Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen.

Von Heinrich Liebmann.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1920.

§ 1. Übersicht und Vorbemerkungen.

1. Die vorliegende Untersuchung ist verschiedenen Fragen aus dem umfangreichen Kapitel der Lehre von den Flächenverbiegungen gewidmet.

Im zweiten Paragraphen wird die kinematische (Nr. 1) und die statische Bedeutung (Nr. 2) der von Bianchi zuerst für die Untersuchung der infinitesimalen Verbiegungen verwendeten „assoziierten Fläche“, auf die Volterra und Blaschke hingewiesen haben, kurz besprochen[1]).

§ 3 ist der Lehre von den analytischen Flächenverbiegungen gewidmet. Nr. 1 bringt die bekannten Grundlagen in Erinnerung und führt zunächst auf die alte Jellettsche Gleichung (9). In Nr. 2 wird auch die Verbiegung zweiter Ordnung auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung und Quadraturen — anders als von Lagally[2]) — zurückgeführt (10) und zur Bestimmung der Verbiegungen dritter Ordnung (11) fortgeschritten.

[1]) Vgl. hierzu: A. Voss, Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander (Math. Enc. III, D 6a), Nr. 32 (S. 426—432). — W. Blaschke, Kreis und Kugel (Jahresberichte d. D. M. V. 24 (1915), 195—207).

[2]) M. Lagally, Über unendlich kleine isometrische Verbiegungen einer Fläche mit höherer als erster Annäherung. Math. Ann. 76 (1915), 105—128.

In § 4 wird die Differentialgleichung (12) des Bourschen Problems[1]), das ist die Aufgabe der Bestimmung der Flächen aus ihrer ersten quadratischen Differentialform, dem Quadrate des Bogenelementes, zunächst in zwei besondere Formen gebracht (13, Nr. 1) und (14, Nr. 2), die zu den gesuchten Verallgemeinerungen der Formeln 9—11 führen, bzw. sich als besonders geeignet bei Rotationsflächen erweisen.

Damit wird die Grundlage für die rekurrierende Bestimmung der Verbiegungen aller Ordnungen gefunden (vgl. Formel 16, 17 und 18).

Im Anschluß an (18) werden dann in § 5 Spezialuntersuchungen für die Kugel durchgeführt. Hier sind die Verbiegungen erster Ordnung (22) durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt (21), deren Lösung auch vom Standpunkt der Fuchsschen Theorie der linearen Differentialgleichungen aus besonderes Interesse bietet (Nr. 1). Es gibt insbesondere unter den infinitesimalen Verbiegungen der Kugel eine Auswahl derart, daß bei jeder dieser Verbiegungen die Punkte eines bestimmten, als Berandung einer Kalotte vorzustellenden Parallelkreises ebene Bahnen beschreiben und der Rand als ebene Kurve erhalten bleibt (Nr. 2). Wir nennen sie *Gleitverbiegungen.* Es lassen sich dann leicht Paare isometrischer ebenrandiger Flächenkalotten angeben (Nr. 3). Schließlich wird noch gezeigt, daß auf Grund von (18) nunmehr die Bestimmung der Verbiegungen zweiter Ordnung bei der Kugel nur noch *Quadraturen rationaler Funktionen* erfordert.

In § 6 wird eine Reihe weiterer Fragen behandelt. Zunächst wird die Differentialgleichung der Weingartenschen „Verschiebungsfunktion“ φ für die infinitesimale Verbiegung einer geschlossenen konvexen Rotationsfläche (25) aufgestellt und diskutiert (Nr. 1). Es ergibt sich, daß infinitesimale Bewegungen möglich sind, deren Regularitätsgebiet nur einen der beiden Achsenendpunkte ausschließen (Nr. 2). Sodann lassen sich die verschiedenen bisher behandelten „bedingten Ver-

[1]) Voss, a. a. O., Nr. 18 (S. 395—398).

biegungen" affin übertragen (Nr. 3). Zum Schluß wird noch ein allgemeiner Satz über Gleitverbiegungen konvexer Flächenschalen aufgestellt (Nr. 4), der sein Gegenstück in der Lehre von den Polyederverbiegungen hat.

2. Es mag gestattet sein, gleich an dieser Stelle zur Deutung einer von Darboux ohne jede nähere Erklärung hingestellten Behauptung einen Beitrag zu geben[1]).

Wie ist wohl die Behauptung[2]) zu verstehen, daß die Bestimmung der Verbiegungen höherer Ordnung, d. h. der

$$\xi^{(k)}, \quad \eta^{(k)}, \quad \zeta^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

die in den Formeln (2) und (4), § 3, Nr. 1 auftreten, „nach bekannten Sätzen von Cauchy" durch Quadraturen geleistet werden kann, sobald die infinitesimalen Verbiegungen ξ, η, ζ bekannt sind?

Die für $\zeta^{(k)}$ aufgestellte Differentialgleichung (8) ist linear, aber nicht homogen. Sie wird homogen für $k = 0$, d. h. für die z-Komponente der infinitesimalen Verbiegung, vgl. (9). Nun zeigt die Anwendung der in der Flächentheorie mit so glänzenden Erfolgen verwendeten Laplaceschen Kaskadenmethode[3]), daß die unverkürzte, nicht homogene Differentialgleichung (8) mit denselben Hilfsmitteln zu integrieren ist, wie die verkürzte (9). Das inhomogene Glied ist hier als bekannte Funktion vorauszusetzen, es enthält alle ξ, η, ζ bis zur Ordnung $k - 1$.

Also kann man in der Tat sagen, daß, wenn nicht nach Cauchy, so doch nach Laplace die Bestimmung der Verbiegungen höherer Ordnung nur mehr Quadraturen erfordert, wenn die infinitesimalen Verbiegungen bekannt sind.

---

[1]) Die hier gegebene Erklärung ist das Ergebnis mehrfacher Besprechungen mit meinem verehrten Kollegen Lagally.

[2]) Darboux, Théorie générale des surfaces IV (1896), p. 5. Auch Voss führt diese wichtige Stelle an (a. a. O., S. 427, Anm. 312).

[3]) A. R. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Auflage der deutschen Übersetzung (1912), S. 452 ff.

Übrigens wird später (§ 5, Nr. 4) die Verbiegung zweiter Ordnung für die Kugel durch Quadraturen geleistet ohne Verwendung der Kaskadenmethode.

3. Die ursprüngliche Absicht bei den vorliegenden Untersuchungen war, in Verfolgung des Zieles, das der Verfasser sich in einer Reihe von Arbeiten gestellt hat, weitere konkrete Fragen der Flächenverbiegung zu lösen, und die in Nr. 1 gegebene Übersicht weist auf die neuen Ergebnisse hin.

Ganz von selbst ergab sich dabei die in § 3 behandelte Frage. Die gegebene Lösung, nämlich die Angabe eines bestimmten Weges, um z. B. $\zeta^{(k)}$ aus ζ, $\zeta^{(1)} \ldots \zeta^{(k-1)}$ allein zu finden, ist praktisch sehr gut verwendbar. Eines fehlt dieser Lösung: Die elegante Symmetrie der Weingartenschen und der Lagallyschen Funktion, welche die Verbiegungen erster und zweiter Ordnung bestimmen.

Zu diesem Ziel gelangt man vielleicht, wenn es möglich ist, eine Bemerkung von Blaschke[1]) nutzbar zu machen, wo nach der von ihm (zuvor von Bianchi) behandelte „Drehriß“, der dort für ein Paar endlich verschiedener isometrischer Flächen untersucht wird, durch geeigneten Grenzübergang sich in den Drehriß der infinitesimalen Verbiegung, also die assoziierte Fläche verwandelt. Hier scheint der Weg zu beginnen, der dazu führt, die Eleganz der für die Verbiegungen der ersten beiden Ordnungen gefundenen Funktionen mit dem Vorzug, den eine allgemein gültige Rekursionsformel besitzt, in vollem Umfang zu vereinigen.

Zur wirklichen Berechnung aber hat sich jedenfalls das hier gegebene Verfahren bereits bewährt.

§ 2. Drehriss und Kräfteplan.

1. Bei jeder infinitesimalen Verbiegung, die dem einzelnen Flächenpunkt $P(x, y, z)$ die Verschiebung $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ erteilt, erleidet das einzelne Flächenelement mit dieser Verschiebung

[1]) W. Blaschke, Über isometrische Flächenpaare (Jahresbericht d. D. M. V. 22 (1913), 154–183).

zugleich eine infinitesimale Drehung[1]), deren Komponenten εX, εY, εZ durch die Gleichungen

$$
(1) \qquad \begin{aligned} d\xi &= Y dz - Z dy, \\ d\eta &= Z dx - X dz, \\ d\zeta &= X dy - Y dx \end{aligned}
$$

gegeben sind. Dieses System (1) ist vollkommen äquivalent mit der bekannten Gleichung

$$
(1') \qquad dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0
$$

der infinitesimalen Verbiegung.

Die Fläche mit den rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z ist genau die „assoziierte Fläche“ oder der „Drehriß“.

Wir wollen hier zeigen, wie man in einfachster Weise die Reziprozitätseigenschaft beweisen kann, d. h. den Satz, daß die Beziehung der Assoziiertheit wechselseitig ist.

Die Gleichungen (1), in denen man x, y, z und X, Y, Z durch allgemeine Gaußsche Koordinaten ausgedrückt zu denken hat, besagen doch, daß auch die rechten Seiten dieser Gleichungen vollständige Differentiale sein müssen, und dann sind

$$
\begin{aligned}
y\,dZ - z\,dY &= d(yZ - zY) + Y dz - Z dy = d\xi, \\
z\,dX - x\,dZ &= d(zX - xZ) + Z dx - X dz = d\eta, \\
x\,dY - y\,dX &= d(xY - yX) + X dy - Y dx = d\zeta
\end{aligned}
$$

ebenfalls vollständige Differentiale. Es ist also nach (1) oder (1′) die Fläche (x, y, z) ihrerseits assoziiert zur Fläche (X, Y, Z) bei der infinitesimalen Verbiegung ξ, η, ζ.

2. Wir wollen jetzt, zum Teil mit kleiner Abschweifung von dem Wege, den Blaschke a. a. O. gewählt hat, noch zeigen, daß der *Drehriß* (X, Y, Z) zugleich als *Kräfteplan* innerer Spannungen (dX, dY, dZ) der Flächenhaut (x, y, z) gedeutet werden kann.

---

[1]) Vgl. hierzu außer der bereits angeführten Literatur die Arbeit „Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung“. (Diese Berichte 1919, S. 267—291.)

Denkt man sich eine biegsame unausdehnbare Flächenhaut (x, y, z) inneren Spannungen (Tangentialspannungen) unterworfen und dann längs einer geschlossenen Kurve aufgeschnitten, so setzen sich diese Spannungen zu Elementarkräften zusammen — wir wollen sie zunächst mit δX, δY, δZ bezeichnen — die in den einzelnen Elementen ds angreifen. Zu jeder Schnittrichtung $du : dv$ gehört eine solche tangentiale Spannung.

Nun müssen diese Kräfte, die längs einer beliebigen Schnittkurve auftreten, die Gleichgewichtsbedingungen der an einem starren Körper angreifenden Kräfte erfüllen, es müssen also die drei Integrale

$$\int \delta X, \quad \int \delta Y, \quad \int \delta Z$$

und die drei Integrale

$$\int (y\,\delta Z - z\,\delta Y), \quad \int (z\,\delta X - x\,\delta Z), \quad \int (x\,\delta Y - y\,\delta X)$$

längs beliebiger geschlossener Kurven genommen, immer gleich Null sein.

Demnach sind nicht nur

$$\delta X = dX, \quad \delta Y = dY, \quad \delta Z = dZ$$

vollständige Differentiale, sondern auch

$$dL = y\,dZ - z\,dY, \quad dM = z\,dX - x\,dZ, \quad dN = x\,dY - y\,dX.$$

Dann sind aber nach Nr. 1 die Flächen (x, y, z) und (X, Y, Z) einander wechselseitig assoziiert.

Hiernach kann also jeder *Drehriß* einer Flächenhaut zugleich als *Kräfteplan innerer Spannungen* gedeutet werden, und der reziproken Beziehung zwischen zwei assoziierten Flächen entspricht die reziproke Beziehung zwischen einer Flächenhaut und dem Kräfteplan ihrer inneren Spannungen.

Diese Reziprozität entspricht der Zuordnung zwischen Fachwerk und Kräfteplan, hat aber bei Flächenhäuten doch einen etwas andern Sinn als bei Systemen von Stäben; denn beim Fachwerk fällt die Spannung in die Richtung der Stäbe, während hier die Spannung dX, dY, dZ zwar innerhalb der

Tangentialebene liegt, dagegen nicht in die Richtung des Elementes $ds\,(du, dv)$, dem sie zugeordnet ist.

Zur vollen Einsicht in die Beziehung zwischen (x, y, z) und (X, Y, Z) darf vielleicht nochmals besonders hervorgehoben werden, daß den Unterschieden dX, dY, dZ der Komponenten der Drehungen, welche die den Punkten $P\,(x, y, z)$ und $P_1\,(x + dx, y + dy, z + dz)$ zugehörigen Flächenelemente erleiden (den Komponenten der *relativen Drehung*) die Komponenten dX, dY, dZ der *Spannung* als gleichwertig zugeordnet sind, die auf das Element $ds = PP_1$ wirkt. Dagegen unterscheiden sich die Komponenten $d\xi, d\eta, d\zeta$ der relativen Verschiebung von den Komponenten dL, dM, dN der Spannungsmomente um die Differentiale der drei Ortsfunktionen $yZ - zY,\ zX - xZ,\ xY - yX$.

§ 3. Analytische Flächenverbiegungen[1]).

1. Damit die analytisch von dem Parameter ε abhängenden Darstellungen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= x + \varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^{(1)} + \varepsilon^3\xi^{(2)} + \cdots\\
y_1 &= y + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^{(1)} + \varepsilon^3\eta^{(2)} + \cdots\\
z_1 &= z + \varepsilon\zeta + \varepsilon^2\zeta^{(1)} + \varepsilon^3\zeta^{(2)} + \cdots
\end{aligned}
$$

die Koordinaten einer Schar von Flächen angeben, die zur Fläche (x, y, z) isometrisch sind, muß die Identität

$$
(3)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv 0
$$

für einen gewissen Wertbereich von ε bestehen.

Diese Forderung führt auf eine Reihe von Gleichungen, die man in zwei Schritten erhält. Man hat zunächst in (3) die Koeffizienten von ε, ε^2 usw. gleich Null zu setzen. Sodann hat man sich die rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) der Ausgangsfläche in Gaußschen Koordinaten (u, v) dargestellt zu denken

$$x = x\,(u, v),\quad y = y\,(u, v),\quad z = z\,(u, v),$$

[1]) Die Entwickelungen dieses Paragraphen setzen keine Vorkenntnisse voraus.

als deren Funktionen auch die ξ, η, ζ zu bestimmen sind. Man erhält aus jeder der durch die erste Überlegung gefundenen Gleichungen also wieder drei weitere, indem man die Koeffizienten von du^2, dv^2 und $du\,dv$ gleich Null setzt.

In diesem Paragraphen wählen wir für u und v durchweg x und y und erhalten dann unter Verwendung der Mongeschen Bezeichnungen p, q, r, s, t für die Differentialquotienten vom z und im übrigen von Fußmarken (1, 2) zur Bezeichnung der Differentiation nach x und y ganz allgemein

$$
\begin{aligned}
&\xi_1^{(k)} + p\,\zeta_1^{(k)} + P^{(k)} = 0,\\
(4)\qquad &\eta_2^{(k)} + q\,\zeta_2^{(k)} + R^{(k)} = 0,\\
&\xi_2^{(k)} + \eta_1^{(k)} + p\,\zeta_2^{(k)} + q\,\zeta_1^{(k)} + Q^{(k)} = 0.
\end{aligned}
$$

Die $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$ sind aus den Differentialquotienten von z und allen ξ, η, ζ bis zur $(k-1)^{\text{ten}}$ Stufe zusammengesetzt, insbesondere ist

$$P^{(0)} = Q^{(0)} = R^{(0)} = 0,$$

d. h. zur Bestimmung von ξ, η, ζ der niedrigsten Stufe erhält man

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 + p\,\zeta_1 = 0,\\
&\eta_2 + q\,\zeta_2 = 0,\\
&\xi_2 + \eta_1 + p\,\zeta_2 + q\,\zeta_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun zunächst ableiten, daß (4) zur Bestimmung von $\zeta^{(k)}$ auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt, nach deren Integration zur Bestimmung von $\xi^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$ nur noch Quadraturen zu leisten sind. Zu diesem Zweck spalten wir die letzte Gleichung (4) durch Zerlegung auf in

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad &\xi_2^{(k)} + q\,\zeta_1^{(k)} + U^{(k)} + \varphi^{(k)} = 0\\
&\eta_1^{(k)} + p\,\zeta_2^{(k)} + V^{(k)} - \varphi^{(k)} = 0,
\end{aligned}
$$

wobei

$$U^{(k)} + V^{(k)} = Q^{(k)}$$

sein muß. Durch Differentiation erhält man aus der ersten Gleichung (4) und aus der ersten Gleichung (5):

$$\xi_{12}^{(k)} + p\,\zeta_{12}^{(k)} + s\,\zeta_{1}^{(k)} + P_{2}^{(k)} = 0,$$
$$\xi_{12}^{(k)} + q\,\zeta_{11}^{(k)} + s\,\zeta_{1}^{(k)} + U_{1}^{(k)} + \psi_{1}^{(k)} = 0,$$

also

$$p\,\zeta_{12}^{(k)} - q\,\zeta_{11}^{(k)} + P_{2}^{(k)} - U_{1}^{(k)} - \psi_{1}^{(k)} = 0. \tag{6}$$

Ebenso erhält man

$$q\,\zeta_{12}^{(k)} - p\,\zeta_{22}^{(k)} + R_{1}^{(k)} - V_{2}^{(k)} + \psi_{2}^{(k)} = 0. \tag{7}$$

Differenziert man (6) nach y, (7) nach x und addiert, so folgt

$$2\,s\,\zeta_{12}^{(k)} - r\,\zeta_{22}^{(k)} - t\,\zeta_{11}^{(k)} + P_{22}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} + R_{11}^{(k)} = 0. \tag{8}$$

Aus dieser Differentialgleichung ist $\zeta^{(k)}$ zu bestimmen, sodann aus (6) und (7) $\psi^{(k)}$ und endlich aus (4) und (5) $\xi^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$.

Zur Bestimmung von ξ, η und ζ hat man also z. B. außer

$$r\,\zeta_{22} - 2\,s\,\zeta_{12} + t\,\zeta_{11} = 0 \tag{9}$$

die Gleichungen

$$\psi_1 = p\,\zeta_{12} - q\,\zeta_{11}, \quad \psi_2 = p\,\zeta_{22} - q\,\zeta_{12},$$
$$\xi_1 = -p\,\zeta_1, \quad \xi_2 = -q\,\zeta_1 - \psi, \quad \eta_1 = -p\,\zeta_2 + \psi, \quad \eta_2 = -q\,\zeta_2.$$

Für die zweiten Differentialquotienten von ξ erhält man

$$\xi_{11} = -r\,\zeta_1 - p\,\zeta_{11}, \quad \xi_{12} = -s\,\zeta_1 - p\,\zeta_{12},$$
$$\xi_{22} = -t\,\zeta_1 - q\,\zeta_{12} - \psi_2 = -t\,\zeta_1 - p\,\zeta_{22}$$

und entsprechend für η:

$$\eta_{11} = -r\,\zeta_2 - q\,\zeta_{11}, \quad \eta_{12} = -s\,\zeta_2 - q\,\zeta_{12}, \quad \eta_{22} = -t\,\zeta_2 - q\,\zeta_{22},$$

die zweiten Differentialquotienten von ξ und η können also durch die von ζ und z vollständig ausgedrückt werden.

2. Wir gehen weiter zu den Verbiegungen zweiter Stufe $(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \zeta^{(1)})$ und dritter Stufe $(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \zeta^{(2)})$. Die Ansätze (2) und (3) führen, wenn man den Koeffizienten von ε^2 gleich Null setzt, auf

$$2\,\Sigma\,d\,x\,d\,\xi^{(1)} + \Sigma\,d\,\xi^2 = 0.$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)} + p\,\zeta_1^{(1)} + P^{(1)} = 0,\\ &\eta_2^{(1)} + q\,\zeta_2^{(1)} + R^{(1)} = 0,\\ &\xi_2^{(1)} + \eta_1^{(1)} + p\,\zeta_2^{(1)} + q\,\zeta_1^{(1)} + Q^{(1)} = 0; \end{aligned} \tag{4'}$$

dabei ist gesetzt

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_1^2 = P^{(1)}, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma\xi_2^2 = R^{(1)}, \quad \Sigma\xi_1\xi_2 = Q^{(1)}.$$

Um hieraus die Differentialgleichung für $\zeta^{(1)}$ zu bilden, braucht man nach (8) noch

$$P_{22}^{(1)} - Q_{12}^{(1)} + R_{11}^{(1)},$$

wofür sich ergibt

$$\Sigma(\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2).$$

Die ersten beiden Glieder der Summe werden mit Rücksicht auf die Formeln am Schluß von Nr. 1 und auf (9):

$$\begin{aligned} \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2 &= (rt - s^2)\zeta_1^2 + p^2(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2), \\ \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 &= (rt - s^2)\zeta_2^2 + q^2(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2), \end{aligned}$$

so daß (8) jetzt die Gestalt annimmt

$$\begin{aligned} r\zeta_{22}^{(1)} - 2s\zeta_{12}^{(1)} + t\zeta_{11}^{(1)} + (1 + p^2 + q^2)(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2) \\ + (rt - s^2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Man braucht also, um $\zeta^{(1)}$ zu bestimmen, nur ζ zu kennen (nicht ξ und η!). Wir werden (10) später in anderer Form zur Berechnung der Verbiegung zweiter Ordnung für die Kugel heranziehen (§ 5) und besprechen hier nur kurz ein anderes Beispiel.

Beim *hyperbolischen Paraboloïd*

$$z = xy, \quad (r = t = 0, \ s = 1)$$

wird aus (9) erhalten

$$\zeta_{12} = 0,$$

also

$$\zeta = f(x) + g(y),$$

und auch (10) ist in diesem Falle sofort zu integrieren.

Um die Verbiegungen dritter Ordnung zu bestimmen, hat man zunächst in (3) den Koeffizienten von ε^3, also

$$2\Sigma dx\, d\xi^{(2)} + 2\Sigma d\xi\, d\xi^{(1)}$$

gleich Null zu setzen.

Dies führt auf die Gleichungen

$$
(4'') \qquad
\begin{aligned}
&\xi_1^{(2)} + p\,\zeta_1^{(2)} + \Sigma\,\xi_1\,\xi_1^{(1)} = 0,\\
&\eta_2^{(2)} + q\,\zeta_2^{(2)} + \Sigma\,\xi_2\,\xi_2^{(1)} = 0,\\
&\xi_2^{(2)} + \eta_1^{(2)} + p\,\zeta_2^{(2)} + q\,\zeta_1^{(2)} + \Sigma(\xi_1\,\xi_2^{(1)} + \xi_2\,\xi_1^{(1)}) = 0,
\end{aligned}
$$

und hieraus erhält man mühelos

$$
r\,\zeta_{22}^{(2)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(2)} + t\,\zeta_{11}^{(2)} + \Sigma\,\xi_{11}\,\xi_{22}^{(1)} + \Sigma\,\xi_{22}\,\xi_{11}^{(1)} - 2\,\Sigma\,\xi_{12}\,\xi_{12}^{(1)} = 0.
$$

Daran schließt sich jetzt eine längere, aber durchaus elementare Rechnung, die schließlich auf folgende Differentialgleichung führt:

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
&r\,\zeta_{22}^{(2)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(2)} + t\,\zeta_{11}^{(2)} + 2\,(r\,t - s^2)\,(\zeta_1\,\zeta_1^{(1)} + \zeta_2\,\zeta_2^{(1)})\\
&\qquad - (p\,\zeta_1 + q\,\zeta_2)\,(r\,\zeta_{22}^{(1)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(1)} + t\,\zeta_{11}^{(1)})\\
&+ (1 + p^2 + q^2)\,(\zeta_{11}\,\zeta_{22}^{(1)} - 2\,\zeta_{12}\,\zeta_{12}^{(1)} + \zeta_{22}\,\zeta_{11}^{(1)}) = 0.
\end{aligned}
$$

Diese Differentialgleichung ist ähnlich gebaut wie (10): Sie enthält weder ξ, η noch $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, sondern eben nur ζ und $\zeta^{(1)}$. Man kann sich die Mühe ersparen, sie nachzuprüfen, da sie, wie wir sehen werden, auf ganz anderem Wege gewonnen werden kann.

§ 4. Die rekurrierende Differentialgleichung der analytischen Verbiegungen.

1. Um die allgemeine rekurrierende Differentialgleichung zu finden, welche $\xi^{(k)}$ mit den ξ, $\xi^{(1)} \cdots \xi^{(k-1)}$ oder $\eta^{(k)}$ mit η, $\eta^{(1)} \cdots \eta^{(k-1)}$ oder $\zeta^{(k)}$ mit ζ, $\zeta^{(1)} \cdots \zeta^{(k-1)}$ verbindet, hat man den elementaren Rahmen der Berechnungen von § 3 zu verlassen; man muß vielmehr von der Differentialgleichung des Bourschen Problems ausgehen und sie durch Reihenentwickelung nach Potenzen von ε zergliedern.

Wir gehen also davon aus, daß die rechtwinkligen Koordinaten der Fläche mit dem Bogenelement

$$
ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2
$$

als Funktionen der allgemeinen Gaußschen Flächenkoordinaten (u, v) die Gleichung erfüllen[1])

$$
(12) \qquad \Delta_{22} f = (1 - \Delta_1 f) \cdot K.
$$

[1]) Vgl. Voss, a. a. O., S. 396, Gleichung (2).

In (12) ist K das Krümmungsmaß, ferner

$$\Delta_1 f = \frac{E f_2^2 - 2 F f_1 f_2 + G f_1^2}{EG - F^2}$$

der erste Differentialparameter, und auf der linken Seite steht der folgende zweite Differentialparameter

$$\Delta_{22} f = \frac{\overline{f}_{11} \overline{f}_{22} - \overline{f}_{12}^2}{EG - F^2};$$

hierin sind die Abkürzungen gebraucht

$$\overline{f}_{ik} = f_{ik} - \left\{ {ik \atop 1} \right\} f_1 - \left\{ {ik \atop 2} \right\} f_2 \qquad (i, k = 1, 2).$$

Die hier auftretenden Christoffelschen Symbole können aus den Lehrbüchern der Flächentheorie[1]) entnommen werden.

Jetzt ist der einzuschlagende Weg klar vorgezeichnet: Ist z. B. $z(u, v)$ die dritte Koordinate einer Fläche mit dem gegebenen Bogenelement, so erfüllt z die Gleichung (12). Man setzt dann

$$f = z(u, v) + Z(u, v)$$

und erhält für Z eine Differentialgleichung aus (12). Schließlich setzt man

$$Z = \varepsilon \zeta + \varepsilon^2 \zeta^{(1)} + \varepsilon^3 \zeta^{(2)} + \cdots$$

in diese Gleichung ein und fordert sodann, daß die Koeffizienten von ε, ε^2, ε^3 . . . gleich Null werden. Auf diesem Wege erhält man die Kette der rekurrierenden Differentialgleichungen für ζ, $\zeta^{(1)}$ usw.

Wir wollen die Gleichung für f zunächst aufstellen, ausgehend von der Form der Flächengleichung

$$z = z(x, y)$$

Dann wird

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$
$$\overline{f}_{11} = f_{11} - rM, \quad \overline{f}_{12} = f_{12} - sM, \quad \overline{f}_{22} = f_{22} - tM,$$

[1]) Z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Auflage der Übersetzung von Lukat (1910), S. 202, 115 und 66.

$$M = \frac{p f_1 + q f_2}{1 + p^2 + q^2},$$

ferner ist

$$K = \frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

und

$$\Delta_1 f = \frac{(1 + p^2) f_2^2 - 2 p q f_1 f_2 + (1 + q^2) f_1^2}{1 + p^2 + q^2},$$

so daß (12) die Gestalt annimmt

$$(13) \quad \begin{aligned} f_{11} f_{22} - f_{12}^2 - \frac{(p f_1 + q f_2)}{1 + p^2 + q^2} (r f_{22} - 2 s f_{12} + t f_{11}) \\ + \frac{(r t - s^2)}{1 + p^2 + q^2} (f_1^2 + f_2^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist also folgende: Gegeben sei die Fläche

$$z = z(x, y).$$

Wenn dann die Fläche

$$z_1 = z + Z(x, y), \quad x_1 = x + X(x, y), \quad y_1 = y + Y(x, y)$$

isometrisch ist zu ihr, so erfüllen $x_1\, y_1\, z_1$ als Funktionen von x und y die Differentialgleichung (13).

2. Wir wollen auch den Gang der Rechnung angeben, die auf die Differentialgleichung führt, welche die Biegungsflächen einer gegebenen Rotationsfläche bestimmt.

Ist die Rotationsfläche gegeben durch

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v,$$

$$(14) \quad r = \int_0^u \varrho \cos u \, d u, \quad z = -\int_0^u \varrho \sin u \, d u, \quad \varrho = \varrho(u),$$

so wird

$$d s^2 = \varrho^2 \, d u^2 + d v^2,$$

$$\Delta_1 f = \frac{f_1^2}{\varrho^2} + \frac{f_2^2}{r^2},$$

und die Christoffelschen Symbole werden

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \varrho \frac{\cos u}{r},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -r \frac{\cos u}{\varrho}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Das Krümmungsmaß ist

$$K = \frac{\sin u}{r \varrho},$$

und so erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$(15) \quad f_{11} f_{22} - f_{12}^2 + \frac{f_1 f_{11} r \cos u}{\varrho} + 2 \frac{f_2 f_{12} \varrho \cos u}{r} - \frac{f_1 f_{22} \varrho'}{\varrho}$$
$$+ \frac{f_1^2}{\varrho^2}(r \varrho \sin u - r \varrho' \cos u) + \frac{f_2^2}{r^2}(r \varrho \sin u - \varrho^2 \cos^2 u) - r \varrho \sin u = 0.$$

Die Fußmarken deuten selbstverständlich die Differentiation nach u und v an.

Der Sinn dieser Differentialgleichung ist also:

Damit die Fläche

$$x_1 = r \cos v + X(u, v), \quad y_1 = r \sin v + Y(u, v),$$
$$z_1 = -\int_0^u \varrho \sin u \, du + Z(u, v)$$

auf die Rotationsfläche (14) abwickelbar ist, müssen $x_1(u, v)$, $y_1(u, v)$, $z_1(u, v)$ der Gleichung (15) genügen.

Von diesen Stammgleichungen (13) und (15) aus wollen wir jetzt zur Bestimmung der analytischen Verbiegungen fortschreiten.

3. Das Programm ist in Nr. 1 vollständig entwickelt worden; wir schreiten zur Ausführung. Um

$$Z(x, y) = z_1(x, y) - z(x, y)$$

zu erhalten, hat man in (13) z_1 einzusetzen und erhält für $Z(x, y)$ die Gleichung

$$(16) \quad \begin{aligned} &(r Z_{22} - 2 s Z_{12} + t Z_{11})(1 - p Z_1 - q Z_2) \\ &+ (1 + p^2 + q^2)(Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2) + (r t - s^2)(Z_1^2 + Z_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$Z = \varepsilon \zeta,$$

so erhält man, indem man den Faktor von ε gleich Null setzt, wieder

$$(9) \qquad r \zeta_{22} - 2 s \zeta_{12} + t \zeta_{11} = 0.$$

Führt man sodann ein

$$Z = \varepsilon \zeta + \varepsilon^2 \zeta^{(1)},$$

so wird der Faktor von ε^2:

$$r \zeta_{22}^{(1)} - 2 s \zeta_{12}^{(1)} + t \zeta_{11}^{(1)} - (p \zeta_1 + q \zeta_2)(r \zeta_{22} - 2 s \zeta_{12} + t \zeta_{11})$$
$$+ (1 + p^2 + q^2)(\zeta_{11} \zeta_{22} - \zeta_{12}^2) + (r t - s^2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$$

und man erhält durch Nullsetzen mit Rücksicht auf (9) wieder die Gleichung (10).

Die allgemeine Rekursionsgleichung hinzuschreiben, erübrigt sich wohl; sie würde eine viel unübersichtlichere Form haben, als die Stammgleichung (16), aus der sie jederzeit hergestellt werden kann.

Lehrreicher ist es, die Differentialgleichungen für X und Y herzustellen. Setzt man in (13)

$$f = x + X,$$

so erhält man für X die Gleichung:

$$(X_{11} X_{22} - X_{12}^2)(1 + p^2 + q^2) - (p(1 + X_1) + q X_2)(r X_{22} - 2 s X_{12}$$
$$+ t X_{11}) + (r t - s^2)(2 X_1 + X_1^2 + X_2^2) = 0,$$

und hieraus z. B. für ξ:

$$2 \xi_1 (r t - s^2) - p (r \xi_{22} - 2 s \xi_{12} + t \xi_{11}) = 0.$$

4. Wir geben nun noch den Gang für die Berechnung der infinitesimalen bzw. analytischen Verbiegungen von Rotationsflächen an, mit Beschränkung auf die z-Koordinate.

Setzt man in (15) ein

$$f = z + Z(u, v) = -\int_0^u \varrho \sin u \, du + Z(u, v),$$

so kommt

$$f_1 = -\varrho \sin u + Z_1, \quad f_2 = Z_2,$$
$$f_{11} = -\varrho' \sin u - \varrho \cos u + Z_{11}, \quad f_{12} = Z_{12}, \quad f_{22} = Z_{22}$$

und als Stammgleichung zur Bestimmung der ζ, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ . . . demnach:

$$(17)\quad \begin{aligned} & Z_{11} r \sin u \cos u + Z_{22}(\varrho \cos u + \varrho' \sin u) + r Z_1 \left(1 + \sin^2 u - \frac{\varrho'}{\varrho} \sin u \cos u\right) = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 + Z_1 Z_{11} \frac{r \cos u}{\varrho} - \frac{Z_1 Z_{22} \varrho'}{\varrho} \\ & + 2 \frac{Z_2 Z_{12} \varrho \cos u}{r} + \frac{Z_1^2}{\varrho^2}(r \varrho \sin u - r \varrho' \cos u) \\ & + \frac{Z_2^2}{r^2}(r \varrho \sin u - \varrho^2 \cos^2 u). \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für den Fall der Kugel ($\varrho = 1$) die Gleichung

$$(18)\quad \begin{aligned} & Z_{11} \sin^2 u \cos u + Z_{22} \cos u + Z_1 \sin u (1 + \sin^2 u) \\ & = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 + Z_1 Z_{11} \sin u \cos u + 2 Z_2 Z_{12} \cot u \\ & + Z_1^2 \sin^2 u + Z_2^2 (1 - \cot^2 u). \end{aligned}$$

Damit ist für die Bestimmung analytischer Verbiegungen aus der allgemeinen Differentialgleichung (12) nach den verschiedensten Seiten hin der Weg gebahnt.

Beiläufig bemerkt, es hat wohl großer Mut zur Aufstellung dieser Gleichung gehört; ist doch von vorneherein kaum zu erwarten, daß die Aufgabe, drei Funktionen von zwei Veränderlichen aus drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, schließlich auf eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Man hätte vielmehr auf ein System von Differentialgleichungen höherer Ordnung zu rechnen, für die gemeinsame Lösungen zu suchen sind.

§ 5. Die analytischen Verbiegungen der Kugel.

1. Um die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel

$$(19)\quad x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

zu erhalten, kann man die auf elementarem Weg gefundene

Differentialgleichung (9) transformieren, indem man sie auf die Form bringt

$$\frac{\partial(\zeta_x, z_y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\zeta_y, z_x)}{\partial(u, v)} = 0$$

und hier einsetzt

$$z_x = -\cos v \operatorname{tang} u, \quad z_y = -\sin v \operatorname{tang} u,$$

$$\zeta_x = \zeta_1 \frac{\cos v}{\cos u} - \zeta_2 \frac{\sin v}{\sin u}, \quad \zeta_y = \zeta_1 \frac{\sin v}{\cos u} + \zeta_2 \frac{\cos v}{\sin u}.$$

Einfacher ist es, sich diese Rechenübung zu ersparen und aus der mit Hilfe von (12) gefundenen Gleichung (18) unmittelbar zu entnehmen:

$$(18') \qquad \sin^2 u \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \sin u (1 + \sin^2 u) \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Führt man hier an Stelle von u ein

$$t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

so kommt

$$(20) \qquad t^2(1 - t^4) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + t(1 + 8t^2 - t^4) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (1 - t^4) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Wenn wir jetzt eine reguläre Verbiegung des Gebietes betrachten, das den Nordpol ($t = 0$) enthält, so ist ζ in Gestalt einer trigonometrischen Reihe vorzuschreiben, die nach den Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen von v fortschreitet, wobei die Koeffizienten Funktionen von t sind. Beide Koeffizienten, der von $\sin kv$ und $\cos kv$, erfüllen dieselbe Differentialgleichung

$$(21) \qquad t^2(1 - t^4) f''(t) + t(1 + 8t^2 - t^4) f'(t) - k^2(1 - t^4) f(t) = 0.$$

Die Fundamentallösungen dieser Gleichung sind

$$t^k \frac{1 + k + (1 - k)t^2}{1 + t^2}, \qquad t^{-k} \frac{1 - k + (1 + k)t^2}{1 + t^2};$$

sie gehen ineinander über, wenn man t mit t^{-1} vertauscht. Das war von vorneherein zu erwarten, denn dieser Vertauschung entspricht die Vertauschung von Nordpol und Südpol der Kugel[1]).

Übrigens kommt für die Umgebung des Nordpols, wenn $k \geqq 2$, nur die erste Lösung als regulär in Betracht, die zweite hat für $t = 0$ einen Pol.

Für $k = 1$ erhält man

$$f = c \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = c \sin u,$$

und diese Lösung bedeutet, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, eine infinitesimale Bewegung.

So erhält man schließlich

$$(22) \qquad \zeta(t, v) = \sum_1^\infty (a_k \cos kv + b_k \sin kv)\, t^k \frac{1 + k + (1 - k)\, t^2}{1 + t^2}$$

als Lösung, deren Regularitätsbereich nur den Südpol ($t = \infty$). ausschließt.

Die zugehörigen ξ und η sind durch Quadraturen zu bestimmen, und zwar entsprechen dem Gliede

$$(23) \qquad \zeta_k = t^k \cdot \frac{1 + k + (1 - k)\, t^2}{1 + t^2} \cos kv$$

die Glieder

$$\xi_k = \frac{t^{k+1}}{1 + t^2}\left((k - 1) \cos (k + 1)\, v + (k + 1) \cos (k - 1)\, v\right)$$

$$\eta_k = \frac{t^{k+1}}{1 + t^2}\left((k - 1) \sin (k + 1)\, v - (k + 1) \sin (k - 1)\, v\right).$$

2. Der für ζ gefundene Ausdruck gibt auch Aufschluß über infinitesimale Verbiegungen von bedingtem Charakter,

[1]) Die Integration von (21) ist die einzige Aufgabe, die außer Quadraturen zu leisten ist, wenn man die analytischen Verbiegungen der Kugel bestimmen will. Die Lösung wurde auf induktivem Wege gefunden; man kann sie aber auch systematisch aus der Fuchsschen Theorie ableiten. Ich verdanke diese Feststellung meinem verehrten Kollegen Schlesinger, der (21) als ein sehr instruktives Beispiel für eine Reihe von Sätzen dieser Theorie bezeichnet hat.

die wir *Gleitverbiegungen* nennen wollen[1]); darunter verstehen wir Verbiegungen einer Kalotte, wobei der den Rand bildende Parallelkreis als ebene Kurve erhalten bleiben soll.

Bei der Untersuchung kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Ergebnisses verlangen, daß ζ längs des Parallelkreises, also für jeden Wert von v, gleich Null werden soll. Das ist insofern keine Spezialisierung, als diese Nebenbedingung immer nachträglich durch Hinzufügen einer infinitesimalen Bewegung erfüllt werden kann, wenn nur der Parallelkreis eine ebene Kurve bleibt. Ein Blick auf (22) zeigt, daß alle Verbiegungen, die das Geforderte leisten, von der Form (23) sein müssen.

Als Randkurven von Kalotten, die mit Erhaltung ebener Berandung verbiegbar sind, treten also nur die durch

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \cdots)$$

oder

$$\cos u = -1 : k$$

gegebenen auf, das sind also „südliche Parallelkreise“, deren Ebenen von der Äquatorebene die Abstände $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ usw. besitzen.

Den zunehmenden Werten von k entsprechen Parallelkreise, die den Äquator $\left(k = \infty, t = 1, u = \frac{\pi}{2}\right)$ als Häufungskurve haben, *aber die halbe, durch den Äquator begrenzte Kugelfläche läßt keine infinitesimale Gleitverbiegung zu,* denn für $t = 1$ ist ζ nach (22) nur dann identisch Null, wenn alle a_k und b_k gleich Null gewählt werden, und dann liegt eine infinitesimale Bewegung vor.

Ob auch endliche stetige Gleitverbiegungen möglich sind, wobei dann nur die angegebenen Kugelkalotten als Objekte solcher Verbiegungen in Betracht kommen, bleibt vorläufig unentschieden.

[1]) Vgl. diese Berichte (1919), S. 281.

3. Man kann noch eine Folgerung ziehen, wenn man sich an den bekannten Zusammenhang erinnert, der eine Beziehung zwischen einer infinitesimalen Verbiegung und einem (endlich verschiedenen) isometrischen Flächenpaar herstellt.

Es stellen nämlich wegen

$$\Sigma (d(x + \varepsilon \xi_k))^2 = \Sigma dx^2 + \varepsilon^2 \Sigma d\xi_k^2 = \Sigma (d(x - \varepsilon \xi_k))^2$$

die Gleichungen

$$x_1 = x + \varepsilon \xi_k, \quad y_1 = y + \varepsilon \eta_k, \quad z_1 = z + \varepsilon \zeta_k$$

und

$$x_2 = x - \varepsilon \xi_k, \quad y_2 = y - \varepsilon \eta_k, \quad z_2 = z - \varepsilon \zeta_k$$

zwei isometrische Flächen dar, die wir uns beide durch die Linie

$$u_k = \pi - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{k},$$

die auf beiden Flächen in der Ebene

$$z = \cos u_k$$

gelegen ist, begrenzt denken. Damit ist die Existenz isometrischer ebenrandiger, übrigens algebraischer Paare von Flächenkalotten nachgewiesen.

4. Die Bestimmung der Verbiegungen zweiter Ordnung für die Kugel ist nunmehr auf elementare Rechnungen und Ausführung von Quadraturen rationaler Funktionen zurückgeführt. In der Tat erhält man aus der Stammgleichung (18) unter Verwendung von (22) für $\zeta^{(1)}$ jetzt eine Differentialgleichung von der Form

$$\begin{aligned} t^2(1-t^4)\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial t^2} + t(1+8t^2-t^4)\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} + (1-t^4)\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial v^2} \\ = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_1^\infty (A_k(t)\cos kv + B_k(t)\sin kv), \end{aligned} \tag{24}$$

wobei die Koeffizienten rechterhand Summen rationaler Funktionen sind. Die rechte Seite ist zunächst aus Produkten und Quadranten trigonometrischer Reihen zusammengesetzt, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von v fortschreiten, und es muß also diese Reihe erst richtig geordnet werden. Dabei hat man folgende Regel einzuhalten:

In jedem Produkt von der Form

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_k\cos kv+b_k\sin kv)\right)\left(\frac{c_0}{2}+\sum_1^{\infty}(c_k\cos kv+d_k\sin kv)\right)$$

drücke man $\cos kv$ und $\sin kv$ aus durch e^{ikv} und e^{-ikv}, ordne jeden der beiden Faktoren nach auf- und absteigenden Potenzen von e^{iv} und multipliziere die so geordneten Reihen aus. Das formal gebildete Produkt ist wieder nach auf- und absteigenden Potenzen von e^{iv} und endlich wieder nach trigonometrischen Funktionen $\cos kv$ und $\sin kv$ zu ordnen.

(24) zerfällt dann, wenn man den Ansatz macht

$$\zeta^{(1)}=\tfrac{1}{2}g_0(t)+\sum_1^{\infty}(g_k(t)\cos kv+h_k(t)\sin kv)$$

wieder in gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form

$$t^2(1-t^4)g_k''(t)+t(1+8t^2-t^4)g_k'(t)-k^2(1-t^4)g_k(t)=A_k(t)$$

und entsprechende Gleichungen für $h_k(t)$.

Die Integration dieser Gleichungen erfordert, da die Lösungen der verkürzten Gleichung vorliegen, nur Quadraturen.

$\zeta^{(1)}$ setzt sich dann zusammen aus den mit neuen Koeffizienten $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ auszustattenden Lösungen der verkürzten Gleichungen und den durch Variation der Konstanten nach dem soeben angegebenen Verfahren berechneten „partikulären Lösungen“ der unverkürzten Gleichung (24).

Dieses partikuläre Integral hat beispielsweise, wenn man von (23) ausgeht, die Gestalt

$$\zeta_k^{(1)}=\tfrac{1}{2}f_0(t)+f_{2k}(t)\cos 2kv.$$

Es lohnt sich wohl, die hier skizzierte, durchaus elementare Rechnung einmal auszuführen und unter Zugrundelegung von ζ_2, $\zeta_2^{(1)}$ und weiter $\zeta_2^{(2)}$ zu berechnen; man muß dann Flächen erhalten, die in beträchtlicher Umgebung des Nordpols gute „Modellgenauigkeit“, d. h. nahezu konstantes Krümmungsmaß Eins besitzen, um dann freilich beim Überschreiten des Parallelkreises $t = \sqrt{3}$ starke Abweichungen zu erleiden und sich (für $t = \infty$) ins Unendliche zu erstrecken.

Noch andere Untersuchungen können daran geknüpft werden, z. B. wäre es von Interesse, festzustellen, ob man auf diesem Wege vielleicht Flächen mit ebenen Krümmungslinien erhalten kann, die dann starke Annäherung an die Enneperschen Flächen aufweisen würden.

§ 6. Verbiegungen konvexer Rotationsflächen und anderer konvexer Flächen.

1. Wir haben bisher von der Verwendung der Weingartenschen Funktion φ abgesehen. Jetzt werden wir zur Bestimmung der infinitesimalen Verbiegungen konvexer geschlossener Rotationsflächen von ihr Gebrauch machen aus einem bald (am Schluß von Nr. 2) näher zu erläuternden Grund.

Bedient man sich derselben Flächenkoordinaten u, v wie in (§ 4) nämlich der sphärischen Koordinaten (Poldistanz und Länge) des bei der Abbildung durch parallele Normalen entstehenden sphärischen Bildes

$$X = \sin u \cos v, \quad Y = \sin u \sin v, \quad Z = \cos u,$$

dann wird[1])

$$D = -\varrho, \quad D' = 0, \quad D'' = -r \sin u,$$

und die Differentialgleichung für φ wird

$$\sin u(r\varphi_{11} + \varrho \cos u\, \varphi_1) + \varrho\, \varphi_{22} + \varphi \sin u(r + \varrho \sin u) = 0. \tag{25}$$

Diese Gleichung ist wieder durch den periodischen Ansatz

$$\varphi(u, v) = \tfrac{1}{2} f_0(u) + \sum_1^{\infty} (f_k(u) \cdot \cos k v + g_k(u) \sin k v)$$

auf gewöhnliche lineare Gleichungen zurückzuführen, indem man Koeffizientenvergleichung anwendet, und man erhält sowohl für f_k wie für g_k die Bedingung:

---

[1]) Vgl. Bianchi, a. a. O., S. 294 ff.

$$\sin u\,(r f_k''(u) + \varrho \cos u\, f_k'(u)) + f_k(u)\,(r \sin u + \varrho \sin^2 u - \varrho k^2) = 0.$$

Singuläre Stellen sind nur die Achsenendpunkte ($u = 0$ und $u = \pi$). Führt man ein

$$t = \operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

so nimmt die Gleichung die Form an

$$(t^2 + \cdots)\frac{d^2 f_k}{d t^2} + (t + \cdots)\frac{d f_k}{d t} - (k^2 + \cdots) f_k = 0,$$

also gibt es zwei Fundamentallösungen

$$t^k F_k(t), \quad t^{-k} G_k(t),$$

wobei $F_k(t)$ und $G_k(t)$ für alle endlichen Werte von t konvergieren. Benützt man jedesmal die erste Lösung, so erhält man eine auf der ganzen Fläche mit Ausnahme des Südpoles ($t = \infty$) reguläre Weingartensche Funktion.

2. Man entnimmt hieraus, daß die konvexe Rotationsfläche analytische infinitesimale Verbiegungen zuläßt, die überall mit Ausnahme eines der beiden Pole regulär sind. Man wird also auf den Satz geführt: *Jede konvexe geschlossene Rotationsfläche läßt reguläre infinitesimale Verbiegungen zu, sobald man in sie ein beliebig kleines, einen der beiden Pole ausschaltendes Loch geschnitten hat.*

Dieser Satz bedarf aber, damit sein Beweis bindend wird, noch einiger ergänzenden Betrachtungen. Man muß nämlich den Nachweis erbringen, daß der Regularitätsbereich der infinitesimalen Verbiegungen mit dem Regularitätsreich der Funktion φ zusammenfällt. Wir betrachten zu diesem Zweck den Zusammenhang von φ mit den Komponenten ξ, η, ζ der infinitesimalen Verbiegung. φ ist nach Volterra die nach der Normale genommene Komponente der infinitesimalen Drehung, die ein Element der Fläche erleidet. Bezeichnet man die Komponenten der Drehung wieder mit X, Y, Z (wie in § 1), so wird also

$$\varphi = \frac{\chi}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

wobei gesetzt ist

$$\chi = pX + qY - Z,$$

und es ist nach (1)

$$\xi_1 = -p\zeta_1, \quad \xi_2 = \chi - p\zeta_2, \quad \eta_1 = -q\zeta_1 - \chi, \quad \eta_2 = -q\zeta_2.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach y und die zweite nach x, so erhält man

$$r\zeta_2 - s\zeta_1 = \chi_1,$$

und ebenso

$$s\zeta_2 - t\zeta_1 = \chi_2.$$

(Nebenbei bemerkt, folgt aus diesen beiden Gleichungen einerseits wieder (9), anderseits die partielle Differentialgleichung für χ und damit für φ, freilich in spezieller Gestalt, weil x und y, nicht die allgemeinen Flächenkoordinaten u und v als unabhängige Veränderliche gewählt sind.)

Man erhält dann aus φ oder χ die ξ, η, ζ durch Quadraturen. Nimmt man eine bestimmte Lösung φ, so sind diese Komponenten sicher soweit regulär, als die Formeln anwendbar sind, d. h. die z-Achse nicht zur Tangentialebene parallel ist, also vom Nordpol bis zum größten Parallelkreis. Dort hat man dann zu einem neuen rechtwinkligen Achsensystem überzugehen, zu dessen z-Achse man die (auf der Drehachse senkrechte) Normale wählt. Man kann im Sinne von Hilbert[1]) „schalenförmige Verschmelzung" der Regularitätsgebiete vornehmen, d. h. die Fläche in vier einander zum Teil überdeckende Gebiete zerlegt denken, so daß kein Punkt, ausgenommen den auch für φ singulären Südpol, außerhalb aller Regularitätsgebiete liegt. Hieraus folgt dann, daß ξ, η, ζ sich tatsächlich überall mit Ausnahme des Südpols regulär verhalten.

Damit ist der zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz bewiesen.

[1]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen VI (Gött. Nachr. 1910, 355—419).

Im Anschluß hieran sind noch zwei Bemerkungen zu machen. Zunächst eine geometrische Folgerung: Die Methode von § 5, Nr. 3 führt hier auf endlich verschiedene Paare offener, aber mit beliebig kleiner Öffnung versehener isometrischer, konvexer Flächenschalen, freilich ohne daß ein Verbiegungsvorgang angegeben wird.

Ferner: Die Weingartensche Funktion, deren voller Regularitätsbereich in Nr. 1 erwiesen werden konnte, gibt, wie unsere Betrachtungen zeigen, ein viel besseres Hilfsmittel an die Hand, als durch die aus (17) folgende Gleichung:

$$r \sin u \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + r\left(1 + \sin^2 u - \frac{\varrho'}{\varrho} \sin u \cos u\right) \frac{\partial \zeta}{\partial u}$$
$$+ (\varrho \cos u + \varrho' \sin u) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0$$

gegeben ist.

Für die allgemeine Untersuchung dieser Gleichung wäre nämlich der größte Parallelkreis $\left(u = \frac{\pi}{2},\quad \cos u = 0\right)$ ein Hindernis, eine Schranke, über die erst die Weingartensche Funktion hinweghilft.

3. In diesen Zusammenhang gehört noch die Bemerkung, daß nicht nur die „angebohrte" Kugel, sondern auch die mit einer beliebig kleinen Öffnung versehene Ellipsoidfläche infinitesimale Verbiegungen zu lassen. Dasselbe gilt für die zu konvexen Rotationsflächen affinen Flächen, wenn man zuvor das einer Polkappe entsprechende Stück ausgeschnitten hat.

Alle diese Sätze folgen sofort aus dem bekannten Umstand, daß die Grundgleichung der infinitesimalen Verbiegung, nämlich

$$(1') \qquad dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0$$

bei den kontragredienten linearen Substitutionen

$$x = a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_1 = a_{11} \xi + a_{21} \eta + a_{31} \zeta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

unverändert bleibt, womit dann jede reguläre infinitesimale Verbiegung einer Fläche zugleich entsprechende Verbiegungen für affine Flächen an die Hand gibt.

In diesem Sinne führt dann z. B. § 5, Nr. 3 durch Anwendung von Affinität auf die Konstruktion von Ellipsoidkalotten, die Gleitverbiegungen zu lassen.

So erhält denn der Bestand an verbiegbaren Flächenstücken einen beträchtlichen Zuwachs — doch wird es noch mancher Untersuchungen bedürfen, bis die analytische Begründung dem nachkommt, was für die Anschauung als Gewißheit bezeichnet werden kann[1]).

4. Wir wollen noch ein letztes Beispiel bedingter infinitesimaler Verbiegung behandeln, nämlich allgemein die Gleitverbiegung konvexer Flächenkalotten in Angriff nehmen.

Dabei wollen wir die Fragestellung noch etwas verallgemeinern: Wir suchen nach einfachen Eigenschaften der Kurven, längs deren eine Komponente der infinitesimalen Verschiebung, z. B. ζ, gleich Null ist. (Ist eine solche *Nullkurve* eben, dann liegt eine Gleitverbiegung vor.)

Über die Nullkurven gibt nun die Differentialgleichung (9) in sehr allgemeiner Weise Aufschluß. Entwickelt man ζ nach Potenzen von $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, wobei x_0, y_0 (z_0) ein Punkt der Fläche ist, in dem r, s, t die Werte r_0, s_0, t_0 haben mögen, so kommt aus (9) für die Glieder niedrigster Ordnung die Differentialgleichung

$$t_0 \zeta_{11}^{(m)} - 2 s \zeta_{12}^{(m)} + r_0 \zeta_{22}^{(m)} = 0.$$

Dabei ist unter Voraussetzung der Konvexität

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0,$$

daher $\zeta^{(m)}$ indefinit und ζ (x_0, y_0) also kein extremer Wert. Im Regularitätsgebiet, wo die Entwickelung konvergiert, hat also ζ kein Maximum und kein Minimum.

---

[1]) Es ist zu erwarten, daß jede Eifläche, aus der ein beliebig kleines Stück herausgeschnitten ist, verbogen werden kann.

Dieses Gebiet kann so gewählt werden:

Ein beliebiger Punkt 0 der Fläche wird zum Koordinatenanfang gewählt und die Tangentialebene daselbst als xy-Ebene; es reicht dann bis zu den Punkten der Fläche, in denen die Tangentialebene zur z-Achse, d. h. der Normale in 0 parallel ist.

Es ergibt sich also, daß die Komponente der infinitesimalen Verschiebung in einer bestimmten Richtung ihre Extreme nicht erreichen kann diesseits der Eigenschattengrenze, die bei Beleuchtung parallel zu dieser Richtung auftritt. ζ kann nicht längs einer innerhalb dieser Grenze gelegenen geschlossenen Kurve gleich Null sein, ohne daß die Verbiegung in eine Bewegung ausartet. Dagegen kann ζ gleich Null werden längs einer geschlossenen Kurve, die im Eigenschattengebiet liegt. Doch kennt man Einzelheiten hierüber nicht, abgesehen von den Gleitverbiegungen für Kugel und Ellipsoid, die wir im Laufe unserer Untersuchungen kennen gelernt haben (§ 5, Nr. 2 und § 6, Nr. 3).

Durch Anwendung des schon in § 5, Nr. 3 gebrauchten Verfahrens lassen sich noch weitere Schlüsse ziehen [1]). Zwei isometrische Flächenkalotten, deren Ränder in derselben Ebene liegen, führen zur Konstruktion einer infinitesimalen Gleitverbiegung der „Mittelfläche", d. h. des Ortes des Mittelpunkts der Verbindungsstrecken entsprechender Punktepaare. Aus dem soeben für infinitesimale Gleitverbiegungen bewiesenen Satze folgt also:

Eine Flächenkalotte durchweg positiver Krümmung, deren bei der Abbildung durch parallele Normalen erhaltenes sphärisches Bild innerhalb eines Hauptkreises der Kugel liegt, läßt keine endliche stetige Gleitverbiegung zu.

Dieser Satz hat sein Gegenstück in der Lehre von den Polyederdeformationen. Ein Polyederdeckel, das heißt eine von ebenem, offenem Rand begrenzte konvexe Polyederhaube (S), die in Verbindung mit dem Spiegelbild (S') an der Ebene der

[1]) Vgl. diese Berichte (1919), S. 282—284.

Randkurve ein geschlossenes konvexes Polyder $(S + S')$ bildet, kann auch keine „Gleitverbiegung“ zulassen, bei der das offene Randpolygon eben bleibt; denn hieraus würde, in Widerspruch zum Cauchyschen Polyedersatz, die Deformation von $(S + S')$ folgen.