Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Kanalflächen.

Von A. Voss.

Vorgelegt in der Sitzung am 15. November 1919.

Eine Kanalfläche hängt im allgemeinen von drei willkürlichen Funktionen, den Radien R und T der Krümmung und Windung der Kurve C, welche die Mittelpunkte P ihrer erzeugenden Kugeln mit dem Radius r durchlaufen. R, T und r können dabei als Funktionen der Bogenlänge u der Kurve C angesehen werden. Im folgenden soll nun die Vorstellung festgehalten werden, daß die Fläche dadurch deformiert wird, daß T beliebig geändert wird, während R und r als Funktionen von u ungeändert bleiben. Bei allen diesen „Deformationen" der Kanal-, im speziellen bei konstantem r Röhrenflächen, bleiben die Hauptkrümmungshalbmesser derselben in entsprechenden Punkten ungeändert, wie im folgenden außer einigen andern Sätzen gezeigt werden soll.

§ I.

Die Gleichung der Kanal- und Röhrenflächen.

Unter einer Kanalfläche versteht man das Umhüllungsgebilde der Kugeln vom Radius r, deren Mittelpunkte eine Kurve C im Raume durchlaufen; dem speziellen Falle $r =$ konst entsprechen die Röhrenflächen. Die Koordinaten des Punktes P von C seien x, y, z, die eines zugehörigen Punktes Q der Umhüllungsfläche seien X, Y, Z. Dann hat man zur Bestimmung von X, Y, Z die beiden Gleichungen

$$
1) \quad \begin{cases} (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = r^2 \\ (X-x)\,\alpha + (Y-y)\,\beta + (Z-z)\,\gamma = -r r' \end{cases}
$$

in denen α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente von C im Punkte P bedeuten; r' ist die Ableitung von r nach u. Zur Auflösung von 1) führen wir die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale von C im Punkte P, nämlich

$$
\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,
$$

ein, so daß der Punkt Q in Bezug auf das charakteristische Triëder von C die relativen Koordinaten A, B, C erhält. Dann ist

$$
2) \quad \begin{cases} X - x = A\alpha + B\xi + C\lambda \\ Y - y = A\beta + B\eta + C\mu \\ Z - z = A\gamma + B\zeta + C\nu \end{cases}
$$

wobei zwischen den Ableitungen der Richtungscosinus des Triëders die Frenetschen Formeln

$$
\alpha' = \frac{\xi}{R}, \quad \xi' = -\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\lambda}{T}\right), \quad \lambda' = \frac{\xi}{T}
$$

nebst den durch Vertauschung der α, ξ, λ mit den β, η, μ; γ, ζ, ν entspringenden gelten. Nach 2) erhält man aus 1)

$$
\begin{gathered} A^2 + B^2 + C^2 = r^2 \\ A = -r r' \end{gathered}
$$

so daß

$$
3) \quad B = \varepsilon \cos v, \quad C = \varepsilon \sin v
$$

wird, falls

$$
4) \quad \varepsilon = +r\sqrt{1 - r'^2}
$$

gesetzt wird. Dabei ist jetzt v der Winkel, den die Projektionen von PQ auf die Normalebene der Kurve C im Punkte P mit der Hauptnormalen von C bildet. Setzt man noch

$$
5) \quad \omega = r r'
$$

so ist

$$
6) \quad \begin{cases} X - x = -\alpha\omega + \varepsilon(\xi \cos v + \lambda \sin v) \\ Y - y = -\beta\omega + \varepsilon(\eta \cos v + \mu \sin v) \\ Z - z = -\gamma\omega + \varepsilon(\zeta \cos v + \nu \sin v) \end{cases}
$$

und zugleich sind die Richtungscosinus Ξ, H, Z der Geraden PQ, oder der Normale der Kanalfläche im Punkte Q durch

$$
7)\qquad \begin{cases} \Xi = -\alpha r' + \sqrt{1-r'^2}\,(\xi\cos v + \lambda\sin v) \\ H = -\beta r' + \sqrt{1-r'^2}\,(\eta\cos v + \mu\sin v) \\ Z = -\gamma r' + \sqrt{1-r'^2}\,(\zeta\cos v + \nu\sin v) \end{cases}
$$

gegeben.

Die von den Punkten Q auf der Fläche bei konstantem u gebildete Kurve ist nach 1) der Kreis vom Radius ε, dessen Mittelpunkt im Abstande ω auf der (positiven) Tangente von C in P liegt und dessen Ebene auf dieser Tangente senkrecht steht. Er ist eine Krümmungslinie der Kanalfläche; die Richtungscosinus von PQ gegen die Axen des Triëders sind $-r'$, $\sqrt{1-r'^2}\cos v$, $\sqrt{1-r'^2}\sin v$.

§ II.

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche e, f, g.

Nach diesen unmittelbar evidenten Bemerkungen bestimmen wir die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Kanalfläche. Nach § I, 6 hat man

$$
1)\qquad \begin{cases} X_u = \alpha\left(1-\omega_u-\varepsilon\dfrac{\cos v}{R}\right)+\xi\left(-\dfrac{\omega}{R}+\varepsilon_u\cos v+\varepsilon\sin v\right) \\ \qquad\qquad +\lambda\left(\varepsilon_u\sin v-\varepsilon\dfrac{\cos v}{T}\right) \\ X_v = \varepsilon(-\xi\sin v+\lambda\cos v) \end{cases}
$$

wobei unter dem angefügten Index u, v jedesmal die Ableitung nach u verstanden werden soll. Aus 1) folgt:

$$
2)\qquad \begin{cases} e = \left(1-\omega_u-\varepsilon\dfrac{\cos v}{R}\right)^2+\left(-\dfrac{\omega}{R}+\varepsilon_u\cos v+\varepsilon\dfrac{\sin v}{T}\right)^2 \\ \qquad\qquad +\left(\varepsilon_u\sin v-\varepsilon\dfrac{\cos v}{T}\right)^2 \\ f = \varepsilon\left(\dfrac{\omega}{R}\sin v-\dfrac{\varepsilon}{T}\right) \\ g = \varepsilon^2 \end{cases}
$$

Die Werte von f und g sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen Ableitungen nach u von ε überhaupt nicht auftreten. Aber dasselbe gilt auch für e, das nach einigen Umformungen die übersichtliche Gestalt

$$2') \qquad e = \left(\frac{1-\omega_u}{\sqrt{1-r'^2}} - \frac{r\cos v}{R}\right)^2 + \left(\omega\frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right)^2$$

annimmt. Setzt man noch

$$3) \qquad \frac{1-\omega_u}{\sqrt{1-r'^2}} - \frac{r\cos v}{R} = P, \quad \left(\omega\frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) = Q$$

so erhält man

$$4) \qquad \begin{cases} e = P^2 + Q^2 \\ f = \varepsilon Q \\ g = \varepsilon^2 \end{cases}$$

und somit für das Quadrat des Längenelementes der Fläche ds^2 und den Winkel θ der Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$,

$$5) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= (P^2 + Q^2)\,du^2 + 2\,\varepsilon\,Q\,du\,dv + \varepsilon^2\,dv^2 \\ &= P^2\,du^2 + (Q\,du + \varepsilon\,dv)^2 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Aus 5) folgt:

Die zweite Schar der Krümmungslinien der Fläche ist durch die Gleichung

$$Q\,du + \varepsilon\,dv = 0$$

bestimmt.

Aber auch die Kurven u, v selbst haben eine Eigenschaft, die von Interesse ist. Da nämlich nach 4)

$$6) \qquad eg - f^2 = \varepsilon^2 P^2$$

ist, und P nach 3) von T unabhängig ist, ergibt sich der Satz:

Durch die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ werden alle deformierten Flächen in flächentreuer Weise aufeinander abgebildet[1]).

[1]) In besonderen Fällen, wie z. B. bei der Röhrenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie, die für $T = \infty$ in einen geschlossenen Ring übergeht, wird die äquivalente Abbildung sich unendlich oft wiederholen.

Endlich ist auch $\operatorname{tg}\theta = \frac{P}{Q}$.

Für den Fall $P = 0$ wird $eg - f^2 = 0$. In der allgemeinen Flächentheorie pflegt man anzunehmen, daß bei Voraussetzung reeller Koordinatenwerte, die auch hier allein in Betracht gezogen werden sollen, $eg - f^2$ von Null verschieden sei, so daß die aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Funktional-Determinanten nach u, v nicht gleichzeitig verschwinden, also auch eine unmittelbar bestimmte Tangentenebene vorhanden ist. Eine solche ist aber auch hier vorhanden, nämlich die Normalebene im Punkte Q. Die von diesen Punkten Q gebildete Kurve auf der Kanalfläche ist die — allerdings nicht notwendig reelle — Rückkehrkurve der Kanalfläche. Fügt man nämlich den Gleichungen 1) des § I noch die weitere durch Differentiation der zweiten Gleichung daselbst entstehende

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = (1 - \omega_u) R$$

hinzu, so ergibt sich nach § I, 6

$$\frac{\varepsilon \cos v}{R} = \frac{1 - \omega_u}{\sqrt{1 - r'^2}}$$

oder $P = 0$.

Der Ausdruck $eg - f^2$ ist übrigens auch dann Null, wenn $\varepsilon = 0$, oder, da r als von Null verschieden angenommen werden muß, wenn $r = \pm(u + c)$ gewählt ist. Setzt man $r = u + c$, $\omega = u + c$, so wird

$$X = x - \alpha(u + c), \quad Y = y - \beta(u + c), \quad Z = z - \gamma(u + c)$$

also ergibt sich gar keine Fläche, sondern nur eine Kurve Γ, deren Punkte Q auf der Tangente von C dem Punkte P zugeordnet sind, und das analoge Resultat folgt für $r = c_1 - u$. Dabei wird dann (es mag nur $r = u + c$ gesetzt werden)

$$X_u = -\frac{\xi(u+c)}{R}$$

also die Bogenlänge S der Kurve Γ bestimmt durch

$$\frac{dS}{du} = \frac{|u+c|}{R}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dS} &= -\frac{\xi(u+c)}{|u+c|} \\ \text{7)} \qquad \frac{d^2X}{dS^2} &= +\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\lambda}{T}\right)\frac{R\theta}{|u+c|} \end{aligned}$$

wo $\theta = \pm 1$ ist. Endlich erhält man auf demselben Wege auch den dritten Differentialquotienten von X nach S.

Es folgt daher für den Krümmungshalbmesser R_1 die Gleichung

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{(R^2+T^2)}{R^2T^2}\,\frac{|u+c|^2}{R^2}$$

und zur Berechnung der Torsion T_1 hat man die Formel

$$\frac{1}{T_1} = -R_1^2 \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix}$$

in der die Ableitungen der Koordinaten nach S durch Striche bezeichnet sind. Für die rechts stehende Determinante aber ergibt sich

$$\theta^3\,\frac{R^2}{|u+c|^2}\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \frac{\alpha}{R}+\frac{\lambda}{T}, & \frac{\beta}{R}+\frac{\mu}{T}, & \frac{\gamma}{R}+\frac{\nu}{T} \\ \frac{\alpha R'}{R^2}+\frac{\lambda T'}{T^2}, & \frac{\beta R'}{R^2}+\frac{\mu T'}{T^2}, & \frac{\gamma R'}{R^2}+\frac{\nu T'}{T^2} \end{vmatrix}$$

oder nach Multiplikation mit der Determinante des Trieders, welche gleich $+1$ ist,

$$\frac{1}{T_1} = -\theta\,\frac{R'T - T'R}{R^2+T^2}$$

Das liefert den Satz: Die Kurven Γ werden dann und nur dann ebene Kurven, wenn die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie ist.

Über den oben erwähnten Fall, wo $eg - f^2 = 0$, seien hier noch einige Andeutungen gegeben. Die Darstellung der Fläche durch die Parameter u, v versagt dann zunächst, da, wenn die Tangentenebene der Fläche in der Nähe eines Punktes, wo die Differentialquotienten der Koordinaten nach v denen nach u proportional sind, gegen diesen Punkt konvergiert, sich im allgemeinen keine bestimmte Grenzlage für beliebige Konvergenz von u und v gegen Null bildet. Es wird sich daher empfehlen, wieder zu den x, y, z zurückzugehen. Dabei wird es genügen, den Fall, wo nur die beiden ersten Glieder einer analytischen Entwicklung nach u, v angesetzt sind, oder

$$\begin{aligned} x &= u_1 + k v_1 + u_1^2 a_1^1 + u_1 v_1 a_2^1 + v_1^2 a_3^1 \\ y &= u_1 + k v_1 + u_1^2 b_1^1 + u_1 v_1 b_2^1 + v_1^2 b_3^1 \\ z &= u_1 + k v_1 + u_1^2 c_1^1 + u_1 v_1 c_2^1 + v_1^2 c_3^1 \end{aligned}$$

oder, wenn $u_1 + k v_1 = u$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} x &= u + a_1 u^2 + b_1 u v + c_1 v^2 \\ y &= u + a_2 u^2 + b_2 u v + c_2 v^2 \\ z &= u + a_3 u^2 + b_3 u v + c_3 v^2 \end{aligned} \tag{8}$$

vorauszusetzen. Wenn die Determinante der a, b, c nicht Null ist, ergibt sich für

$$\begin{aligned} &p_1, p_2, p_3 \text{ mit } \Sigma(pb) = 0, \quad \Sigma(pc) = 0 \\ &q_1, q_2, q_3 \quad „ \quad \Sigma(qc) = 0, \quad \Sigma(qa) = 0 \\ &r_1, r_2, r_3 \quad „ \quad \Sigma(ra) = 0, \quad \Sigma(rb) = 0 \end{aligned}$$

falls man

$$xp_1 + yp_2 + zp_3 = X, \quad xq_1 + yq_2 + zq_3 = Y, \quad xr_1 + yr_2 + zr_3 = Z$$

setzt

$$\begin{aligned} X &= u \Sigma p + \delta u^2 \\ Y &= u \Sigma q + \delta u v \\ Z &= u \Sigma r + \delta v^2 \end{aligned}$$

wo δ die Determinante $(a\,b\,c)$ bedeutet, und die p, q, r direkt den Unterdeterminanten aus den a, b, c gleichgesetzt werden.

Wird noch

$$\Sigma(p) = A_1, \quad \Sigma(q) = A_2, \quad \Sigma(r) = A_3$$

gesetzt, so hat man, um die Gleichung zwischen X, Y, Z, welche nach den x, y, z wegen $\delta \neq 0$ auflösbar sind, zu erhalten, nur noch u, v zu eliminieren. Dabei ergibt sich eine Gleichung vierten Grades, deren niedrigste (quadratische) Glieder sich auf

$$(A_1 y + A_3 x)^2$$

zusammenziehen. Die Fläche hat also für $u = 0$, $v = 0$ einen konischen Punkt von der Beschaffenheit eines Uniplanarpunktes, und hieraus wird man einen Schluß ziehen können auf den Fall, wo längs einer Kurve die Bedingung $eg - f^2 = 0$ erfüllt ist.

Das Resultat gilt aber nur dann, wenn $A_2^2 - A_1 A_3 \neq 0$ ist. Ist dieser Ausdruck Null, so ergibt sich ein triplanarer Punkt, bei dem zwei Ebenen zusammenfallen. Ein ganz spezielles Beispiel dafür zeigt der Fall

$$\begin{aligned} x &= u + u^2 a \\ y &= \quad\;\; u v b \\ z &= \quad\;\; v^2 c \end{aligned}$$

Hier hat die entsprechende Fläche die Gleichung

$$\frac{y^2 z}{a c b^2} = \left(\frac{x z}{a c} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

welche einen singulären Punkt desselben Charakters im Anfang besitzt. Wenn dagegen die Determinante $\delta = (a b c)$ in den Gleichungen 8) Null ist, folgt aus denselben

$$xp + yq + zr = u(p + q + r).$$

Ist $p + q + r = 0$, so ist die Fläche eine Ebene. Andernfalls ist

$$u = \frac{xp + yq + rz}{p + q + r}$$

und durch Elimination von v aus zweien der Gleichungen ergibt sich eine Fläche, die wieder einen uniplanaren Knotenpunkt hat. Trotzdem würde es unrichtig sein, wenn man die Gleichung $eg - f^2 = 0$ als einem Uniplanarpunkte äquivalent ansehen wollte. Schon das Beispiel

$$\begin{aligned} x &= a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2 \\ y &= a_2 u^2 + b_2 uv + c_2 v^2 \\ z &= a_3 u^2 + b_3 uv + c_3 v^2 \end{aligned}$$

liefert, wenn die Determinante $\delta \neq 0$ ist, einen konischen Punkt.

§ III.

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung E, F, G.

Die Ermittelung von E, F, G aus den Gleichungen

$$E = \Sigma \Xi X_{uu}, \quad F = \Sigma \Xi X_{uv}, \quad G = \Sigma \Xi X_{vv}$$

würde die Bestimmung der zweiten Differentialquotienten von X nach u, bei der die Differentialquotienten von R und T auftreten, erfordern, die sich im Resultat wieder herausheben. Man vermeidet dies, wenn man von den Gleichungen

$$-E = \Sigma \Xi_u X_u, \quad -F = -\Sigma \Xi_u X_v = -\Sigma \Xi_v X_u,$$
$$-G = \Sigma \Xi_v X_v$$

ausgeht. Aus § I, 7 hat man, wenn zur Abkürzung

$$+\sqrt{1 - r'^2} = S$$

gesetzt wird

$$\Xi_u = -\alpha\left(r'' + S\frac{\cos v}{R}\right) \tag{1}$$
$$+ \xi\left(-\frac{r'}{R} + S\frac{\sin v}{T} - \cos v\frac{r' r''}{S}\right) - \lambda\left(\frac{\cos v}{T}S + \sin v\frac{r' r''}{S}\right)$$
$$\Xi_v = S(-\xi \sin v + \lambda \cos v)$$

und aus § II, 1

$$X_u = \alpha\left(1 - \omega_u - \varepsilon\frac{\cos v}{R}\right) + \xi\left(-\frac{\omega}{R} + \varepsilon_u \cos v + \varepsilon\frac{\sin v}{T}\right)$$
$$+ \lambda\left(\varepsilon_u \sin v - \varepsilon\frac{\cos v}{T}\right) \tag{2}$$
$$X_v = \varepsilon(-\xi \sin v + \lambda \cos v).$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort

$$3)\qquad \begin{aligned} -G &= \varepsilon S \\ -F &= \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) S = Q S \end{aligned}$$

Etwas weitläufiger ist die Bestimmung von $-E$. Zunächst erhält man durch Zusammenziehung und Aufhebung verschiedener Glieder

$$-E = -\left(r'' + S\frac{\cos v}{R}\right)\left(1 - \omega_u - \varepsilon\frac{\cos v}{R}\right)$$

$$+\frac{r'\omega}{R^2} + r'r''\omega\frac{\cos v}{RS} - 2\omega\frac{S\sin v}{RT} + \frac{\varepsilon S}{T^2} - \varepsilon_u \cos v\frac{r'}{R} - \varepsilon_u\frac{r'r''}{S}$$

oder, wenn man ε_u durch seinen aus § I, 4 folgenden Wert

$$\varepsilon_u = r'\left(\frac{1-\omega_u}{S}\right)$$

ersetzt, und die Glieder mit $(1-\omega_u)$ vereinigt

$$-E = -\left(\frac{1-\omega_u}{S}\right)\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right) + \frac{r'r''\cos v}{RS} + r\frac{\cos^2 v}{R^2}$$

$$+ rr'^2\frac{\sin^2 v}{R^2} + r\left(\frac{1-r'^2}{T^2}\right) - 2r'^2\frac{S\sin v}{TR}$$

also endlich

$$-E = \pm\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)\left(r\frac{\cos v}{R} - \frac{1-\omega_u}{S}\right)$$

$$+ r\left(r'\frac{\sin v}{R} - \frac{S}{T}\right)^2,$$

also nach der in § II, 3 eingeführten Bezeichnung nach 2), 3) und 4)

$$5)\qquad \left|\begin{aligned} -E &= -\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)P + \frac{1}{r}Q^2 \\ -F &= QS \\ -G &= rS^2. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt nun

$$6)\quad EG - F^2 = -\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)PrS^2 = -\frac{P}{r}\varepsilon^2\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)$$

Da nach § II, 6 $eg - f^2 = \varepsilon^2 P^2$, so hat man für das Krümmungsmaß K die von T unabhängige Gleichung

7) $$K = -\frac{1}{rP}\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)$$

Daher folgt:

Bei allen Deformationen der Kanalflächen behält das Krümmungsmaß in den Punkten gleicher Werte von u, v denselben Wert. Aber diese Flächen sind gleichwohl nicht aufeinander abwickelbar, wie ein Blick auf das in § II angegebene Längenelementsquadrat in Bezug auf die Kurven u, v zeigt.

Aber noch mehr: Da der eine Hauptkrümmungsradius ϱ_1 immer den Wert r hat, muß nach 7) der andere den Wert

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)$$

haben. Alle deformierten Flächen haben also in entsprechenden Stellen die nämlichen Hauptkrümmungshalbmesser; man kann sie als im unendlich kleinen kongruent bezeichnen.

Die Gesamtheit der deformierten Flächen ist von der willkürlich zu wählenden Funktion T von u abhängig, durch die die Kurve C selbst vermöge einer Riccatischen Gleichung bestimmt, und damit jedes einzelne Individuum der Gesamtheit erhalten wird.

Aus der allgemeinen Formel für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

ergibt sich für den Krümmungsradius längs der Kurve $u = \text{const}$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{G}{g} = -\frac{rS^2}{g} = -\frac{1}{r}$$

wie es sein muß, während für den Krümmungsradius für die Kurve $v = \text{const}$ der Wert

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{P\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right) - \frac{1}{r} Q^2}{P^2 + Q^2}$$

folgt, der für $P = 0$, d. h. für die Punkte der Rückkehrkurve wieder in $\frac{1}{r}$ übergeht, was übrigens selbstverständlich ist, da die beiden Kurven u, v hier überall zusammenfallen.

§ IV.

Kurvensysteme auf den Kanal- und Röhrenflächen.

Die Differentialgleichungen der wichtigsten Kurvensysteme sind auf den Kanalflächen im allgemeinen nicht einfach. Auch für die Röhrenflächen ergeben sich keine unmittelbar zu übersehenden Resultate; nur für die Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie kommt die Lösung auf verhältnismäßig einfache Quadraturen hinaus. Wir begnügen uns mit den folgenden Andeutungen:

1. Die zweite Schar der Krümmungslinien. Sie ist nach § II, 5 gegeben durch die Differentialgleichung

$$\left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) du + dv\, \varepsilon = 0.$$

Dies ist eine Riccatische Gleichung für v, die für $\zeta = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ die Form

$$2\varepsilon \frac{d\zeta}{du} + 2 \frac{\omega\zeta}{R} - \varepsilon\left(\frac{1+\zeta^2}{T}\right) = 0$$

annimmt. So erhält die Variabele ζ in der Normalebene von C im Punkte P eine unmittelbar ersichtliche geometrische Bedeutung, welche zugleich zeigt, wie aus drei Krümmungslinien durch eine ganz einfache Doppelverhältniskonstruktion jede vierte abgeleitet wird[1]). Die Riccatischs Gleichung ist

[1]) Man betrachte den am Ende des § I angegebenen erzeugenden Kreis der Kanalfläche vom Radius ε, dessen Radien bei der Projektion

für den Fall der Röhrenflächen durch Quadratur lösbar, und liefert

$$v = \int \frac{du}{T} + \text{const}$$

wodurch die Krümmungslinien der Fläche mit der Konstruktion der Evoluten der Kurve C in unmittelbare Beziehung gesetzt sind.

2. Konforme Abbildung der Kanalflächen. Zur Ausführung derselben hat man die Gleichung

$$du\left(\frac{1-\omega_u}{S} - \frac{r\cos v}{R}\right) + i\left(\frac{\omega \sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) du + i\varepsilon dv = 0$$

d. h. wieder eine Riccatische Gleichung zu lösen, welche durch die soeben benutzte Substitution die Form

$$2i\frac{d\zeta}{du} + \zeta^2\left(\frac{1-\omega_u}{S} + \frac{r}{R} - \frac{i\varepsilon}{T}\right) + 2i\frac{\omega\zeta}{R}$$
$$+ \left(\frac{1-\omega_u}{S} - \frac{r}{R} - \frac{\varepsilon i}{T}\right) = 0$$

annimmt. Damit sind zugleich die Minimalkurven und die isothermen Kurvensysteme der Kanalflächen, wenigstens definiert. Für den Fall der Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie ist wieder nur eine Quadratur auszuführen.

3. Die Rückkehrkurven der Kanalflächen sind nach § II gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1-\omega_u}{S} - r\frac{\cos v}{R} = 0.$$

---

auf die Normalebene von C in P mit der Hauptnormale von C den Winkel v machen. Der der Hauptnormale parallele Durchmesser derselben begegnet diesem Kreise in den Punkten A und B; dann bildet AQ mit diesem Durchmesser den Winkel $\frac{v}{2}$, demnach wird $AB\zeta$ gleich dem Abschnitt, der durch AQ auf der Tangente des Kreises in B gebildet wird; um das Doppelverhältnis dieser Abschnitte aber handelt es sich.

Auch diese ist von T unabhängig. Bei allen Deformationen behält also die Rückkehrkurve dieselbe relative Lage gegen das Triëder der Kurve C; ihre Koordinaten X_1, Y_1, Z_1 aber werden von T abhängig. Das Bogenelement z. B. wird

$$ds = \left| \omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon \frac{dv}{du} \right| du$$

wobei $\frac{dv}{du}$ als Funktion von u aus 1) zu entnehmen ist. Für den Fall der Röhrenfläche hat man insbesondere ($r = c$, $\omega = 0$, $\varepsilon = c$)

$$S = c \left(\int \frac{du}{T} + \arcsin\left(\frac{R}{c}\right)\right) + \text{const}$$

wobei das Integral wieder auf die Evolute von C hinweist.

Die Richtung der Rückkehrkurve fällt in jedem ihrer Punkte Q_1 mit der Tangente des erzeugenden Kreises zusammen, wie man übrigens auch leicht aus den allgemeinen Formeln des § II bestätigt. So hat man z. B.

$$\frac{dX_1}{du} = \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon \frac{dv}{du}\right)(-\xi \sin v + \lambda \cos v).$$

4. Die Haupttangenten-Kurven der Kanalflächen. Die Rückkehrkurven sind selbst singuläre Haupttangenten-Kurven. Die allgemeine Gleichung der letzteren erhält nach § III die Form:

$$-\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)\left(\frac{1 - \omega_u}{S} - r \frac{\cos v}{R}\right) du^2 +$$
$$\frac{1}{r}\left(du\left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) + \varepsilon\, dv\right)^2 = 0$$

die freilich nur für den Fall der Röhrenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie auf eine einfache Quadratur führt.

5. Die geodätischen Kurven der Flächen. Für den Fall der Röhrenflächen erhält das Längelementsquadrat nach § II vermöge der Substitution

$$d\left(\frac{du}{T} - v\right) = v'$$

die Form

$$P^2 du^2 + dv'^2$$

so daß, wie übrigens geometrisch schon erhellen würde, die erzeugenden Kreise selbst geodätische Linien der Fläche sind.

Für die allgemeine Ermittelung der geodätischen Kurven wird man den folgenden Satz anzuwenden haben: Jeder Lösung der Gleichung

2) $$\Delta(\varphi) = 1$$

in der $\Delta(\varphi)$ den ersten Differentialparameter von φ in Bezug auf die Form

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

bedeutet, entspricht eine Schar paralleler Kurven der betreffenden Fläche, deren orthogonale Trajektorien geodätische Kurven derselben sind, und einer eine willkürliche Konstante c_1 (die nicht nur additiv vorkommt) enthaltenden entspricht nach Jacobi eine geodätische Kurve, deren Gleichung dann ohne neue Integration erhalten wird.

Die Gleichung 2) wird im vorliegenden Falle

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 (P^2 + Q^2) + 2\varepsilon Q \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = \varepsilon^2 Q^2.$$

Sie kann, wenn R, T, r Konstanten sind, d. h. für die Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie durch den eine willkürliche Konstante c_1 enthaltenden Ansatz

$$\varphi = c_1 u + \psi(v) + c_2$$

durch Quadratur gelöst werden. Denn für $S = 1$, $\omega = 0$, $\varepsilon = r = c$ erhält man

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 \left[\left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}\right] + 2\frac{c^2}{T} c_1 \frac{\partial\psi}{\partial v}$$
$$+ c^2 c_1^2 = c^2 \left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}\left[\left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}\right] = + \frac{c^2 c_1}{T} + \sqrt{H},$$

wo

$$H = c^2\left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2\left[\left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2} - c^2\right]$$

Setzt man noch $\cos v = z$, so ist ψ gegeben durch das elliptische Integral

$$-\psi = \int \frac{c\left(1 - \frac{c z}{R}\right)}{\sqrt{1 - z^2}} \frac{\sqrt{\left(1 - c\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2} - c_1^2}}{\left(1 - c\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}} \, dz$$

von dessen Auswertung hier wohl abzusehen ist. Damit sind aber alle geodätischen Kurven dieser allerdings sehr speziellen Röhrenfläche ermittelt.