

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I

Januar- bis März Sitzung

München 1920

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Neuberechnung des südlichen Netzteiles der bayerischen Landestriangulierung zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen.

Von **M. Schmidt.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1920.

In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse vom 10. Januar bringt Professor M. Schmidt eine von ihm veranlaßte umfangreiche Rechenarbeit des Assistenten am geodätischen Institut der Technischen Hochschule, Dr. Ing. Adolf Schlötzer in Vorlage, welche eine Neuberechnung des südlichen Teiles des bayerischen Hauptdreiecksnetzes zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen zum Gegenstand hat und in ihren Ergebnissen einen Beitrag zum Nachweis der bei gruppenweiser Ausgleichung umfangreicher Dreiecksnetze auftretenden sogenannten Netzverschiebungsfehler liefert.

Die Fehlerausgleichung des 121 Hauptdreieckspunkte umfassenden Netzes der bayerischen Landesvermessung ist ursprünglich durch Soldner nach einem als Tatonieren bezeichneten empirischen Verfahren vorgenommen worden, bei welchem die beobachteten Winkel derart verbessert wurden, daß zwar die bestehenden geometrischen Netzbedingungen erfüllt sind, nicht aber zugleich die kleinstmöglichen Werte dieser Verbesserungen erhalten werden.

Gelegentlich der Veröffentlichung der Ergebnisse der Landesvermessung im Jahre 1873 hat der Bearbeiter dieses großen, im amtlichen Auftrag herausgegebenen Werkes eine systematische Ausgleichung der Winkelmessungen nach bedingten Beobachtungen ausführen lassen, wobei die große Zahl der be-

stehenden Bedingungsgleichungen — es waren gegen 1000 Stationswinkelbedingungen und 651 Netzwinkel- und Seitengleichungen zu erfüllen — bei gleichzeitiger Auflösung eine kaum zu bewältigende Rechenarbeit verursacht hätte.

Der Bearbeiter dieses Werkes, Oberst Carl von Orff, sah sich deshalb veranlaßt die Ausgleichung des Netzes in 32 Einzelgruppen von Dreiecken vorzunehmen, welche unter sich durch Anschlußbedingungen verbunden sind.

Hiedurch war eine Fehlerübertragung von einer Gruppe zur anderen bedingt und die Möglichkeit von Punktverschiebungen für ganze Netzteile gegeben.

Bei den in den letzten Jahren durch den Berichterstatter ausgeführten Untersuchungen über die im Laufe der Zeit etwa eingetretenen tektonischen Höhen- und Lageänderungen von festen Messungspunkten im südbayerischen Voralpengebiet war es von Wichtigkeit festzustellen, ob die bei einigen diesem Gebiete angehörenden Netzpunkten auftretenden Lageänderungen sich nicht als durch die Rechnung entstandene Netzfehler erklären lassen könnten.

Ein sicheres Urteil hierüber war nur dadurch zu gewinnen, daß man die bei der Berechnung der Landesvermessung durch die gruppenweise ausgeführte Netzausgleichung gefundenen Koordinaten mit den aus einer neu auszuführenden Gesamtausgleichung des Netzes ermittelten Koordinatenwerten in Vergleich brachte, wobei natürlich beiden Ausgleichungen die gleichen Ausgangswinkelwerte und Gewichte, sowie dieselbe Basislänge und Orientierung zugrunde gelegt werden mußte.

Diese Aufgabe hat Dr. Schlötzer, wenn auch nicht für das ganze Hauptdreiecksnetz, so doch für den südlich der Donau gelegenen Teil gelöst und den Nachweis erbracht, daß in der Tat durch die gruppenweise Netzausgleichung Punktverschiebungen von bemerkenswerter Größe entstanden sind.

Die Zahl der dieser Untersuchung unterzogenen Hauptnetzpunkte beträgt 42. Von diesen sind indessen die beiden Endpunkte der oberbayerischen Grundlinie München—Aufkirchen als unveränderte Ausgangspunkte angenommen worden,

sodaß nur für die noch übrigen 40 Punkte die Neuberechnung der Koordinaten vorzunehmen war.

Hiebei sind die Koordinaten der Landesvermessung als Näherungswerte eingeführt und unter Verwendung der aus den früheren Stationsausgleichungen hervorgegangenen Winkel die wahrscheinlichsten Werte jener Koordinatenverbesserungen berechnet worden, welche sich durch die sogenannte Koordinatenausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben.

Für die Näherungskordinaten der ausgewählten 40 Hauptnetzpunkte sind sodann $2 \times 40 = 80$ Koordinatenverbesserungen dx und dy derart berechnet worden, daß die aus 274 Fehlergleichungen folgenden Richtungsverbesserungen der sie verbindenden Netzlinien der Bedingung der kleinsten Quadratsumme genügen und sich zugleich eine widerspruchsfreie gegenseitige Orientierung dieser Linien ergibt.

Zu diesem Zweck waren aus 120 Bedingungsgleichungen ebensoviele Unbekannte im Zusammenhang zu berechnen. Von diesen Gleichungen konnten indessen 40 zur Berechnung der Orientierungsverbesserungen der Netzlinien dienende Gleichungen abgetrennt und für sich behandelt werden, während die übrigen 80 Gleichungen zur Berechnung der 80 Koordinatenverbesserungen dx und dy dienten.

Die Auflösung dieses Systems von 80 Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten nach dem Gaußschen Algorithmus hat eine sehr umfangreiche Rechenarbeit erfordert. Zur Reduktion des Gleichungssystems war die Bildung von 60330 Koeffizienten-Produkten vorzunehmen und zur Auflösung der sich ergebenden 80 reduzierten Normalgleichungen die Berechnung von 2874, meist 6 und 7 zifferigen Zahlenkoeffizienten und von 80 Absolutgliedern mit der gleichen Stellenzahl auszuführen.

Die Auflösung wurde doppelt, unabhängig und gleichzeitig von zwei aus einem Rechner und einem Aufschreiber bestehenden Rechengruppen mit Rechenmaschinen vom System „Brunsviga“ im Laufe des vergangenen Jahres ausgeführt.

Die Zahl der hiezu nötigen Kurbeldrehungen der Maschinen ist auf mehr als zweieinhalb Millionen zu schätzen.

Die aus der Ausgleichung folgenden Abszissen- und Ordinatenverbesserungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt und haben Werte bis zum Betrag von $dy = -0,787$ m bei der Pyramide von Braunau am Inn und $dx = -0,844$ m bei dem Signal Rohr erreicht.

Tabelle 1.

Aus der Netzausgleichung hervorgegangene Koordinatenverbesserungen.

Station	Verbesserung in m	Station	Verbesserung in m
Schweitenkirchen T.	$\begin{cases} dy_3 = -0,104 \\ dx_3 = -0,123 \end{cases}$	Haunsberg P.	$\begin{cases} dy_{13} = -0,690 \\ dx_{13} = -0,398 \end{cases}$
Attenhausen T. . .	$\begin{cases} dy_4 = +0,290 \\ dx_4 = -0,104 \end{cases}$	Hohenstaufen Sig. .	$\begin{cases} dy_{14} = -0,460 \\ dx_{14} = -0,506 \end{cases}$
Dreifaltigkeit T. . .	$\begin{cases} dy_5 = -0,344 \\ dx_5 = -0,576 \end{cases}$	Watzmann Sig. . .	$\begin{cases} dy_{15} = -0,421 \\ dx_{15} = -0,633 \end{cases}$
Haid T.	$\begin{cases} dy_6 = -0,173 \\ dx_6 = -0,686 \end{cases}$	Hochgern Sig. . . .	$\begin{cases} dy_{16} = -0,266 \\ dx_{16} = -0,423 \end{cases}$
Johannsbrunn T. . .	$\begin{cases} dy_7 = -0,005 \\ dx_7 = +0,102 \end{cases}$	Wendelstein P. . .	$\begin{cases} dy_{17} = -0,088 \\ dx_{17} = -0,275 \end{cases}$
Mitbach T.	$\begin{cases} dy_8 = +0,006 \\ dx_8 = +0,040 \end{cases}$	Rettenstein P. . . .	$\begin{cases} dy_{18} = +0,012 \\ dx_{18} = -0,164 \end{cases}$
Braunau P.	$\begin{cases} dy_9 = -0,787 \\ dx_9 = +0,288 \end{cases}$	Rofan P.	$\begin{cases} dy_{19} = -0,131 \\ dx_{19} = -0,151 \end{cases}$
Schnaitsee T.	$\begin{cases} dy_{10} = -0,181 \\ dx_{10} = -0,006 \end{cases}$	Edkor P.	$\begin{cases} dy_{20} = -0,374 \\ dx_{20} = -0,169 \end{cases}$
Asten T.	$\begin{cases} dy_{11} = -0,478 \\ dx_{11} = +0,014 \end{cases}$	Benediktenwand S.	$\begin{cases} dy_{21} = -0,204 \\ dx_{21} = -0,412 \end{cases}$
Oberweißenk. T. . .	$\begin{cases} dy_{12} = -0,421 \\ dx_{12} = -0,093 \end{cases}$	Hochplatte P. . . .	$\begin{cases} dy_{22} = +0,161 \\ dx_{22} = -0,381 \end{cases}$

Station	Verbesserung in m	Station	Verbesserung in m
Grüntes P.	$\begin{cases} dy_{23} = +0,052 \\ dx_{23} = -0,299 \end{cases}$	Castlberg Sig. . . .	$\begin{cases} dy_{33} = -0,223 \\ dx_{33} = -0,333 \end{cases}$
Edelsberg P.	$\begin{cases} dy_{24} = +0,042 \\ dx_{24} = -0,217 \end{cases}$	Rohr Sig.	$\begin{cases} dy_{34} = +0,073 \\ dx_{34} = -0,844 \end{cases}$
Änger P.	$\begin{cases} dy_{25} = +0,238 \\ dx_{25} = +0,074 \end{cases}$	Altomünster T. . .	$\begin{cases} dy_{35} = -0,089 \\ dx_{35} = -0,115 \end{cases}$
Kronburg T.	$\begin{cases} dy_{26} = +0,157 \\ dx_{26} = +0,227 \end{cases}$	Günzelhofen T. . .	$\begin{cases} dy_{36} = -0,171 \\ dx_{36} = +0,146 \end{cases}$
Schöneegg P.	$\begin{cases} dy_{27} = -0,115 \\ dx_{27} = +0,382 \end{cases}$	Georgenberg T. . .	$\begin{cases} dy_{37} = -0,023 \\ dx_{37} = -0,214 \end{cases}$
Roggenburg s. T. . .	$\begin{cases} dy_{28} = -0,202 \\ dx_{28} = +0,125 \end{cases}$	Eschers P.	$\begin{cases} dy_{38} = +0,051 \\ dx_{38} = +0,029 \end{cases}$
Kirchheim T.	$\begin{cases} dy_{29} = +0,044 \\ dx_{29} = +0,178 \end{cases}$	Hauptmannsgreith P.	$\begin{cases} dy_{39} = +0,018 \\ dx_{39} = -0,102 \end{cases}$
Klimach T.	$\begin{cases} dy_{30} = -0,119 \\ dx_{30} = +0,126 \end{cases}$	Auerberg T.	$\begin{cases} dy_{40} = +0,158 \\ dx_{40} = -0,180 \end{cases}$
Stauffersberg P. . .	$\begin{cases} dy_{31} = -0,184 \\ dx_{31} = -0,016 \end{cases}$	Wehringen P. . . .	$\begin{cases} dy_{41} = -0,189 \\ dx_{41} = +0,074 \end{cases}$
Pöttmes P.	$\begin{cases} dy_{32} = -0,009 \\ dx_{32} = -0,221 \end{cases}$	Peißenberg T. . . .	$\begin{cases} dy_{42} = +0,126 \\ dx_{42} = -0,219 \end{cases}$

Die Werte mit gleichem Vorzeichen zeigen eine ins Auge fallende Gruppierung. Sie finden sich besonders im südöstlichen Netztesile gehäuft und lassen hier einseitige Punktverschiebungen deutlich erkennen, die durch ungünstige Fehleranhäufung in der älteren Ausgleichung ihre Erklärung finden.

Im Laufe der Zeit eingetretene Lageänderungen der Netzpunkte in der Natur kommen hier nicht in Betracht, da die ältere und die neuere Ausgleichung dieselben Winkelbeobachtungen zur gemeinsamen Grundlage haben. Hinsichtlich der Größe der gefundenen Koordinatenänderungen ist noch zu bemerken, daß die von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern

bedingte Unsicherheit der Koordinaten- und der Lagebestimmung der Netzpunkte nach der Größe der mittleren Fehler beurteilt werden muß, welche sich aus den mittleren Richtungsfehlern der die Lage der Punkte bedingenden Schnittstrahlen berechnen lassen.

Die Neuausgleichung ergibt mittlere Richtungs- und Winkelfehler von $\pm 1,28$ bzw. $\pm 1,80$ gegenüber den analogen Werten der Landesvermessung $\pm 1,52$ und $\pm 2,14$, während nach der internationalen Formel aus 337 Dreiecksschlußfehlern der Landesvermessung der mittleren Winkelfehler $\pm 1,77$ wird. Diese gute Übereinstimmung des mittleren Winkelfehlers der Neuausgleichung des südlichen Netztes mit dem Fehler des Gesamtnetzes beweist auch die Gleichwertigkeit der im südlichen Netzteil mit Multiplikationskreisen von Borda, im übrigen Netz aber größtenteils mit Reichenbachschen Repetitionstheodoliten ausgeführten Winkelmessungen.

Die mittleren Fehler der berechneten Koordinaten sind für die Netzpunkte der Landesvermessung ursprünglich nicht ermittelt worden. Da dieselben indessen von großer Bedeutung sind, so sind sie für den neuausgeglichene Netzteil bestimmt worden. Die Berechnung erfolgte aus den mittleren Richtungsfehlern der Schnittstrahlen durch Auflösen der sogenannten Gewichtsgleichungen. Die vollständige Ausrechnung der hierzu nötigen 80 Gleichungssysteme würde die Bildung von ungefähr 330 000 Koeffizientenprodukten erfordert haben.

Um diese Rechenarbeit auf ein erträgliches Maß einzuschränken, ist die Rechnung vorerst nur für 16 Netzpunkte durchgeführt worden und hat durchschnittliche Fehlerwerte von $m_x = \pm 0,29$ m und $m_y = \pm 0,39$ m ergeben.

Die nachstehenden Werte dürften genügen, um die Unsicherheit der ursprünglichen Lagebestimmung der Dreieckspunkte der Landesvermessung zu beurteilen, wenn es sich darum handelt, bei einer Neutriangulierung etwaige Lageänderungen dieser Punkte durch inzwischen eingetretene tektonische Schollenbewegungen der Erdkruste festzustellen.

Tabelle 2.

Aus der Auflösung der Gewichtsgleichungen folgende
mittlere Koordinatenfehler.

Station	mittl. Koordinaten- fehler in		Station	mittl. Koordinaten- fehler in	
	x	y		x	y
	m	m		m	m
Peißenberg . . .	$\pm 0,29$	$\pm 0,29$	Rohr	$\pm 0,40$	$\pm 0,26$
Wehringen . . .	$\pm 0,21$	$\pm 0,39$	Castlberg . . .	$\pm 0,29$	$\pm 0,18$
Auerberg	$\pm 0,35$	$\pm 0,41$	Pöttmes	$\pm 0,29$	$\pm 0,31$
Hauptmanns- greith	$\pm 0,39$	$\pm 0,54$	Staufersberg .	$\pm 0,26$	$\pm 0,42$
Eschers	$\pm 0,36$	$\pm 0,57$	Klimach	$\pm 0,23$	$\pm 0,41$
Georgenberg . .	$\pm 0,30$	$\pm 0,42$	Kirchheim . . .	$\pm 0,26$	$\pm 0,51$
Günzelhofen . .	$\pm 0,14$	$\pm 0,21$	Roggenburg . .	$\pm 0,32$	$\pm 0,62$
Altomünster . .	$\pm 0,18$	$\pm 0,18$	Schöneegg . . .	$\pm 0,35$	$\pm 0,60$
			Mittelwerte	$\pm 0,29$ $= m_x$	$\pm 0,39$ $= m_y$