

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft I

Januar- bis Märzszitzung

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die Möglichkeit neuer Versuche an Glühelektroden.

Von M. v. Laue.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 11. Januar 1919.

In früheren Veröffentlichungen¹⁾ haben wir das thermodynamische Gleichgewicht zwischen einer Glühelektrode und der sie umgebenden Elektronenwolke untersucht, namentlich die räumliche Verteilung der Elektronen und die Grenzdichte ϱ_g , die unmittelbar an der Elektrodenfläche herrschen muß. Um die Formeln für die Verteilung zu prüfen, käme es darauf an, auf mehrere unabhängige Weisen, von denen mindestens eine diese Verteilungsfunktionen bei der Berechnung benutzt, die Grenzdichte zu messen. Wir wollen hier die Pläne zu solchen Versuchen entwickeln.

Die bisherigen Versuche über Glühelektroden, soweit sie sich nicht nur mit dem Einfluß von allerhand störenden Umständen beschäftigen, lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Messungen des Sättigungsstromes. Die beschleunigende Spannung V zwischen Glühkathode und Anode ist so hoch, daß sie jedes austretende Elektron praktisch sofort zur Anode zieht, ohne daß sich erhebliche Raumladungen ausbilden könnten. Diese Versuche bestätigen bisher alle die Richardsonsche Formel für den Strom pro Flächeneinheit.

¹⁾ M. v. Laue, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 15, 205, 257 und 301, 1918.

$$i = A T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{T}} \quad 3)$$

sind aber nicht genau genug, um den Exponenten $\frac{1}{2}$ von T sicher zu stellen; auch schwanken die Zahlenangaben über die Konstanten A und β noch stark von Messung zu Messung¹⁾.

2. Messungen bei niedrigeren beschleunigenden Spannungen, als bei den Versuchen der ersten Gruppe, und bei so hohen Raumladungen, daß der Hauptsache nach diese die Vorgänge bestimmen, während weder die Wärmebewegung der Elektronen noch die Eigenschaften der Glühelektrode demgegenüber einen merklichen Einfluß ausüben. Für sie gilt, sofern die Elektroden parallele Ebenen im Abstände d sind, die Gleichung

$$i = \frac{4}{9} \left(\frac{|2\varepsilon|}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{d^2}, \quad 4)$$

in der ε die Ladung, m die Masse eines Elektrons bedeutet, während die Temperatur und irgend welche auf die Elektrode bezüglichen Größen nicht auftreten. Für kreiszylindrische, konzentrische Elektroden ist eine ähnliche Beziehung bekannt²⁾.

3. Versuche mit sehr geringen Raumdichten, bei denen sich jedes Elektron unbeeinflusst von anderen gegen eine verzögernde Spannung von 0 bis 1 Volt bewegt. Dahin gehören die Versuche von Richardson und Brown³⁾ über die Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen, sowie auch noch Versuche von Schottky⁴⁾, obwohl sich bei manchen seiner Messungen schon Raumladungen bemerkbar machen.

¹⁾ Vgl. hierzu Marx, Handbuch der Radiologie, Band IV, Leipzig 1917, Artikel „Glühelektroden“ von O. W. Richardson; ferner z. B. W. Hüttemann, Ann. d. Phys., 52, 816, 1917; J. Langmuir, Phys. Rev., 2, 450, 1913, Phys. Zeitschr., 15, 516, 1914.

²⁾ C. Child, Phys. Rev., 32, 492, 1911; J. Langmuir, siehe die vorhergehende Anm. W. Schottky, Phys. Zeitschr., 15, 526, 1914.

³⁾ O. W. Richardson und F. C. Brown, Phil. Mag., 16, 353, 1908; O. W. Richardson, Phil. Mag., 16, 890, 1908; 18, 681, 1909. Bei einem der Versuche von Richardson und Brown lagen durchschnittlich 5 Elektronen gleichzeitig zwischen den Elektroden.

⁴⁾ W. Schottky, Ann. d. Phys., 44, 1011, 1914.

Die Versuche unter 2. lassen überhaupt keinen Schluß auf die Verhältnisse an der Glühelektrode zu, kommen für unsere Zwecke daher nicht in Betracht. Die der Gruppe 3 könnten zwar zur Ermittlung der Gesamtzahl der austretenden Elektronen benutzt werden und erlaubten dann einen Schluß auf diese Verhältnisse. Doch ist das unseres Wissens nie geschehen. Sie lieferten dann aber auch nichts neues gegenüber den Versuchen der Gruppe 1, da sich auch diese auf die Ergiebigkeit der Elektrode an Elektronen beziehen.

Die Messungen des Sättigungsstromes werden meist so gedeutet, daß der Strom pro Flächeneinheit der Glühelektrode

$$i = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e_g \quad 5)$$

ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß jedes Elektron, welches von außen her auf die Elektrode trifft, auch von ihr aufgenommen wird¹⁾. Nun haben aber metallische Leiter bei Zimmertemperatur ein recht erhebliches Spiegelungsvermögen für Elektronen, selbst bei den geringen Auftreffgeschwindigkeiten, welche die Wärmebewegung diesen verleiht²⁾. Daß dies bei Glüh-temperaturen auch noch da sein dürfte und dann die Anwendbarkeit der Gleichung 5) stark beeinträchtigt, spricht schon Richardson aus³⁾, und wir haben im Anschluß an ihn a. a. O. S. 247 darauf hingewiesen. Nennen wir das durchschnittliche Spiegelungsvermögen der Elektrode für Elektronen mit der der Elektrodentemperatur entsprechenden Wärmebewegung S , so ist Gleichung 5) zu ersetzen durch die Beziehung

¹⁾ Vgl. die Ableitung der Formel 3), welche O. W. Richardson, Phil. Transactions (A) 201, 497, 1903 auf Seite 502 und in Band 4 des Marxschen Handbuches der Radiologie Seite 463 nach einem Gedanken von J. J. Thomson angibt.

²⁾ O. v. Baeyer, Verh. d. D. Phys. Ges., 10, 96 und 953, 1908; O. W. Richardson, Phil. Mag., 18, 694, 1909; Phys. Rev., 29, 557, 1909; A. Gehrts, Ann. d. Phys., 36, 995, 1911.

³⁾ O. W. Richardson in Band 4 des Marxschen Handbuches der Radiologie, S. 529.

$$i = (1 - S) \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} q_g.$$

(Vgl. weiter unten die Ableitung von Gleichung 31.) Man kann somit aus allen bisherigen Versuchen nur $(1 - S) q_g$, nicht q_g selbst, bestimmen.

Wir möchten demgegenüber hier auf zwei neue Arten von Versuchen über Glühelatronen zunächst ohne Rücksicht auf die (vermutlich nicht geringen) experimentellen Schwierigkeiten hinweisen. Immerhin werden wir zeigen, daß die auszuführenden elektrischen Messungen in zugänglichen Größenordnungen liegen. Die erste Art ist rein statisch; man hat mit einem elektrostatischen Meßinstrument den Potentialunterschied zwischen zwei Kondensatorplatten zu messen, einmal, wenn beide Platten kalt sind, sodann, wenn die positive Platte glüht; dabei muß die elektrische Ladung der negativen Platte in beiden Fällen die gleiche sein. Bei der Messung an der glühenden Platte muß ferner der Potentialunterschied so groß sein, daß kein Elektron ihn überwinden kann. Diese Versuche liefern unmittelbar die Grenzdichte q_g . Die andere Art der vorzuschlagenden Versuche gestattet zwar nicht q_g selbst, wohl aber die Größe

$$\frac{1 - S}{1 + S} q_g$$

zu messen. Durch ihre Vereinigung mit Sättigungsversuchen ließe sich also S und q_g einzeln bestimmen. Es handelt sich bei ihnen darum, zwischen zwei Elektroden von gleicher, hoher Temperatur und wohl am besten auch von gleichem Material einen möglichst schwachen, die statische Verteilung der Elektronen möglichst wenig störenden Strom übergehen zu lassen. Da es dabei nur auf die Stromdichte ankommt, die bisherigen Glühelatronen aber meist ganz dünne Drähte waren, ließe sich diese Bedingung wohl durch Vergrößerung der Oberflächen erfüllen, ohne daß man zu unmeßbar kleinen Stromstärken hinabsteigt. Die Formel für den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung wollen wir im folgenden ableiten.

Eine wesentliche Bedingung bei beiden Arten von Versuchen ist der Verzicht auf eine unmittelbare elektrische Heizung der Glühelktroden während der Messung, weil diese Oberflächen notwendig Potentialflächen sein müssen.

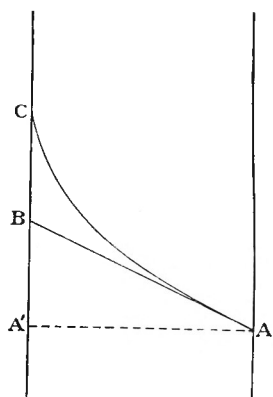
Hat man die Grenzdichte ϱ_g auf eine dieser Arten bestimmt, so kann man nach der Gleichung

$$\varrho_g = \frac{(N\varepsilon)^3}{2R} C^2 T^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu}{RT}} \quad 5a)$$

(siehe die erste der Formeln 48) auf S. 241 a. a. O.) daraus die Elektronenaffinität μ der Glühelktrode bestimmen, wenn man dazu den quantentheoretischen Wert von C benutzt, den wir auf S. 268 und 269 (bes. Gl. 38)) a. a. O. gegeben haben. Eine Prüfung dieses Wertes selbst aber ermöglichen Versuche, bei denen Elektronen im vollkommenen Vakuum liegen, wohl überhaupt nicht. Erst wenn man ihr Gleichgewicht mit einem Gase untersucht, dessen Molekeln Elektronen anlagern können, ließe sich darüber ein Anhaltspunkt gewinnen. Versuche darüber erscheinen uns aber deswegen so schwierig, weil man bei ihnen eine Sicherheit haben müßte, daß das Gas nicht unmittelbar auf die Glühelktrode einwirkt.

§ 1. Die statischen Versuche.

Zwischen zweiebenen, parallelen Kondensatorplatten herrscht, wenn die Temperatur beider Platten so gering ist, daß keine Elektronen zwischen ihnen auftreten, ein homogenes Feld, dessen Potentialanstieg in Fig. 1 durch die gerade Linie AB angedeutet sein mag. Erwärmen wir jetzt die positive Platte, bis sie von einer dichten Elektronenwolke umgeben ist, so muß die Potentialkurve in ihrer Nähe der Raumladungen wegen jedenfalls so gekrümmt sein, wie dies die Kurve AC angibt; daß diese schon in einigem Abstände von der negativen Platte in die Gerade AB übergeht, deutet auf die schon erwähnte Forderung hin, daß an der negativen Platte die Raumdichte Null sein und daß die Ladung der negativen Platte erhalten



bleiben soll. Zu messen sind die beiden Potentialunterschiede, welche in der Figur durch die Strecken $A'B$ und $A'C$ angedeutet sind.

Um diesen Gedanken mathematisch zu fassen, geben wir den Platten den Flächeninhalt O und den Abstand d . Ihre Abmessungen sollen so sein, daß wir Randwirkungen nicht in Betracht zu ziehen brauchen. Nach den Formeln 8) auf Seite 213 a. a. O. ist der Potentialverlauf in der Nähe einer Glühelektrode, wenn ein äußeres Feld die Elektronen gegen sie drückt, gegeben durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{RT}{F} \left\{ \log \operatorname{Ei}^2 \left(\frac{FK}{2RT} x \right) - \log \left(\frac{FK^2}{2RT\varrho_0} \right) \right\}. \quad (6)$$

Dabei bedeutet R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, F die Ladung eines Mols einwertiger negativer Ionen¹⁾, ϱ_0 eine konstante von den Dimensionen der elektrischen Raum-dichte, die ohne physikalische Bedeutung ist und sich aus den Gleichungen für Potentialunterschiede, Dichten und andere meßbare Größen stets forthebt; ihre Unbestimmtheit entspricht der Willkürlichkeit des Nullpunktes von φ . $K(>0)$ ist eine Integrationskonstante.

Die Oberfläche der Glühelektrode hat die Koordinate x_+ , sie liegt nahe bei Null, und zwar um so näher, je höher die

¹⁾ Die negative Größe α , welche in unseren früheren Veröffentlichungen auftritt, ist gleich $\frac{\varepsilon}{kT}$, wo ε die Ladung eines Elektrons, k die Boltzmannsche Konstante bedeutet. Erweitert man Zähler und Nenner dieses Bruches mit der Zahl N der Atome im Grammatom, so findet man für α den hier im Text benutzten Wert $\frac{F}{RT}$, da $Nk = R$, $N\varepsilon = F$ ist.

Temperatur ist. Wir wollen den Plattenabstand d als so groß ansehen, daß man für die Koordinate x der negativen Platte statt $x_+ + d$ einfach d setzen kann. Da in ihrer Nähe keine Elektronen mehr liegen sollen, gilt dort die aus 6) für große Werte von x folgende Näherung

$$\varphi = -Kx - \frac{RT}{F} \log \left(\frac{2FK^2}{RT\varrho_0} \right), \quad 7)$$

welche zeigt, daß K die Feldstärke an der negativen Elektrode ist und daher deren Ladung

$$E = -KO \quad 8)$$

beträgt. Ihr Potential ist nach 7)

$$\begin{aligned} \varphi_- &= -Kd - \frac{RT}{F} \log \left(\frac{2FK^2}{RT\varrho_0} \right) \\ &= -\frac{|E|d}{O} - \frac{RT}{F} \log \left(\frac{2FE^2}{RT\varrho_0 O^2} \right). \end{aligned} \quad 9)$$

Das Potential der Glühelktrode berechnen wir aus dem Boltzmannschen Verteilungssatz für die elektrische Dichte

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{F\varphi}{RT}} \quad 9a)$$

(vgl. Formel 2), S. 206, a. a. O.), indem wir für ϱ die Grenzdichte einsetzen. So folgt

$$\varphi_+ = -\frac{RT}{F} \log \frac{\varrho_g}{\varrho_0}. \quad 10)$$

Durch Subtraktion von 9) und 10) findet man sodann, da ϱ_0 in 9) und 10) dieselbe Konstante ist

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{|F|} \log \left(\frac{1}{2} \frac{RT}{|F|} \cdot \frac{O^2}{E^2} |\varrho_g| \right) + \frac{|E|d}{O}. \quad 11)$$

Fehlten die Elektronen, so wäre die Potentialdifferenz

$$V = \frac{|E|d}{O}. \quad 12)$$

Setzt man 12) in 11) ein, so folgt:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{|F|} \log \left(\frac{1}{2} \frac{RT}{|F|} \frac{d^2}{V^2} |\varrho_g| \right) + V. \quad (13)$$

Hier sind alle vorkommenden Größen meßbar oder bekannte Konstanten, bis auf ϱ_g . Man kann also ϱ_g nach ihr bestimmen.

Damit aber die Näherung 7) berechtigt ist, muß, wie aus der strengen Gleichung 6), sowie aus 8) und 12) hervorgeht

$$e^{-\frac{|F|}{RT} Kd} = e^{-\frac{|F|V}{RT}} \ll | \quad (14)$$

sein. Die strenge Gleichung für die elektrische Dichte ϱ ((siehe Gl. 8), S. 203, a. a. O.),

$$\varrho = \frac{F}{2RT} \frac{K^2}{\sin^2 \left(\frac{F}{2RT} Kx \right)},$$

geht dann für $x = d$ über in

$$|\varrho_-| = \frac{|F|}{2RT} \frac{V^2}{d^2} e^{-\frac{|F|V}{RT}}. \quad (15)$$

Nach dieser Formel muß man abschätzen, ob die von der Glühelektrode entsandten Elektronen die Ladung der negativen Platte noch verändern können; man muß den Potentialunterschied V eben so groß wählen, daß dies nicht mehr zu befürchten ist. Andererseits wird man V auch nicht zu groß wählen dürfen, weil sonst der erste Summand in 13) gegen den zweiten zu klein wird. Man hätte ihn dann als Differenz der nahezu gleichen Potentialunterschiede $\varphi_+ - \varphi_-$ und V zu bestimmen, was die Genauigkeit beeinträchtigt.

Im elektrostatischen Maßsystem (bisher haben wir das Lorentzsche benutzt) sind die Gleichungen 13) und 15) zu ersetzen durch die Formeln:

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = \frac{RT}{|F|} \times 2,303 \cdot 10 \log \left(2\pi \frac{RT}{|F|} \frac{d^2}{V^2} |\varrho_g| \right) \quad (16)$$

$$|\varrho_-| = \frac{1}{8\pi} \frac{|F|}{RT} \frac{V^2}{d^2} e^{-\frac{|F|V}{RT}}. \quad (17)$$

Die Bedingung 14) bleibt hingegen unverändert.

Auf Seite 250 a. a. O. haben wir q_g für Wolfram und für 2400° abs. zu $1,4 \cdot 10^3$ elektrostatische Einheiten geschätzt. Wir können, da dies in der Größenordnung richtig sein dürfte, daraus weiter auf die ungefähre Größe der Potentialdifferenz $\varphi_+ - \varphi_-$ schließen, um ein Urteil über die Ausführbarkeit des in Rede stehenden Versuches zu gewinnen. Wir nehmen dabei d zu 2 cm an. Da im elektrostatischen Maßsystem $|F|/RT = 2,9 \cdot 10^{14} : (8,3 \cdot 10^7 \cdot 2,4 \cdot 10^3) = 1,45 \cdot 10^3 \text{ g}^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \text{ sec}$ beträgt, ist Bedingung 14) mit $V = 1,33 \cdot 10^{-2}$ elektrostatische Einheiten (gleich 4 Volt) gewiß erfüllt, da dann $|F|V/RT = 19,3$, also $e^{-\frac{|F|V}{RT}} = 10^{-8,38}$ ist. Nach 17) ist unter diesen Umständen $|q_-| = 6 \cdot 10^{-12}$ elektrostatische Einheiten; es gelangt also nur ganz selten einmal ein Elektron bis zur negativen Kondensatorplatte. Aus 16) aber finden wir

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = 6,58 \cdot 10^{-3} \text{ elektrost. Einheiten} = 2 \text{ Volt}.$$

Dieser Betrag läßt sich neben den 4 Volt, die V beträgt, gewiß mit großer Genauigkeit messen. Man könnte wohl V noch etwas niedriger wählen, so daß nach 16) $(\varphi_+ - \varphi_-) - V$ noch etwas größer würde.

Schließlich können wir an dem hier benutzten Wert von q_g auch unsere Voraussetzung auf ihre Berechtigung hin prüfen, daß man die Koordinate x_+ der Glühelektrode gegen den Plattenabstand d vernachlässigen kann. In der Nähe der Glühelektrode ist nämlich, wie wir auf Seite 217 und 218 a. a. O. gezeigt haben, die Dichteverteilung auf alle Fälle in guter Näherung (im elektrostatischen Maßsystem) durch die Gleichung

$$q = \frac{RT}{2\pi F x^2}$$

gegeben. Daraus folgt, da doch für den Wert $x_+ q = q_g$ werden soll:

$$x_+ = \sqrt{\frac{RT}{2\pi |F| q_g}}.$$

In Zahlen ist das hier:

$$x_+ = \sqrt{\frac{8,3 \cdot 10^7 \cdot 2,4 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 2,9 \cdot 10^{14} \cdot 1,4 \cdot 10^2}} = \sqrt{8 \cdot 10^{-7}} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

Da wir $d = 2 \text{ cm}$ angenommen haben, ist auch diese Voraussetzung berechtigt.

Zweckmäßiger als zwei ebene Kondensatorplatten wären wohl zwei kreiszylindrisch-konzentrische, und zwar wählte man vermutlich am besten die innere als Glühelektrode. Wir geben beiden die Höhe a , der inneren den Halbmesser r_+ , der äußeren den Halbmesser r_- . So weit wir von Randwirkungen absehen können, stellt die Formel 31) auf S. 227 a. a. O. den Potentialverlauf dar:

$$\varphi = \frac{RT}{F} \left\{ \log \left[\text{Sin}^2 \left(K \log \frac{r}{r_0} \right) \right] + \log \left(\frac{F \varrho_0 r^2}{2 R T K^2} \right) \right\}. \quad 18)$$

In ihr bedeutet r den Abstand von der gemeinsamen Achse beider Zylinder, ϱ_0 die schon erwähnte Konstante von der Dimension einer elektrischen Dichte, und K und r_0 positive Integrationskonstanten. Ist die Temperatur der positiven Kondensatorplatte hinreichend hoch, so ist r_0 nur wenig kleiner als r_+ , und wir nehmen das Verhältnis beider als von 1 so wenig verschieden an, daß wir $\log r_0$ mit $\log r_+$ vertauschen können. Unter der Annahme, daß die Elektronenwolke durch das negative Potential der äußeren Platte vollständig von dieser fern gehalten wird, können wir in ihrer Nähe Gleichung 18) durch die Näherung

$$\varphi = \frac{RT}{F} \left\{ 2(1 + K) \log \frac{r}{r_+} + \log \frac{F \varrho_0 r_+^2}{8 R T K^2} \right\} \quad 19)$$

ersetzen. Die Feldstärke am äußeren Zylinder beträgt infolgedessen

$$\frac{2(1 + K)}{r_-} \cdot \frac{RT}{F}$$

und dieser trägt die elektrische Ladung

$$E = \frac{RT}{F} \times 4\pi(1 + K)a. \quad 20)$$

Sein Potential beträgt nach 19) und 20)

$$\varphi_- = \frac{E}{2\pi a} \log \frac{r_-}{r_+} + \frac{RT}{F} \left[\log \left(\frac{F \varrho_0 r_+^2}{8 RT} \right) - 2 \log \left(\frac{EF}{4\pi a RT} - 1 \right) \right]. \quad 21)$$

Andererseits berechnet sich das Potential der Glühelktrode unverändert nach Gleichung 10); bildet man aus ihr und 21) die Differenz, so folgt:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{|F|} \left[\log \left(\frac{|F| |\varrho_g| r_+^2}{8 RT} \right) - 2 \log \left(\frac{|E| \cdot |F|}{4\pi a RT} - 1 \right) \right] + \frac{|E|}{2\pi a} \log \frac{r_-}{r_+}. \quad 22)$$

Bei zwei kalten Elektroden wäre der Potentialunterschied

$$V = \frac{|E|}{2\pi a} \log \frac{r_-}{r_+}. \quad 23)$$

Man kann also wie beim ebenen Kondensator aus der Beobachtung von $\varphi_+ - \varphi_-$ und von V , und durch Messung der Halbmesser r_+ und r_- die Grenzsichte ϱ_g bestimmen.

Damit der Übergang von der strengen Gleichung 18) zu der angenäherten Formel 19) berechtigt ist, muß

$$e^{-2K \log \frac{r_-}{r_+}} = \left(\frac{r_-}{r_+} \right)^2 e^{-\frac{|F|V}{RT}} \ll 1 \quad 24)$$

(vgl. auch 20) und 23)) sein; aus der streng gültigen Gleichung

$$\varrho = \frac{2RT}{F} \cdot \frac{K^2}{r^2 \sin^2 \left(K \log \frac{r}{r_+} \right)}$$

(siehe S. 227 a. a. O., Formel 31)) folgt dann

$$|\varrho_-| = \frac{2RT}{|F| r_+^2} \left(\frac{|F|V}{2RT \log \frac{r_-}{r_+}} - 1 \right)^2 e^{-\frac{|F|V}{RT}}. \quad 25)$$

So lange r_+ und r_- nicht von verschiedener Größenordnung sind, ist der Inhalt von 24) und 25) wesentlich derselbe wie der von 14) und 15).

Im elektrostatischen Maßsystem lauten die Gleichungen 22) und 23):

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = \quad 25 a)$$

$$\frac{R T}{|F|} \times 2,303 \left[{}^{10}\log \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{|F| \cdot |q_g| r_+^2}{R T} \right) - 2 \cdot {}^{10}\log \left(\frac{|E| |F|}{a R T} - 1 \right) \right]$$

$$V = 4,606 \frac{|E|}{a} {}^{10}\log \frac{r_-}{r_+}. \quad 25 b)$$

§ 2. Strömungen in einer Elektronenschar.

Wir betrachten wie auch früher solche Fälle, in denen die Elektronen hinreichend dicht verteilt sind, daß man ihre Gesamtheit als ein Continuum betrachten kann. Wann diese Bedingung erfüllt ist, dafür haben wir bisher noch kein ausreichendes Kennzeichen. Bei einem gewöhnlichen Gase verlangen wir dafür, daß die freie Weglänge gegen die sonst in Betracht kommenden Strecken klein ist. Den Begriff der freien Weglänge können wir wohl kaum auf die Elektronen übertragen, soweit sie einigermaßen dicht liegen. Aber wir können doch wohl sagen, daß die Strecke, welche in dieser Bedingung an die Stelle der freien Weglänge zu treten hat, sehr viel kleiner ist als bei Gasmolekeln von gleicher Raumdichte. Denn Gasmolekeln wirken erst aufeinander, wenn sich ihre Mittelpunkte auf Entfernungen von 10^{-7} bis 10^{-8} cm nähern. Zwei Elektronen hingegen verteilen sich, wenn sie sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten vom Betrage der mittleren Geschwindigkeit bei 2000 Grad abs. einander bis auf einen Minimalabstand von 10^{-6} cm nähern, eine Ablenkung von fast 19 Winkelgraden, und selbst bei einer Annäherung bis auf 10^{-5} beträgt diese Ablenkung noch $1\frac{1}{2}$ Grad. Jedenfalls liegt aber diese Bedingung schon allen Anwendungen der Gleichung $A\varphi = -q_0 e^{-\frac{E\varphi}{RT}}$ auf die statischen Fälle zu Grunde,

und wir handeln somit nur folgerichtig, wenn wir sie hier auf Strömungserscheinungen übertragen.

Weiter beschränken wir uns auf so geringe Geschwindigkeiten, daß das magnetische Feld, welches ja bei jeder Elektronenbewegung notwendig auftritt, keine merkliche Rückwirkung auf diese Strömung ausübt, daß ferner die elektrische Feldstärke sich immer noch aus einem, wenn auch zeitlich langsam veränderlichen skalaren Potential φ ableitet. Dann können wir die gesamte Hydrodynamik auf die Elektronen anwenden, mit dem einzigen Unterschied, daß das Potential der äußeren Kräfte, statt wie zumeist dort eine gegebene Funktion des Ortes zu sein, hier mit der elektrischen Dichte der Elektronenschar durch die Gleichung $\Delta \varphi = -\varrho$ verbunden und aus ihr und gewissen Grenzbedingungen zu bestimmen ist. Dieser Unterschied ändert aber nichts an der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen, sei es in der Lagrangeschen, sei es in der Eulerschen Form, erst recht nichts an der Kontinuitätsgleichung. Die Helmholtzschen Wirbelsätze gelten ebenfalls unverändert und man kann wie in der Hydrodynamik schließen, daß einmal wirbelfreie Bewegungen dauernd wirbelfrei bleiben. Dann darf man das Geschwindigkeitspotential ψ ($q = \text{grad } \psi$) einführen und kann aus den Eulerschen Gleichungen durch eine Integration die Formel ableiten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + P = -\frac{\varepsilon}{m} \varphi + \text{konst.} \quad (26)$$

P ist dabei das Integral $\int \frac{dp}{\delta}$; wo p den Molekulardruck, $\delta = \frac{m}{\varepsilon} \varrho$ die Massendichte der Elektronenschar bezeichnet. Bei ganz langsamer Strömung wird das thermische Gleichgewicht nicht gestört, sodaß

$$p = \frac{\varrho}{\varepsilon} k T, \quad P = \frac{k T}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad (27)$$

zu setzen ist; daraus folgt dann, wenn wir die Konstante aus 26) mit in $\log \varrho_0$ einbeziehen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{kT}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0} = - \frac{\varepsilon}{m} \varphi. \quad (28)$$

Nimmt man zu dieser Formel hinzu die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{q}) = 0 \quad (29)$$

und die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = - \varrho,$$

so hat man die Differentialgleichungen für die Strömung zusammengestellt.

Für stationäre Strömung folgt bei Vernachlässigung der thermischen Bewegung und des von ihr herrührenden Summanden P in 26)

$$\frac{1}{2} q^2 = - \frac{\varepsilon}{m} \varphi + \text{konst}, \quad \operatorname{div}(\varrho \mathbf{q}) = 0, \quad \Delta \varphi = - \varrho. \quad (30a)$$

Hierzu nimmt man in folgerichtiger Vernachlässigung der Wärmebewegung die Nebenbedingung, daß die Elektronen die Glühkathode mit der Geschwindigkeit 0 verlassen. Aus der ersten der Gleichungen 30 a) folgt dann, wenn wir unter n die Normale auf der Glühelektrode verstehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{m}{\varepsilon} q \frac{\partial q}{\partial n} = 0.$$

Damit aber haben wir die Differentialgleichungen und die beiden Nebenbedingungen zusammengestellt, auf welchen die Theorie der Versuche von Gruppe 2) beruht. — Wir wollen im folgenden im Gegensatz hierzu gerade so geringe Geschwindigkeiten annehmen, daß in 28) das Glied $\frac{kT}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$ gegenüber dem $\frac{1}{2} q^2$ den Ausschlag gibt.

Um die Grenzbedingungen aufzustellen, wollen wir annehmen, daß die Strömung der Elektronen senkrecht auf den Elektrodenflächen steht und daß diese Potentialhöhenflächen sind. Der Austritt des elektrischen Stroms aus der Glühelektrode, welche für dessen Durchgang durch die Elektronen-

schar als Anode dient, geht dann so vor sich, daß mehr Elektronen auf diese auftreffen und infolgedessen auch mehr von ihr aufgenommen werden, als im Gleichgewichtsfall; da andererseits die Elektrode nicht mehr Elektronen hergibt, als in diesem, so ergibt sich der erforderliche Überschuß eintretender Elektronen. An der Kathode, welche nach unserem Plan dieselbe hohe Temperatur hat wie die Anode, müssen umgekehrt weniger Elektroden auftreffen, als beim Gleichgewicht.

Hat die Elektronenschar als Ganzes an einer Stelle eine Geschwindigkeit vom Betrage q in der positiven x -Richtung, so haben an dieser Stelle

$$\frac{\varrho}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}} e^{-\frac{m(\xi - q)^2}{2kT}} d\xi$$

Elektronen eine Geschwindigkeitskomponente in derselben Richtung, die zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt; denn $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ ist die Zahl der Elektronen für die Volumeneinheit. Weist die positive x -Richtung nun senkrecht auf die Anode, so treffen infolgedessen auf diese

$$\frac{\varrho_+}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}} \int_0^{\infty} \xi e^{-\frac{m(\xi - q)^2}{2kT}} d\xi$$

für die Flächen- und Zeiteinheit, wenn ϱ_+ die Dichte unmittelbar vor ihr bedeutet. Wir berechnen das Integral, indem wir $\lambda = \xi - q$ als Integrationsveränderliche einführen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi e^{-\frac{m(\xi - q)^2}{2kT}} d\xi &= \int_{-q}^{\infty} (\lambda + q) e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}} d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}} d\lambda + q \int_0^{\infty} e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}} d\lambda + \int_{-q}^0 \lambda e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}} d\lambda + q \int_{-q}^0 e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}} d\lambda. \end{aligned}$$

Die Auswertung der beiden Integrale von $-q$ bis 0 erleichtern wir uns durch die Annahme

$$q \ll \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad 30 \text{ b)}$$

d. h. daß q klein ist gegen die mittlere Molekulargeschwindigkeit. Dann dürfen wir nämlich in diesen Integralen die e -Funktion gleich 1 setzen. Vernachlässigen wir weiterhin folgerichtigerweise $q^2 \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}$ gegen q , so finden wir für die Zahl der auftreffenden Elektronen:

$$\frac{q_+}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{k T}{2\pi m}} + \frac{1}{2} q \right).$$

Von diesen nimmt die Elektrode auf:

$$v_+ = (1 - S) \frac{q_+}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{k T}{2\pi m}} + \frac{1}{2} q \right). \quad (31)$$

Wäre $q = 0$, so nähme sie statt dessen auf

$$v_0 = (1 - S) \frac{q_g}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k T}{2\pi m}} \quad (32)$$

Elektronen, wenn q_g die gewöhnliche Grenzschichte bedeutet. Ebensoviel gibt sie also auch ab. Der elektrische Strom, der aus ihr herauskommt, hat infolgedessen für die Flächeneinheit die Stärke

$$i = (v_+ - v_0) \varepsilon = (1 - S) \left(\sqrt{\frac{k T}{2\pi m}} (q_g - q_+) - \frac{1}{2} q_+ q \right) \quad (33)$$

Andererseits ist aber auch

$$-q_+ q = i; \quad (34)$$

also gilt nach 33) die Beziehung

$$-(q_+ - q_g) = \frac{1}{2} \frac{1 + S}{1 - S} \sqrt{\frac{2\pi m}{k T}} i. \quad (35)$$

Dies ist die Grenzbedingung für die Anode. Da q_+ und q_g negativ sind, sagt sie aus, daß an der Anode die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit bei der Strömung größer ist, als im Gleichgewichtsfall. An der Kathode ist es gerade umgekehrt, und zwar gilt für sie

$$-(q_- - q_g) = -\frac{1}{2} \frac{1 + S}{1 - S} \sqrt{\frac{2\pi m}{k T}} i. \quad (35a)$$

Wir wollen übrigens noch eine Annahme aufdecken, welche dieser Rechnung zugrunde liegt. Das Spiegelungsvermögen für Elektronen hängt nach den Erfahrungen bei kalten Körpern von deren Auftreffgeschwindigkeit ab. Da hier die Elektronen verschiedene Geschwindigkeiten haben, ist S ein mittleres Spiegelungsvermögen, dessen Wert durch die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen mitbestimmt ist. Im Falle der Strömung herrscht eine etwas andere Geschwindigkeitsverteilung, als im Gleichgewicht. Infolgedessen dürfen wir eigentlich für S in Gleichung 31) und 32) nicht denselben Wert einsetzen. Wenn wir dies doch tun, so berufen wir uns dabei auf die Voraussetzung 30 b) einer sehr kleinen Geschwindigkeit q .

Wir brauchen jetzt nur noch Gleichung (28) mit 35) und 35 a) zu vereinigen. Dabei können wir in 28) noch fortlassen den Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, weil wir nur stationäre Strömung in Betracht ziehen, und $\frac{1}{2} q^2$, weil wir nach 30 b) $\frac{1}{2} q^2$ gegen $\frac{kT}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$ zu vernachlässigen haben. Für den Spannungsunterschied zwischen Anode und Kathode ergibt sich so wie beim Gleichgewicht

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{kT}{e} \log \frac{\varrho_-}{\varrho_+}.$$

In erster Näherung ist nun

$$\log \frac{\varrho_-}{\varrho_+} = \log \frac{\varrho_-}{\varrho_g} - \log \frac{\varrho_+}{\varrho_g} = \frac{\varrho_- - \varrho_+}{\varrho_g}.$$

Sind beide Elektroden eben und einander parallel, so ist die Stromdichte i auf ihnen die gleiche und wir finden aus 35) und 35 a)

$$\varphi_+ - \varphi_- = \sqrt{2\pi m k T} \frac{1 + S}{1 - S} \frac{i}{\varrho_g e}. \quad 36)$$

Eine Messung dieses Zusammenhanges liefert uns also, wie in der Einleitung angekündigt, die Größe $\frac{1 - S}{1 + S} \varrho_g$.

Sind aber die Elektroden konzentrische Zylinder von den Halbmessern r_+ und r_- , und der Höhe a , und hat der Strom

zwischen ihnen die Stärke J , so ist die Stromdichte i an ihnen $\frac{J}{2\pi r_+ a}$ und $\frac{J}{2\pi r_- a}$, so daß wir finden:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \sqrt{\frac{m k T}{2\pi}} \frac{1+S}{1-S} \frac{J}{\varrho_g \varepsilon}. \quad 37)$$

Die Formeln 36) und 37) gelten zunächst in dem hier überall benutzten Lorentzschen Maßsystem. Sie übertragen sich aber unverändert auf das elektrostatische; denn das Potential φ transformiert sich dabei wie $\frac{1}{\varepsilon}$, und die Stromdichte i wie die Raumdichte ϱ_g , während alle anderen dort auftretenden Größen unverändert bleiben. Nun wird mit $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $k = 1,34 \cdot 10^{-16}$ gr cm² sec⁻² grad⁻¹, $T = 2400^0$ grad, $|\varrho_g| = 1,4 \cdot 10^2$ (siehe die Tabelle auf S. 250 a. a. O.) und $|\varepsilon| = 4,8 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten

$$\frac{\sqrt{2\pi m k T}}{\varrho_g |\varepsilon|} = 6,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm sec.}$$

Die Stromdichte i , welche wir hier zur Größenordnungsschätzung in geringer Abänderung von 33) gleich $|\varrho_g| q$ setzen dürfen, ist durch die Bedingung 30 b), derzufolge bei $T = 2400$ grad

$$q \ll \sqrt{\frac{k T}{m}} = 1,9 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1}$$

ist, an eine obere Grenze gebunden, die gegen $2,5 \cdot 10^9$ gr¹ cm⁻¹ sec⁻² klein ist. Wir erfüllen diese Bedingung nun gewiß sehr gut, wenn wir $i = 10^7$ elektrostatische Einheiten (d. h. gleich $3 \cdot 10^{-3}$ Ampere: cm²) wählen. Dann aber wird nach 37)

$$\varphi_+ - \varphi_- = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ elektrostatische Einheiten}$$

d. h. gleich $2 \cdot 10^{-3}$ Volt, und zwar unter der ungünstigsten Annahme, daß das Spiegelungsvermögen $S = 0$ ist. Das sind Verhältnisse, bei denen man durchaus messen könnte.

Zusatz bei der Korrektur.

Bei der Aufzählung der bisherigen Versuche in der Einleitung haben wir die unmittelbar thermischen Messungen der Austrittswärme der Elektronen zu erwähnen vergessen¹⁾. Im Sinne der Richardsonschen Formel und ihrer Ableitung bestimmen sie die Konstante β im Exponenten von 3). Im Sinne unserer zum Gleichgewichtsgesetz 5 a) führenden Überlegung besteht zwischen der Austrittswärme r eines Mols Elektronen und der Elektronenaffinität μ der Zusammenhang:

$$r = 2 R T - \left(\mu - T \frac{d\mu}{dT} \right).$$

Denn die Energie $2 R T$ nimmt ein Mol mit, wenn es durch ein hohes beschleunigendes Potential sogleich als Sättigungsstrom zur Anode überführt wird, und $-\left(\mu - T \frac{d\mu}{dT} \right)$ ist die Abnahme der Energie der Glühkathode bei diesem Vorgang. Wäre r als Funktion der Temperatur bekannt, so ließe sich aus der letzten Gleichung durch Integration μ bis auf eine Konstante bestimmen, und damit wäre nach 5 a), wenn man sich noch auf den quantentheoretischen Wert

$$C^2 = \frac{(\pi m)^{\frac{3}{2}} (2k)^{\frac{5}{2}}}{(N\varepsilon)^2 h^3}$$

stützt, ein gewisser Schluß auf die Grenzdichte ϱ_g möglich. Es scheint uns aber zweifelhaft, ob die bisherigen Versuchsergebnisse so verhältnismäßig weitgehende Folgerungen zulassen.

¹⁾ A. Wehnelt und J. Jentzsch, Verh. d. D. Phys. Ges., 10, 605, 1908; 11, 105, 1909; Annalen d. Phys., 28, 537, 1909; H. Cooke und Q. W. Richardson, Phil. Mag., 25, 624, 1913 und 26, 472, 1913; A. Wehnelt und A. Liebreich, Verh. d. D. Phys. Ges., 15, 1057, 1913; Phys. Zeitschrift, 15, 548, 1914.