_{n-1} \pi_{n-2} + \dots + r_2 \pi_1 \quad (7)$$

und Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Gleichungen bestehen:

$$r_{\lambda+1} \pi_\lambda = r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Für $\lambda = 1$ ist diese Gleichung eine Identität; für $\lambda = 2$, . . . , n ist für das Bestehen der Gleichung (8) notwendig und hinreichend, daß mindestens eine der beiden Zahlen: r_λ , $r_{\lambda+1}$ verschwindet. Daher kann Gleichung (8) durch die folgende ersetzt werden:

$$r_\lambda r_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 2, \dots, n). \quad (9)$$

Jetzt beweise ich noch die Identität:

$$\pi_\nu + \sum_1^{\nu-1} r_{\lambda+1} \pi_\lambda = \pi_\nu + r_\nu \pi_{\nu-1} + \dots + r_2 \pi_1 = D_\nu = 1 \quad (\nu \geq 2); \quad (10)$$

bezeichnet man nämlich diese Summe vorübergehend mit D_ν , so ist offenbar

$$D_\nu = (1 - r_\nu) \pi_{\nu-1} + r_\nu \pi_{\nu-1} + \dots + r_2 \pi_1 = D_{\nu-1},$$

und da $D_2 = 1$ ist, so gilt Gleichung (10) allgemein.

Somit lautet Ungleichung (7):

$$\sigma \geq 1,$$

und Gleichheit gilt hier allemal dann, wenn die Bedingung (9) erfüllt ist; insbesondere muß — da $r_n = 1$ ist — $r_{n-1} = 0$ und $r_{n+1} = 0$ sein.

Jetzt ist:

$$B_{n-1} = B_{n-2}, B_n = 0, B_{n+1} = 0, \dots$$

also divergiert der Kettenbruch.

2. Sei durchwegs $r_\nu < 1$ ($\nu \geq 2$), dann ist sicherlich:

$$\pi_\nu > 0, \pi > 0.$$

Ist nun $B = \pi$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $B < \pi$; dann gibt es ein kleinstes κ ($\kappa \geq 2$, da $B_2 = \pi_2$) derart, daß (vgl. Ungl. (6)):

$$B_\nu < \pi_\nu \text{ für } \nu = \kappa + 1, \kappa + 2, \dots \quad (11)$$

und

$$B_\kappa = \pi_\kappa \quad (12)$$

ist. Nun folgt aus Gl. (2), wenn man darin $\nu = \kappa + 1$ setzt:

$$B = B_{\kappa+1} - \sum_1^\infty r_{\kappa+l+1} B_{\kappa+l-1},$$

daher ist (vgl. Ungl. 6):

$$B \geq 1 - \sigma_\kappa - \sum_{\kappa+1}^\infty r_{\kappa+1} \pi_{\kappa-1} = 1 - \sigma,$$

und mit Anwendung der Ungleichung (11) und Gleichung (12) folgt, daß hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn:

$$B_{\kappa+1} = 1 - \sigma_\kappa \text{ und } r_\nu = 0 \text{ für } \nu = \kappa + 3, \kappa + 4, \dots$$

ist. Damit nun $B_{\kappa+1} = 1 - \sigma_\kappa$ sei, muß auch $B_\kappa = 1 - \sigma_{\kappa-1}$ sein (vgl. S. 285), und die Hinzuziehung der Gleichung (12) liefert die Bedingung:

$$\sigma_{\kappa-1} + \pi_\kappa = 1.$$

Nun ist, mit Beachtung der Ungleichung $\pi_{\nu-1} \geq \pi_\nu$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\kappa-1} + \pi_\kappa &= r_2 \pi_0 + \dots + r_\kappa \pi_{\kappa-2} + \pi_\kappa \geq r_2 \pi_1 \\ &+ \dots + r_\kappa \pi_{\kappa-1} + \pi_\kappa, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (10):

$$\sigma_{\kappa-1} + \pi_\kappa \geq 1,$$

und Gleichheit gilt hier dann und nur dann, wenn $\kappa = 2$ oder

$$r_2 r_3 = 0, \dots, r_{\kappa-1} r_\kappa = 0 \quad (\kappa \geq 3) \quad (13)$$

ist (vgl. die Formeln (7)–(9)). Unter diesen Bedingungen ist offenbar auch

$$\sigma_{\lambda-1} + \pi_\lambda = 1 \text{ für } \lambda = 2, \dots, \kappa,$$

da jetzt keine neuen Bedingungen zu den Gleichungen (13) hinzutreten müssen. Und nun ist tatsächlich:

$$\begin{aligned} B_2 &= 1 - \sigma_1 = \pi_2, \quad B_3 = 1 - \sigma_2 = \pi_3, \quad \dots \\ B_n &= 1 - \sigma_{n-2} - r_n \pi_{n-2} = 1 - \sigma_{n-1} = \pi_n, \\ B_{n+1} &= 1 - \sigma_{n-1} - r_{n+1} \pi_{n-1} = 1 - \sigma_n. \end{aligned}$$

Für $n = 2$ fällt Bedingung (13) fort.

Damit nun $B = 0$ sei, muß nach dem vorhergehenden

$$1 - \sigma_n - r_{n+2} \pi_n = 0$$

sein. Dies heißt aber:

$$\pi_n - r_{n+1} \pi_{n-1} - r_{n+2} \pi_n = 0$$

oder, nach Division mit π_{n-1} (es ist $\pi_{n-1} > 0$):

$$1 - r_n - r_{n+1} - r_{n+2} + r_n r_{n+2} = 0.$$

Diese Resultate fasse ich in folgenden Satz zusammen:

Satz 2. Der Kettenbruch mit reellen nicht-positiven Elementen $\left[\frac{-r_v}{1} \right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty r_v$ konvergiert, und

$$r_2 + r_3 + \sum_3^\infty r_{\lambda+1} (1 - r_2) (1 - r_3) \dots (1 - r_{\lambda-1}) \leq 1, \quad (14)$$

$$r_v \leq 1 \quad (v \geq 2)$$

ist; nur in den folgenden drei Fällen:

1. $r_2 = 1, r_3 = 0$
 2. $r_\lambda r_{\lambda+1} = 0$ für $\lambda = 2, \dots, n, r_n = 1 \quad (n \geq 3)$
 3. $r_{\lambda-1} r_\lambda = 0$ für $\lambda = 3, \dots, n; r_\lambda = 0$ für $\lambda \geq n+3, \left. \vphantom{\sum_3^\infty} \right\} (n \geq 2)$
- $$r_n + r_{n+1} + r_{n+2} - r_n r_{n+2} = 1$$

divergiert der Kettenbruch.

Für $n = 2$ fällt im Falle 3) die Bedingung $r_{\lambda-1} r_\lambda = 0$ fort.

Da $\pi_{\lambda-1} \leq 1 - r_2 \quad (\lambda \geq 3)$ ist, so ist offenbar Ungl. (14) sicher erfüllt, wenn

$$r_2 + r_3 + (1 - r_2) \sum_3^\infty r_{\lambda+1} \leq 1, \quad r_v \leq 1 \quad (v \geq 2) \text{ ist.}$$