Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Elementvereine.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. November 1914.

Die folgende Untersuchung zerfällt in zwei Teile und beantwortet zwei Fragen, auf die der Verfasser bei der Bearbeitung des Artikels III D 7 (Berührungstransformationen) der Mathematischen Enzyklopädie gestoßen ist. In § 1 werden zunächst die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in $n+1$ Veränderlichen bestimmt, deren Charakteristiken gerade Linien sind, sodann werden spezielle semilineare Differentialgleichungen untersucht. (Semilinear heißen Differentialgleichungen, welche unter ihren Lösungen Elementvereine besitzen, deren Dimension, insofern man sie als Punktgebilde betrachtet, um mehr als eine Einheit niedriger als die des betreffenden Raumes ist. Einfachste Beispiele sind die in p und q linearen Differentialgleichungen des $R(x, y, z)$, bei denen ja jede der ∞^2 charakteristischen Kurven eine Lösung darstellt.)

In § 2 wird die bisher unerledigt gebliebene Frage beantwortet, wie bei gewissen daselbst genauer angegebenen Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes die Krümmungselemente sich abbilden. Für die Liesche Geradenkugeltransformation wird die Untersuchung im einzelnen durchgeführt.

§ 1. Semilineare Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken.

Durch die Untersuchungen von F. Engel[1]) und einige sich daran schließende Arbeiten ist eine bereits früher von S. Lie und A. V. Bäcklund in Angriff genommene Frage der weitergehenden Behandlung zugänglich geworden, die Frage nämlich, ob eine vorgelegte partielle und nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

unterdimensionale Lösungen besitzt. Unter Lösung ist dabei ein Verein von ∞^n Elementen zu verstehen, der die Differentialgleichung erfüllt; unterdimensional von der r^{ten} Klasse heißt die Lösung, wenn aus dem System von Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten, das die Lösung darstellt, durch Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nicht eine einzige Gleichung zwischen den Punktkoordinaten entsteht, sondern die Anzahl der entstehenden Gleichungen $r+1$ beträgt. Ist r die höchste Klasse für eine vollständige Lösung, so bezeichnet man die gegebene Differentialgleichung als semilinear von der r^{ten} Klasse[2]).

Die folgende Betrachtung will einen Beitrag zu diesen Untersuchungen geben, in dem die Klasse einer gewissen Differentialgleichung mit geradlinigen Charakteristiken bestimmt wird. Vorausgeschickt ist die Erweiterung eines schon früher aufgestellten Satzes, der die Bestimmung aller Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken gestattet.

I. Partielle Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken.

Im $(n+2)$-dimensionalen Raum hat eine partielle Differentialgleichung *erster Ordnung mindestens* ∞^{n+1} *und höchstens* ∞^{2n+1} charakteristische Kurven. Es soll die Bedingung dafür

[1]) Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen. Leipz. Berichte 1905, S. 161—232. Vgl. Math. Enz. III D 7, Liebmann, Nr. 22.

[2]) Math. Enz. II A 5, von Weber, Nr. 34.

aufgestellt werden, daß diese Kurven gerade Linien sind. Nach Engel ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die gegebenen Kurven Charakteristiken sind, folgende: Unter den Bedingungen, die sich für das Schneiden zweier unendlich benachbarten Kurven der gegebenen Schar ergeben durch Elimination der Punktkoordinaten, muß sich mindestens eine in den Differentialen der Parameter lineare befinden.

Die Geraden seien jetzt dargestellt durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 x + \varrho_1 \\ x_2 &= r_2 x + \varrho_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= r_n x + \varrho_n \\ z &= s x + \sigma \end{aligned}$$

und speziell die Geradenschar, von der verlangt wird, daß sie Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung sind, durch die Gleichungen

$$f(r_1, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = 0$$

in Verbindung mit k weiteren Gleichungen zwischen den Linienkoordinaten; wir fassen die Gleichungen zusammen in die eine:

$$1)\quad F(r_1, r_2, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = f + \lambda_1 f_1 \ldots + \lambda_k f_k = 0.$$

Als Bedingung für das Schneiden ergibt sich dann:

$$dr_1\left(\frac{\partial F}{\partial r_1} - x\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\right) + \cdots + dr_n\left(\frac{\partial F}{\partial r_n} - x\frac{\partial F}{\partial \varrho_n}\right) + ds\left(\frac{\partial F}{\partial s} - x\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right) = 0$$

in Verbindung mit den in $F=0$ enthaltenen $k+1$ Gleichungen. Hieraus ergibt sich dann auf Grund des Engelschen Satzes, daß alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$2)\quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial r_1} & \dfrac{\partial F}{\partial r_2} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial r_n} & \dfrac{\partial F}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_1} & \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_2} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_n} & \dfrac{\partial F}{\partial \sigma} \end{matrix} \right\|$$

infolge der Gleichungen (1) verschwinden müssen, und dies sind im ganzen $n-k$ Bedingungen. Ist also die Schar der Geraden $(n+1)$-gliedrig, so sind sie von selbst Charakteristiken (die zugehörige Differentialgleichung ist dann linear), ist sie $(2n+1)$-gliedrig, so sind n Bedingungen zu erfüllen; dazwischen treten alle Zwischenstufen $(0 \leqq k < n)$ auf.

Wir wollen dieses Ergebnis noch geometrisch deuten, indem wir untersuchen, welche Beschaffenheit ein Komplex von $(2n+1)$-fach unendlich vielen Geraden besitzt, wenn er die Bedingung erfüllt. Es wird sich zeigen, daß die Geraden einen Tangentenkomplex bilden, d. h. daß sie aus den Tangenten einer $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit des R_{n+2} bestehen.

Zunächst ist zu bemerken, daß die Komplexgleichung

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = 0$$

sich durch die Substitution

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} r_i &= x_i', \quad \varrho_i = x_i - x x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ s &= z', \quad \sigma = z - x z' \end{aligned}$$

in die Mongesche Gleichung

$$f(x_1', \ldots, x_n', z', x_1 - x_1' x, \ldots, x_n - x_n' x, z - z' x) = 0$$

verwandelt, die zu der zugeordneten partiellen Differentialgleichung gehört. Die charakteristischen Streifen werden dann bestimmt durch das System von Gleichungen

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial s} - x\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}} = \frac{dx_i}{x_i'\left(\dfrac{\partial f}{\partial \sigma} - x\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right)} = \frac{dz}{(p + \Sigma p_i x_i')\left(\dfrac{\partial f}{\partial \sigma} - x\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right)}$$

$$= \frac{dp_i}{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_i} + p_i\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right)} = \frac{dp}{\Sigma x_i'\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_i} + p\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right)}$$

und es ergibt sich auf der anderen Seite die partielle Differentialgleichung durch Elimination von z', $x_1', \ldots, x_n'$ aus den Gleichungen

$$[f] = 0, \quad z' - p - p_1 x_1', \ldots - p_n x_n' = 0$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_i}\right] + p_i \left[\frac{\partial f}{\partial s}\right] - x\left(\left[\frac{\partial f}{\partial \varrho_i}\right] + p_i\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Einschließung in [ ] bedeutet, daß die Substitution (3) ausgeführt ist. Aus den zuletzt hingeschriebenen Gleichungen in Verbindung mit (2) folgt aber, daß die Nenner von dp_i und dp im vorigen System verschwinden, d. h. längs eines charakteristischen Streifens sind $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ konstant.

Daraus aber ergibt sich die Form der Differentialgleichung. Wir setzen sie zunächst in der Gestalt an:

$$z - px - \Sigma p_i x_i - u(x, x_1, \ldots, x_n, p, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

und erhalten für die charakteristischen Streifen das System

$$\frac{dx}{x + \frac{\partial u}{\partial p}} = \frac{dx_i}{x_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}} = \frac{dp}{-p + p - \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{dp_i}{-p_i + p_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Demnach muß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

sein, und die partielle Differentialgleichung hat die Form

$$z - px - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n = u(p, p_1, \ldots, p_n),$$

woraus folgt, daß die Charakteristiken die Tangenten der Fläche sind, deren Gleichung aus

$$z - ax - a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n = u(a, a_1, \ldots, a_n)$$

und

$$x + \frac{\partial u}{\partial a} = 0, \qquad x_i + \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0$$

durch Elimination von $a, a_1, \ldots, a_n$ entsteht, d. h. die Charakteristiken bilden eben einen Tangentenkomplex.

Indem wir das Ergebnis zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

Die durch die $k+1$ Gleichungen

$$f=0, \quad f_1=0, \ldots, \quad f_k=0 \, (0 \leqq k \leqq n)$$

zwischen den $2n+2$ Linienkoordinaten des R_{n+2} gegebenen ∞^{2n-k+1} Geraden sind dann und nur dann die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung, wenn sich die Konstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ so bestimmen lassen, daß

$$F = f + \lambda_1 f_1 \cdots + \lambda_k f_k = 0$$

ein Tangentenkomplex ist. Die Anzahl der Bedingungen hierfür ist gleich $n-k$[1]).

2. Untersuchung einer Klasse von semilinearen Gleichungen.

Schon in der früheren Untersuchung[2]) ist für den Fall des R_4 diejenige Differentialgleichung besprochen worden, deren Charakteristiken aus den Tangenten einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades bestehen. Die entsprechenden Differentialgleichungen gehören auch für Räume höherer Dimension zu den semilinearen und haben unterdimensionale lineare Mannigfaltigkeiten als Lösungen, wie hier gezeigt werden soll. Es handelt sich also um die partiellen Differentialgleichungen, welche durch linear gebrochene Transformationen in die Gestalt

$$z - p_1 x_1 \cdots - p_n x_n + \tfrac{1}{2}(p_1^2 \cdots + p_n^2) = 0 \tag{4}$$

gebracht werden können und deren Charakteristiken die Tangenten der Mannigfaltigkeit

$$z + \tfrac{1}{2}(x_1^2 \cdots + x_n^2) = 0 \tag{5}$$

sind. Wir schreiben sie in der Form

$$z - p_1 x_1 \cdots - p_k x_k - q_1 y_1 \cdots - q_m y_m + \tfrac{1}{2}\Sigma p^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma q^2 = 0$$

und suchen, den Bestimmungen der Aufgabe gemäß, nach

[1]) Leipz. Berichte 1912, S. 411 (für den R_4).

[2]) A. a. O., S. 417.

m-dimensionalen linearen Lösungen, nach solchen Lösungen also, die durch ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} z &= c_1 x_1 \cdots + c_m x_m + c \\ y_1 &= b_{11} x_1 \cdots + b_{1m} x_m + b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= b_{k1} x_1 \cdots + b_{km} x_m + b_k \end{aligned}$$

gegeben sind.

Um zunächst die Elementkoordinaten einer solchen m-dimensionalen Ebene zu bestimmen, sind noch diejenigen Gleichungen beizufügen, die aus

$$\begin{aligned} dz - \Sigma p\,dx - \Sigma q\,dy = c_1\,dx_1 \cdots + c_m\,dx_m - p_1\,dx_1 - \cdots - p_m\,dx_m \\ - q_1(b_{11}\,dx_1 \cdots + b_{1m}\,dx_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ - q_k(b_{k1}\,dx_1 \cdots + b_{km}\,dx_m) = 0 \end{aligned}$$

entstehen, wenn man die Koeffizienten der dx_i gleich Null setzt. Man erhält dann die ergänzenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 - q_1 b_{11} \cdots - q_k b_{k1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= c_m - q_1 b_{1m} \cdots - q_k b_{km}. \end{aligned}$$

Setzt man die Werte von $z, y, \ldots, y_k, p, \ldots, p_m$ in die Differentialgleichung ein und verlangt, daß sie erfüllt ist, so erhält man durch Nullsetzen der darin noch vorkommenden Koeffizienten der unabhängigen Veränderlichen $x, \ldots x_m, q_1 \ldots q_k$ und ihrer Produkte die Gleichungen

$$\begin{aligned} c + \tfrac{1}{2}(c_1^2 \cdots + c_m^2) &= 0 \\ - b_1 + c_1 b_{11} \cdots + c_m b_{1m} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ - b_k + c_1 b_{k1} \cdots + c_m b_{km} &= 0 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} 1 + b_{11}^2 \cdots + b_{1m}^2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + b_{k1} \cdots + b_{km}^2 &= 0 \\ b_{i1} b_{j1} \cdots + b_{im} b_{jm} &= 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, \cdots, k). \end{aligned}$$

Die ersten $k+1$ Gleichungen bestimmen c und die $b_1, \ldots, b_m$, wobei $c_1, \ldots, c_m$ ganz beliebig gewählt werden können, die weiteren $m \cdot k$ Größen sind aber noch den weiteren $\frac{k(k+1)}{2}$ Bedingungen zu unterwerfen. Es fragt sich, wenn diese Gleichungen lösbar sind, und wie groß die Mannigfaltigkeit dieser Lösungen ist.

Die Gleichungen haben, wenn man die $b_{i\mu}$ durch $\sqrt{-1}\, b_{i\mu}$ ersetzt, die Form von Orthogonalitätsrelationen, woraus die Bedingung für die Auflösbarkeit leicht folgt.

Ist $k > m$, so denke man sich etwa

$$\begin{matrix} b_{11}, \ldots, b_{1m} \\ b_{21}, \ldots, b_{2m} \\ \vdots \\ b_{m1}, \ldots, b_{mm} \end{matrix}$$

den Bedingungen gemäß bestimmt, soweit sie diese Größen und weiter keine enthalten. Die Determinante dieser m^2 Größen ist dann dem absoluten Betrage nach gleich Eins.

Dazu kommen aber noch weitere Gleichungen, z. B.

$$\begin{aligned} &1 + b_{r1}^2 + b_{r2}^2 \cdots + b_{rm}^2 = 0 \qquad (r > k) \\ &b_{11} b_{r1} \cdots + b_{1m} b_{rm} = 0 \\ &\vdots \\ &b_{m1} b_{r1} \cdots + b_{mm} b_{rm} = 0. \end{aligned}$$

Die letzten m Gleichungen zeigen, daß die $b_{r1}, \ldots, b_{rm}$ alle gleich Null sein müßten, weil die Determinante von Null verschieden ist, und das wäre ein Widerspruch gegen die erste Gleichung. Für $k > m$ sind also die Bedingungen nicht erfüllbar, wohl aber für $k \leqq m$, und zwar erhält man dann gerade, der Anzahl der Gleichungen entsprechend,

$$\begin{aligned} km - k - \frac{k(k-1)}{2} \\ = k\left(m - \frac{k+1}{2}\right) \end{aligned}$$

unabhängige Größen $b_{k\mu}$ und im ganzen

$$m + k\left(m - \frac{k+1}{2}\right) = (k+1)\left(m - \frac{k}{2}\right)$$

unabhängige Koeffizienten.

Damit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß die Differentialgleichung (4) gerade

$$\infty^{(k+1)\left(m-\frac{k}{2}\right)} \qquad (k+m=n,\ m \geqq k)$$

lineare m-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten enthält.

Von diesen Integralmannigfaltigkeiten (Integral-L_m) beanspruchen aber nur diejenigen ein besonderes Interesse für allgemeinere Untersuchungen, deren Punkte nicht der singulären Lösung (5) angehören, da ja bei allgemeinen Punkttransformationen die Differentialgleichung ihr Verhalten nur in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage nicht ändert.

Es ist also noch zu untersuchen, welche unter den so erhaltenen Integral-L_m die Gleichung (5) identisch erfüllen. Um dies festzustellen, bilden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_m^2 + y_1^2 \cdots + x_k^2) \\ = \tfrac{1}{2}\{&x_1^2(1 + b_{11}^2 \cdots + b_{k1}^2) \cdots + x_m^2(1 + b_{1m}^2 \cdots + b_{km}^2) \\ &+ 2x_1x_2(b_{11}b_{12} + \cdots + b_{k1}b_{k2}) + \cdots \\ &+ 2x_1(b_1b_{11} \cdots + b_kb_{k1}) + \cdots \\ &+ b_1^2 \cdots + b_k^2\} \end{aligned}$$

und verlangen, daß er auf Grund der Beziehungen, welche die Koeffizienten erfüllen, gleich

$$-z = -(c_1x_1 \cdots + c_mx_m + c)$$

wird.

Hieraus folgt, daß die $b_{k\mu}$ jetzt Relationen zu erfüllen haben, die aus den früheren durch Vertauschung der Reihen mit den Zeilen entstehen, und das tritt nur für $k = m$ ein[1]).

[1]) So hat die Differentialgleichung

$$z - px - qy + pq = 0,$$

deren Charakteristiken die Tangenten des Paraboloides

$$z - xy = 0$$

In diesem Fall sind aber auch die übrigen Forderungen erfüllt. In der Tat wird dann

$$b_1 b_{11} + \cdots b_k b_{k1} = c_1(-1) + c_2 \cdot 0 \cdots + c_m \cdot 0 = -c_1$$

usw. und

$$\tfrac{1}{2}(b_1^2 \cdots + b_k^2) = (-1)c_1^2 \cdots + (-1)c_m^2 + c_1 c_2 \cdot 0 + \cdots = -c.$$

Läßt man also diese singulären (nicht durch Punkte allgemeiner Lage gehenden) Integral-L_m fort, so kommt das endgültige Ergebnis:

Die partielle Differentialgleichung

$$z - p_1 x_1 \cdots - p_n x_n + \tfrac{1}{2}(p_1^2 \cdots + p_n^2) = 0$$

ist für $n > 2$ immer semilinear, sie hat im besonderen dann immer

$$\infty^\mu = \infty^{(k+1)\left(m - \frac{k}{2}\right)} \qquad (k + m = n,\ m > k)$$

m-dimensionale lineare Integralmannigfaltigkeiten L_m.

Um einige Beispiele auszuführen, geben wir die folgende Übersicht:

$n = 3$ gibt nur $m = 2$, $\mu = 3$, Klasse: $r = 1$

$n = 4$ gibt $m = 3$, $\mu = 5$, Klasse: $r = 1$

$n = 5$ gibt $m = 4$, $\mu = 14$ und $m = 3$, $\mu = 6$, Klasse: $r = 2$.

Die beiden letzteren Fälle sind insofern beachtenswert, als hier bereits die Zahl der Parameter in den unterdimensionalen Lösungen größer ist als die Anzahl der Parameter in einer vollständigen Lösung beträgt (die letztere ist gleich n) — eine Möglichkeit, auf die in früheren Untersuchungen, wie es scheint, von keiner Seite hingewiesen worden ist. In den beiden Fällen $n = 3$ und $n = 4$ gibt es außer den angegebenen Integral-L_2

---

sind, 2 Scharen von ∞^1 Integralgeraden, nämlich die Erzeugenden des Paraboloides. In der Tat erfüllt der Verein

$$y = c, \quad z = xc, \quad p = c$$

die Differentialgleichung.

bzw. Integral-L_3 keine weiteren unterdimensionalen Integralmannigfaltigkeiten, aus denen sich eine vollständige Lösung aufbauen läßt. Für $n = 5$ aber können aus den Integral-L_3 leicht vierdimensionale Integralmannigfaltigkeiten abgeleitet werden, die von den Integral-L_4 verschieden sind.

§ 2. Über die Transformation der Krümmungselemente.

Unter den Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes beanspruchen diejenigen ein besonderes Interesse, bei denen die charakteristischen Streifen einer bestimmten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in die Flächenelemente einer Pfaffschen Gleichung übergehen. Sie nehmen eine besondere Stellung ein, weil bei ihnen die „im allgemeinen" bestehende gegenseitige Eindeutigkeit oder doch Endlichdeutigkeit der Abbildung aufgehoben ist, insofern jedesmal den ∞^1 Flächenelementen eines charakteristischen Streifens im Bildraum nur ein Element entspricht. Auch die Liesche Geraden-Kugeltransformation gehört zu dieser Gattung[1]).

I. Allgemeine Untersuchung.

Bei derartigen Transformationen entsteht nun die Frage: Wie werden die Krümmungselemente K' abgebildet, deren Träger die Flächenelemente der gegebenen partiellen Differentialgleichung sind?

Diesen $\infty^4 \cdot \infty^3 = \infty^7$ Krümmungselementen des einen Raumes $R(x, y, z)$ können im anderen Raum $R_1(x_1, y_1, z_1)$ nur $\infty^3 \cdot \infty^3 = \infty^6$ Krümmungselemente entsprechen, und die Vollständigkeit verlangt, daß über die Art der Zuordnung Rechenschaft gegeben wird, was hier geschehen soll.

Die aequationes directrices der Berührungstransformation seien:

[1]) Vgl. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 12 des in Anmerkung 1 genannten Artikels der Mathematischen Enzyklopädie.

1) $$z + f(x, y, x_1, z_1) = 0$$

2) $$F = \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

Diese Transformation führt, wie wir gleich sehen werden, die je ∞^1 Flächenelemente eines charakteristischen Streifens der aus (1) in Verbindung mit

2') $$p + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad q + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

durch Elimination von x_1 und z_1 entstehenden Differentialgleichung in je ein Element der Pfaffschen Gleichung

$$dz_1 - y_1\, dx_1 = 0$$

über. In der Tat erhält man zur vollständigen Aufstellung der Berührungstransformation die weiteren Gleichungen

3) $$p + \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q + \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}\right), \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}\right)$$

und diese zeigen für $\lambda = 0$, daß den ∞^1 Flächenelementen des durch (1), (2) und (2') gegebenen Streifens ein ganz bestimmtes Element

$$x_1, y_1, z_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_1 = 0$$

entspricht. Für die Transformation der ausgezeichneten Krümmungselemente (K'), um die es sich im folgenden allein handelt, sind die Formeln dann leicht zu berechnen. Durch Variation der Gleichungen (1) und (2) erhält man zunächst:

$$\left(p + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(q + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\delta x_1 + q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta y_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}\right)\delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}\right)\delta y_1 = 0.$$

Die erste Gleichung ist hier identisch erfüllt, in der zweiten ist $p_1 = y_1$ zu setzen. Wir haben dann noch die vier Gleichungen (3) zu variieren, wobei λ gleich Null zu setzen ist, außerdem natürlich

$$q_1 = p_1 - y_1 = 0$$

und endlich

$$\delta p = r\delta x + s\delta y, \qquad \delta q = s\delta x + t\delta y$$
$$\delta p_1 = r_1\delta x_1 + s_1\delta y_1, \qquad \delta q_1 = s_1\delta x_1 + t_1\delta y_1.$$

Wir lassen δp_1 und δq_1 zunächst stehen und setzen noch

4) $$r + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = R, \qquad s + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = S, \qquad t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = T$$

und außerdem

4') $$\frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{dF}{dx_1}.$$

Dann kommt

$$R\delta x + S\delta y + (\delta x_1 - \delta\lambda)\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$S\delta x + T\delta y + (\delta y_1 - \delta\lambda)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \delta p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \delta x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \delta\lambda \frac{dF}{dx_1} = 0$$

$$\delta q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

und dazu von oben

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{dF}{dx_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta y_1 = 0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y = (\delta\lambda - \delta x_1)\cdot w$$

5) $$w = \frac{T\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2S\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{RT - S^2}$$

und aus den drei letzten weiter

$$w\,\delta q_1 = \left(w - \frac{dF}{dx_1}\right)\delta x_1 - \frac{\partial f}{\partial z_1}\,\delta y_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\,\delta p_1 + \left(w - \frac{dF}{dx_1}\right)\delta q_1 = \left(w - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\delta x_1$$

und, wenn man die Bedeutung von δp_1 und δq_1 berücksichtigt,

$$s_1 w = w - \frac{dF}{dx_1}$$

$$t_1 w = -\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

6)
$$s_1\left(w - \frac{dF}{dx_1}\right) + r_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = w - \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$t_1\left(w - \frac{dF}{dx_1}\right) + s_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0\,.$$

Die drei ersten Gleichungen drücken (in Verbindung mit (1), (2), (4) und (5)) die Koordinaten r_1, s_1 und t_1 aus, die vierte zeigt nur, daß der Ansatz auf keinen Widerspruch führt und dient mit zum Beweis der Richtigkeit.

Damit ist die gesuchte Abbildung der ausgezeichneten Krümmungselemente vollständig gegeben, und es handelt sich jetzt nur mehr darum, das Ergebnis zu deuten.

Die Gleichungen ergeben zunächst die von vornherein selbstverständliche Tatsache, daß jedem ausgezeichneten Element des Raumes (x, y, z) auch ein ausgezeichnetes Krümmungselement K_1 des $R_1(x_1 y_1 z_1)$ entspricht, d. h. eines, dessen Träger ein Flächenelement der Pfaffschen Gleichung

$$dz_1 - y_1\,dx_1 = 0 \qquad (p = y_1,\ q_1 = 0)$$

ist; sie zeigen aber weiter, daß man im R_1 nicht alle ausgezeichneten Krümmungselemente erhält, sondern zu jedem Flächenelement der Pfaffschen Gleichung nur ∞^2, denn aus (2) und (6) folgt durch Elimination von x, y und w eine Gleichung zwischen $x_1 y_1 z_1$ und $r_1 s_1 t_1$.

So entsprechen z. B. bei der Berührungstransformation

$$z + xx_1 + yz_1 + x_1 z_1 = 0$$
$$F = (x + z_1) + y_1(y + x_1) = 0$$

den ausgezeichneten Krümmungselementen des $R(x, y, z)$ nur solche, die die Gleichung

$$2(r_1 t_1 - s_1^2) + s_1 + 1 = 0$$

erfüllen. (Dies folgt unmittelbar aus dem weiter unten stehenden System von Gleichungen.)

Den ∞^7 ausgezeichneten Elementen K' entsprechen also unter den ∞^6 ausgezeichneten Elementen K_1' nur gewisse ∞^5 Elemente K_1''. Zu jedem solchen Element K_1'' kann man dann umgekehrt die entsprechenden Elemente K' leicht angeben. Durch ein Element K_1'' ist nämlich x, y, z und w bestimmt, also ein Flächenelement des $R(x, y, z)$ und, ihm anhängend, ∞^2 Krümmungselemente K'.

In unserem Beispiel lautet das vollständige System der Gleichungen so:

$$z + xx_1 + yz_1 + x_1 z_1 = 0$$
$$x + z_1 + y_1(y + x_1) = 0$$
$$p + x_1 = 0, \quad q + z_1 = 0, \quad p_1 = y_1, \quad q_1 = 0$$
$$w = \frac{t - 2sy_1 + ry_1^2}{rt - s^2}$$
$$s_1 w = w - 2y_1$$
$$t_1 w = -(y + x_1)$$
$$s_1(w - 2y_1) + r_1(y + x_1) = w - y_1.$$

Liegt ein ausgezeichnetes Element K_1'' vor, so liefern die letzten Gleichungen y und w, die beiden ersten x und z, die Koordinaten r, s und t sind dann in der Tat nur noch der einen Bedingung unterworfen, daß w einen vorgeschriebenen Wert hat.

Wo aber bleiben im $R(x, y, z)$ die Bilder der anderen von den K_1'' verschiedenen ausgezeichneten Krümmungselemente K_1'?

In diesem Fall muß w unbestimmt werden, es müssen also die Gleichungen

$$R\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2S\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + T\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0$$

und

$$RT - S^2 = 0$$

bestehen, die sich ersetzen lassen durch

$$7)\qquad \begin{aligned} R\frac{\partial F}{\partial y} - S\frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ S\frac{\partial F}{\partial y} - T\frac{\partial F}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Elemente ist leicht festzustellen; es wird sich zeigen, daß wir einfach mit Krümmungselementen K'' der durch die partielle Differentialgleichung gegebenen Flächen zu tun haben.

In der Tat, wenn

$$z + f(x, y, x_1, z_1) = 0$$

in Verbindung mit

$$F = \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \quad z_1 = y(x_1), \quad y_1 = y'(x_1)$$

irgend eine Lösung ist, so bekommt man mit Anwendung der Abkürzungen (4) zur Bestimmung von r, s, t die Gleichungen

$$\begin{aligned} R\,dx + S\,dy + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_1 + y_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_1 &= 0 \\ S\,dx + T\,dy + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx_1 + y_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx_1 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R\,dx + S\,dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx_1 &= 0 \\ S\,dx + T\,dy + \frac{\partial F}{\partial y}dx_1 &= 0 \end{aligned}$$

und dies führt auf die Gleichungen (7).

Den Elementen K'' entsprechen also die von den K_1'' verschiedenen Elemente K_1' und zwar ist durch ein Element K'' nur der Träger von K_1' bestimmt.

Das Ergebnis möge nun noch zusammengefaßt werden: Der Betrachtung unterworfen sind gewisse Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes $R(x, y, z)$, diejenigen nämlich, welche den $\infty^3 \cdot \infty^1$ Flächenelementen E' einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die ∞^3 Flächenelemente E_1' einer Pfaffschen Gleichung des $R_1(x_1, y_1, z_1)$ zuordnen, so zwar, daß jedem charakteristischen Streifen der Differentialgleichung ein Element der Pfaffschen Gleichung entspricht.

Genauer untersucht wird die Abbildung der ∞^7 Krümmungselemente $K'(x, y, z, p, q, r, s, t)$, deren Träger die angegebenen Elemente $E'(x, y, z, p, q)$ sind, und unter denen die ∞^5 Krümmungselemente K'', welche den Lösungen der partiellen Differentialgleichung angehören, eine besondere Klasse bilden.

Ausgezeichnete Krümmungselemente K_1' des $R_1(x_1 y_1 z_1)$ sollen ferner die ∞^6 Krümmungselemente heißen, deren Träger die Flächenelemente E_1' sind.

Dann zeigt unsere Untersuchung, daß die folgenden Sätze bestehen:

1. Einem Element K', das nicht der Klasse K'' angehört, entspricht kein allgemeines Element K_1; die Bilder K_1'' der K' sind vielmehr der Bedingung unterworfen, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen $r_1, t_1, s_1, x_1, y_1, z_1$ besteht.

2. Jedem Element K'' mit dem Träger E' entspricht ein beliebiges Element K_1'' mit dem Träger E_1'.

3. Jedem Element K_1'' mit dem Träger E_1' entsprechen ∞^2 Elemente K', deren Träger ein bestimmtes unter den ∞^1 dem Flächenelemente E_1' zugeordneten Elemente E' ist.

4. Jedem Element K_1' mit dem Träger E_1, das nicht der Klasse K_1'' angehört, entsprechen ∞^2 Elemente K'', deren Träger die Elemente E' des charakteristischen Streifens sind, dessen Bild E_1' ist.

Soviel läßt sich ganz allgemein aussagen. Will man die noch vorhandenen Unbestimmtheiten beseitigen, so werden dazu in jedem einzelnen Fall besondere Grenzübergänge nötig, die aber zu Ergebnissen von allgemeiner Bedeutung nicht führen können.

2. Die Liesche Geradenkugeltransformation.

Der Vollständigkeit halber wird hier noch angegeben, wie sich die Verhältnisse bei der Lieschen Geradenkugeltransformation[1]) gestalten.

Um die Formeln nicht zu unübersichtlich zu gestalten, gehen wir nicht von den aequationes directrices in der bei Lie angegebenen Gestalt aus, sondern wir wählen die Gestalt

$$x + x_1 z + z_1 = 0$$
$$x_1 y - z - y_1 = 0,$$

die aus der ersteren durch eine sehr einfache Transformation

$$X + iY = x$$
$$X - iY = y$$
$$Z = z$$

des Raumes der Kugeln sich ergibt.

Die Formeln für die Berührungstransformation werden dann

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4pq}}{2p}, \quad y_1 = yx_1 - z, \quad z_1 = -x - x_1 z$$

$$p_1 = -z - q_1 y, \qquad q_1 = x_1 + \frac{1}{p},$$

und es ist dann

$$w^2 = 1 + 4pq = 0$$

(bei Lie:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0)$$

diejenige Differentialgleichung, deren charakteristische Streifen in die Flächenelemente des Bildraums übergehen, die einer

---

[1]) Vgl. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I. Leipzig 1896, S. 463.

bestimmten Pfaffschen Gleichung genügen, nämlich der Gleichung

$$dz_1 - y_1 dx_1 + x_1 dy = 0.$$

In der Tat entspricht dem charakteristischen Streifen, der durch die Gleichungen

$$x + az + c = 0$$
$$ay - z - b = 0$$
$$p = -\frac{1}{2a}, \quad q = \frac{a}{2}$$

gegeben ist, das Flächenelement

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c, \quad p_1 = b, \quad q_1 = -a.$$

Um sodann die Elemente zweiter Ordnung zu transformieren, bedienen wir uns eines von Engel[1]) angegebenen Verfahrens, das, für andere Zwecke eingeführt, auch für die wirkliche Berechnung, also die Erweiterung einer Berührungstransformation, sich unentbehrlich erweist.

Man hat zu diesem Zweck die Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad \delta p = r\,\delta x + s\,\delta y$$
$$dq = s\,dx + t\,dy, \quad \delta q = s\,\delta x + t\,\delta y$$

zu betrachten. Aus ihnen folgt, wenn man

$$dy\,\delta x - dx\,\delta y = v$$
$$rt - s^2 = u$$

setzt,

[1]) F. Engel, Die höheren Differentialquotienten. (Leipz. Berichte 1902, S. 17—51.) § 2. (Die Elemente zweiter Ordnung im Raume). Mit diesen Elementkoordinaten läßt sich z. B. nachweisen, daß die fünf Gleichungen, die $r_1 s_1 t_1 u_1$ durch r, s, t, u ausdrücken, auf keinen Widerspruch führen, obwohl doch nur drei Größen (r, s, t bzw. $r_1 s_1 t_1$) unabhängig sind. (Vgl. die Dissertation von O. Lier, Über Flächenscharen, die durch Berührungstransformationen in Kurvenscharen überführbar sind. (Greifswald 1909), S. 3—7.)

$$dp\,\delta x - \delta p\,dx = sv$$
$$dp\,\delta y - \delta p\,dy = -rv$$
$$dq\,\delta x - \delta q\,dx = tv$$
$$dq\,\delta y - \delta q\,dy = -sv$$
$$dq\,\delta p - \delta q\,dp = uv.$$

Die zweireihigen Determinanten können dann in den Rechnungen benützt werden als homogene Größen, und es ergibt sich als Tafel, aus der die Erweiterung, d. h. die Transformation der r, s, t abzulesen ist:

	rv	sv	tv	uv	v
r_1v_1	$-\frac{2yq^2}{p}$	$+\frac{2y(1+2pq)}{p}$	$-2py$	$+\frac{y^2}{p^2}$	$-w^2$
s_1v_1	$-\frac{q^2}{p}$	$+\frac{1+2pq}{p}$	$-p$	$+\frac{y}{p^2}$	0
t_1v_1	0	0	0	$+\frac{1}{p^2}$	0
u_1v_1	$-\frac{\alpha_2^2}{4p^3}$	$+\frac{\alpha_2}{p}$	$-p$	0	0
v_1	$+\frac{\alpha_1^2}{4p^3}$	$-\frac{\alpha_1}{p}$	$+p$	0	0

Dabei sind die Abkürzungen gebraucht

$$w = +\sqrt{1+4pq}$$
$$\alpha_1 = -w + 1 + 2pq, \qquad \alpha_2 = w + 1 + 2pq.$$

Setzt man hierin w gleich Null, so ergeben die beiden letzten Zeilen

$$u_1 + 1 = r_1t_1 - s_1^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung sondert also die früher mit K_1'' bezeichneten Elemente aus, deren Träger das Flächenelement ist

$$x_1, y_1, z_1, p_1 = y_1, \qquad q_1 = -x_1.$$

Die Elemente K'' sind hier gegeben durch

$$1 + 4pq = 0$$

in Verbingung mit

$$rq + sp = 0$$
$$sq + tp = 0,$$

woraus noch folgt

$$u = rt - s^2 = 0.$$

Wendet man diese Gleichungen an, so zeigt sich, daß die durch die Tafel bestimmten Größen der ersten Reihe sämtlich zu Null werden, also r_1, s_1 und t_1 völlig unbestimmt.

Wollte man den Grenzübergang ausführen, so wäre der Ansatz zu machen:

$$p = \frac{\varepsilon + 1}{2} e^{a}, \qquad q = \frac{\varepsilon - 1}{2} e^{-a}$$
$$r = - s e^{2a} + \eta, \qquad t = - s e^{-2a} + \zeta.$$

Je nachdem wie man dann bei festgehaltenem a und s die drei Größen ε, η und ζ zu Null übergehen läßt, erhält man ganz verschiedene Werte von r_1, s_1 und t_1.