Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Bei der Abfassung des Nachtrages[1]) zu meiner Mitteilung: „Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte etc."[2]) war es mir entgangen, daß Herr E. Landau in einer umfangreichen Abhandlung: „Über die Bedeutung einiger neuer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer"[3]), die am Schlusse jenes Nachtrages von mir erwähnten Hardyschen Sätze unter gleichzeitiger Erweiterung ihrer Voraussetzung aufs neue bewiesen hat. An die Stelle der Hardyschen Voraussetzung:

$$\text{(I)} \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \, |n a_n| < +\infty$$

tritt dabei, unter der (prinzipiell unwesentlichen) Beschränkung auf reelle a_n die folgende[4]):

$$\text{(II a)} \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} \, n a_n > -\infty,$$

d. h. die Zahlen $n a_n$ werden nicht, wie bei Hardy als schlechthin beschränkt, sondern lediglich als nach unten be-

---

1) Diese Berichte, Jahrg. 1918, S. 89.

2) Ebendas., Jahrg. 1916, S. 209.

3) Warschauer Berichte, 1910, S. 97—177.

4) A. a. O., S. 99. Die in Frage kommenden Sätze sind die in der Landauschen Arbeit mit Satz III (S. 107) und Satz IV (S. 109) bezeichneten, deren zweiter den ersten als speziellen Fall enthält. Herr Landau gibt für diesen Satz IV zwei Beweise. Bei dem zweiten wird Satz III als schon bewiesen vorausgesetzt, während der erste dieses Hilfsmittel nicht in Anspruch nimmt.

schränkt vorausgesetzt. Da es sich in dem vorliegenden Zusammenhange um die Konvergenz der Reihe Σa_n handelt und diese stets gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma(-a_n)$ konvergiert oder divergiert, so würde es freistehen, die Zahlen a_n von vornherein durch die $(-a_n)$ und demgemäß die Bedingung (IIa) durch die folgende:

$$\varliminf_{n \to \infty} (-n a_n) > -\infty,$$

anders geschrieben:

$$\text{(IIb)} \qquad \varlimsup_{n \to \infty} n a_n < +\infty,$$

zu ersetzen, so daß es zweckmäßig erscheinen dürfte, die fragliche Bedingung etwas allgemeiner so zu fassen: es wird nur verlangt, daß die Zahlen $n a_n$ (zum mindesten) einseitig beschränkt sind.

Der Hardysche Beweis für den in Frage kommenden Hauptsatz, daß nämlich unter der Voraussetzung (I) die Reduzibilität der Reihe Σa_n stets deren Konvergenz nach sich zieht, beruht auf der Benützung der Cesàroschen Grenzwerte und zwar, wie es scheint und am Schlusse des oben erwähnten Nachtrags von mir ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wesentlich, daß es schwerlich gelingen dürfte, sie in diesem Zusammenhange durch die gewisse formale Vorzüge besitzenden[1]) Hölderschen Mittelbildungen zu ersetzen. Dagegen operiert Herr Landau bei seinen zwei Beweisen für den (durch Beschränkung auf die Forderung (II a) erweiterten) Satz ausschließlich mit den Hölderschen Grenzwerten. Doch scheinen mir die hierdurch ermöglichten Vorteile nicht genügend ausgenützt worden zu sein, um den betreffenden Beweisen den erreichbaren Grad von Einfachheit zu verleihen. Bei der Merkwürdigkeit und unbestreitbaren Nützlichkeit des fraglichen Satzes hielt ich es daher nicht für überflüssig, im folgenden eine Beweisanordnung mitzuteilen, die, mit Beibehaltung gewisser nach Angabe des Herrn Landau von den Herren de la Vallée Poussin und H. Bohr herrührender Grundgedanken, zum guten

---

[1]) Vgl. a. a. O. (Jahrg. 1918), S. 90.

Teil vermöge der größeren Zweckmäßigkeit der von mir benützten, übrigens der bisher üblichen Sprache der Analysis sich ohne weiteres anpassenden Bezeichnungen an Durchsichtigkeit und Kürze kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte. Ich knüpfe schließlich daran einige Bemerkungen zur Beantwortung der Frage, ob der Satz mit der erweiterten Voraussetzung (IIa) bzw. (IIb) in einem noch näher zu präzisierenden Sinne eine größere Tragweite besitzt, als mit der ursprünglichen Hardyschen Voraussetzung (I), und zeige, daß diese Entscheidung in bejahendem Sinne ausfällt.

Die iterierten Mittelwerte für die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu$ werden definiert[1]) durch die Rekursionsformel ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(1)\qquad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) = \frac{1}{\nu+1}\left\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_0) + \mathfrak{M}_\varkappa(s_1) + \cdots + \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu)\right\}$$

mit der Anfangsgleichung:

$$(1_0)\qquad \mathfrak{M}_0(s_\nu) = s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu .$$

Aus (1) folgt umgekehrt, daß (für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) &= (\nu+1)\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \nu\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1}) \\ &= \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \nu\left\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\right\}. \end{aligned}$$

Andererseits gewinnt man aus der unmittelbar ersichtlichen Beziehung:

$$s_\nu = \mathfrak{M}_1(s_\nu) + \mathfrak{M}_1(\nu\, a_\nu)$$

durch $\varkappa$-malige Mittelwertbildung die folgende[2]):

$$(3)\qquad \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) = \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu\, a_\nu),$$

deren Vergleichung mit (2) ergibt, daß:

$$(4)\qquad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu\, a_\nu) = \nu\left\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\right\} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)\text{[3]}).$$

---

[1]) Vgl, Jahrg. 1916, S. 212, Gl. (I).

[2]) Vgl. Jahrg. 1918, S. 90, Gl. (2). Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht infolge eines Druckfehlers $\mathfrak{M}_{n+1}(s_n)$ statt $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n)$.

[3]) Diese Beziehung gilt offenbar auch noch für $\varkappa = -1$, da sie in diesem Falle mit Berücksichtigung von Gl. (1_0) die Form annimmt:

$$\nu\, a_\nu = \nu\,(s_\nu - s_{\nu-1}).$$

Diese Relation bildet die Hauptgrundlage für den Beweis des folgenden („Hardy-Landauschen“) Satzes:

Für die *Konvergenz* einer bereits als *reduzibel* erkannten Reihe Σa_ν mit *reellen* Gliedern ist *hinreichend*, daß:

(II b) $$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n a_n < +\infty\ [1].$$

Beweis. Da die Reihe als reduzibel vorausgesetzt wird, so muß für irgend ein bestimmtes $k \geqq 0$ eine Beziehung von der Form bestehen:

(5) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{k+1}(s_n) = s.$$

Wir zeigen, daß dann infolge der Voraussetzung (II b) auch:

(5 a) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s,$$

und da es freistände, auf Grund dieses Ergebnisses die fragliche Schlußweise beliebig fortzusetzen, so würde auf diesem Wege schließlich sich ergeben, daß:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_0(s_n) = s, \text{ also: } \lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

d. h. daß die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu$ gegen die Summe s konvergiert.

Es handelt sich also lediglich um den Nachweis, daß aus (5) allemal (5 a) folgt.

Man hat nun infolge der Voraussetzung (II b) bei passend gewähltem $A > 0$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\nu a_\nu < A,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}(\nu a_\nu) < A,$$

und durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\mathfrak{M}_\varkappa(\nu a_\nu) < A \text{ (für } \varkappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von Gl. (4) und der zugehörigen Fußnote 3):

[1]) Nach dem in der Einleitung Gesagten könnte man selbstverständlich statt der Voraussetzung (II b) auch die Voraussetzung (II a) zum Ausgangspunkte nehmen.

$$(6)\qquad \nu\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) - \mathfrak{M}_\varkappa(s_{\nu-1})\} < A \quad (\text{für } \varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzt man speziell $\varkappa = k$, so folgt insbesondere, daß:

$$(7)\qquad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{\nu}.$$

Nun seien n, n' irgend zwei natürliche Zahlen und zwar:

$$n' < n,$$

ferner bedeute ν zunächst jede ganze Zahl des Intervalls:

$$(8)\qquad n - n' < \nu \leq n,$$

so findet man für jedes solche ν auf Grund von Ungl. (7) *a fortiori*:

$$(9)\qquad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n-n'}.$$

Ersetzt man hier ν, bei vorläufigem Ausschluß von $\nu = n$, der Reihe nach durch $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\ldots n$, so ergibt sich durch Addition der so entstehenden $n - \nu$ Ungleichungen:

$$(10)\qquad \mathfrak{M}_k(s_n) - \mathfrak{M}_k(s_\nu) < \frac{n-\nu}{n-n'}\cdot A$$

$$< \frac{n'}{n-n'}\cdot A \quad \text{(nach dem ersten Teil von Ungl. (8))},$$

und diese Ungleichung gilt dann *eo ipso* auch noch für $\nu = n$. Summiert man jetzt Ungleichung (10) nochmals über die n'-Werte: $\nu = n - n' + 1,\ n - n' + 2, \ldots, n$, so folgt weiter:

$$n'\cdot\mathfrak{M}_k(s_n) - \sum_{n-n'+1}^{n}{}^{\nu}\ \mathfrak{M}_k(s_\nu) < \frac{n'^2}{n-n'}\cdot A$$

und daher:

$$(11)\qquad \mathfrak{M}_k(s_n) < \frac{1}{n'}\sum_{n-n'+1}^{n}{}^{\nu}\ \mathfrak{M}_k(s_\nu) + \frac{n'}{n-n'}\cdot A.$$

Es bedeute jetzt zweitens ν eine Zahl des Intervalls:

$$(12)\qquad n < \nu \leq n + n',$$

so hat man nach Ungleichung (7) für jedes solche ν wiederum *a fortiori*:

$$(13)\qquad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n}.$$

Ersetzt man hier ν der Reihe nach durch $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\ldots$, $n + 1$ und addiert die so entstehenden Ungleichungen zu Ungleichung (13), so folgt:

$$\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_n) < \frac{\nu - n}{n} \cdot A$$

$$< \frac{n'}{n} \cdot A \quad \text{(nach dem zweiten Teil von Ungl. (12))},$$

und daher:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} \cdot A. \tag{14}$$

Summiert man diese Ungleichung über die n' Werte: $\nu = n + 1$, $n + 2$, $\ldots$, $n + n'$, und dividiert das Resultat durch n', so kommt:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \frac{1}{n'} \sum_{n+1}^{n+n'}{}_\nu\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} \cdot A. \tag{15}$$

Nun ist allgemein für $p < q$:

$$\sum_{p+1}^{q}{}_\nu\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) = \sum_{0}^{q}{}_\nu\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \sum_{0}^{p}{}_\nu\, \mathfrak{M}_k(s_\nu)$$

$$= (q + 1)\, \mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - (p + 1)\, \mathfrak{M}_{k+1}(s_p),$$

anders geschrieben:

$$\sum_{p+1}^{q}{}_\nu\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) \begin{cases} = (q+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_p) \\ = (p+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_q). \end{cases} \tag{16}$$

Wendet man die erste dieser Formeln auf die rechte Seite von Ungl. (11), die zweite auf diejenige von Ungl. (15) an, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) \begin{cases} < \dfrac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_n) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'})\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'}) + \dfrac{n'}{n-n'} \cdot A \\ > \dfrac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_n)\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \dfrac{n'}{n} \cdot A. \end{cases} \tag{17}$$

Nun werde gesetzt:

$$n' = [\varepsilon n], \quad \text{wo: } \varepsilon > 0,$$

so daß also:

$$\lim_{n\to\infty}(n\pm n')=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{n}=\varepsilon,\ \lim\frac{n'}{n-n'}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n'}=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da sodann mit Berücksichtigung von Gleichung (5):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'})\,s_{n\pm n'}=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_n)\,s_n=s,$$

so folgt aus (17) für $n\longrightarrow\infty$:

$$(18)\qquad \overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty}\mathfrak{M}_k(s_n)\begin{cases}\leqq s+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot A\\ \geqq s-\varepsilon\cdot A\end{cases}$$

und, da es freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern[1]), schließlich in Übereinstimmung mit Gleichung (5a):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_k(s_n)=s,$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Die Frage, ob der Satz in der eben bewiesenen Fassung eine größere Tragweite besitzt, als in der ursprünglich von Herrn Hardy angegebenen, ist nicht ohne weiteres zu bejahen (wie es bei oberflächlicher Betrachtung vielleicht den Anschein haben dürfte). Der Satz lehrt, daß die als reduzibel vorausgesetzte Reihe Σa_ν konvergiert, wenn nur so viel feststeht, daß die Zahlen νa_ν einseitig beschränkt sind. Dadurch wird die Anwendbarkeit des Satzes im Vergleich zu der Hardyschen Fassung sicherlich erleichtert, möglicherweise auch erweitert (es könnte ja, auch wenn vollständige

[1]) Das läuft also darauf hinaus, daß die früher eingeführten Zahlen n' schließlich der Bedingung $n' \prec n$ unterworfen werden. Doch wäre, wie ein Blick auf die Ungleichungen (17) lehrt, das gewünschte Endresultat nicht erzielt worden, wenn man diese Bedingung ohne weiteres in (17) eingeführt hätte. Der sinnreiche Kunstgriff, den erforderlichen Grenzprozeß, wie geschehen, in zwei nach einander auszuführende zu zerlegen, dürfte von Herrn de la Vallée Poussin herrühren.

Beschränktheit der Zahlen νa_ν vorhanden sein sollte, auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen, mehr als die einseitige wirklich festzustellen). Ob aber der Geltungsbereich des Satzes an Umfang gewonnen hat, hängt doch von der Beantwortung der folgenden Frage ab: Gibt es überhaupt konvergente Reihen Σa_ν, bei denen die Zahlen νa_ν nur einseitig beschränkt sind? Für den Fall (zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) durchweg gleichbezeichneter a_ν macht es keine Schwierigkeit, die obige Frage zu bejahen. Hätte man etwa durchweg $a_\nu > 0$, und $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu a_\nu < \infty$ (z. B. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu a_\nu = 0$, was ja insbesondere der Fall sein muß, wenn Σa_ν konvergiert und die a_ν eine monotone Folge bilden), so lassen sich die a_ν in eine Folge (a'_ν) umordnen[1]), für welche die Beziehung $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu a'_\nu = +\infty$ besteht, während andererseits die Beschränktheit der Zahlen $\nu a'_\nu$ nach unten, sowie die Konvergenz der Reihe $\Sigma a'_\nu$ erhalten bleibt. Doch bietet dieser Fall, wie auch der sogleich zu besprechende und ganz analog zu behandelnde der absoluten (also unbedingten) Konvergenz in dem vorliegenden Zusammenhange kein besonderes Interesse.

Angenommen die Reihe $\sum\limits_1^\infty{}^\nu a_\nu$ enthalte unendlich viele Glieder beiderlei Vorzeichens, so mögen die positiven mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \ldots,$$

die negativen mit

$$-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_\nu \ldots$$

bezeichnet werden. Wegen der Konvergenz von Σa_ν sind dann die Reihen $\Sigma \alpha_\nu$, $\Sigma \beta_\nu$ entweder beide konvergent oder beide divergent. Im ersten Falle ist Σa_ν unbedingt konvergent und, wenn $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu \alpha_\nu < \infty$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu \beta_\nu < \infty$ vorausgesetzt wird, so

[1]) S. Math. Ann. 35 (1890), S. 344 — oder auch meine „Vorlesungen über Zahlenlehre“, Abt. II (1916), S. 353.

steht es frei, ohne die Konvergenz der Reihe zu stören, die α_ν so weit hinauszuschieben, daß für die jetzt etwa mit $\Sigma a'_\nu$ zu bezeichnende Reihe $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu a'_\nu = +\infty$ wird, während $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \nu a'_\nu > -\infty$ bleibt, bzw. durch hinlängliches Hinausschieben der β_ν das entgegengesetzte Resultat zu erzielen.

Sind dagegen die Reihen $\Sigma\alpha_\nu$, $\Sigma\beta_\nu$ beide divergent, so tritt bei der Reihe Σa_ν der (für nutzbringende Anwendung des fraglichen Satzes wohl ausschließlich in Betracht kommende) Fall bedingter Konvergenz ein, bei dem also die Zulässigkeit einer Gliederumordnung an verhältnismäßig enge Grenzen gebunden und daher das zuvor eingeschlagene Verfahren nicht ohne weiteres anwendbar ist. Und da ja die bedingte Konvergenz nur dadurch zu Stande kommt, daß bei gleichzeitiger Unbeschränktheit von $\sum\limits_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu$ und $\sum\limits_1^n{}_\nu\, \beta_\nu$ zwischen den α_ν einerseits und den $(-\beta_\nu)$ andererseits ein gewisses Gleichgewicht besteht, so ist die Vermutung nicht von vornherein abzuweisen, daß vielleicht im Falle der Konvergenz von Σa_ν die Zahlen νa_ν entweder nach beiden Seiten beschränkt oder nach beiden Seiten unbeschränkt sein müßten[1]). Daß dies aber tatsächlich nicht zutrifft, läßt sich folgendermaßen zeigen. Es mögen die α_ν, β_ν so angenommen werden, daß:

$$\alpha_\nu > \beta_\nu, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\alpha_\nu = +\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\beta_\nu < +\infty.$$

Man kann dann die α_ν, $(-\beta_\nu)$ nach dem bekannten Riemannschen Verfahren zu einer bedingt konvergenten Reihe Σa_ν mit vorgeschriebener Summe, z. B. mit der Summe 0, zusammenfassen[2]). Dabei werden infolge der er-

---

[1]) Einfaches Beispiel für beide Eventualitäten:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} \cos \nu x, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cos \nu x,$$

wo $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

[2]) Die beiden Anfangsglieder der Reihe Σa_ν lauten in diesem Falle: $\alpha_1 - \beta_1$.

sten der obigen Bedingungen die negativen Glieder $(-\beta_\nu)$ wesentlich häufiger auftreten, als die positiven a_ν. Bezeichnet man nun die positiven Glieder mit a_{p_ν}, die negativen mit a_{n_ν}, so ist für $\nu > 1$ durchweg:

$$p_\nu > \nu,$$

da ja jede beliebige Anzahl von (mindestens zwei) Anfangsgliedern auch negative Glieder enthält und zwar nach dem zuvor gesagten zum mindesten von einem gewissen ν ab mehr als die Hälfte, so daß alsdann andererseits für die a_{n_ν} sich ergibt:

$$\nu > \frac{1}{2} n_\nu, \qquad \text{also: } n_\nu < 2\nu.$$

Daraus folgt aber, daß:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} p_\nu a_{p_\nu} \geqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu a_\nu = +\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} n_\nu |a_{n_\nu}| \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} 2\nu\beta_\nu < +\infty,$$

anders geschrieben:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu a_\nu = +\infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu a_\nu > -\infty,$$

d. h. die Zahlen νa_ν sind nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt. Es gibt also auch bedingt konvergente Reihen Σa_ν, bei welchen die Zahlen νa_ν nur einseitig beschränkt sind und die infolgedessen nicht auf den ursprünglichen Hardyschen Satz, wohl aber auf dessen Landausche Verallgemeinerung reagieren würden.