# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1913. Heft II

Mai- bis Julisitzung

---

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Mai 1913.

Herr Nörlund hat in seiner Arbeit „Fractions continues et différences réciproques"[1]) unter anderem die Frage behandelt, wie sich die $\nu^{te}$ Ableitung $f^{(\nu)}(x)$ bei konstantem $x$ für $\lim \nu = \infty$ verhält, wenn die Funktion $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt; dabei werden die Koeffizienten der Differentialgleichung als rationale Funktionen von $x$ vorausgesetzt und die singulären Punkte sollen, außer allenfalls $x = \infty$, lauter sogenannte Stellen der Bestimmtheit sein. Herrn Nörlunds Methode besteht darin, daß er für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ eine lineare Differenzengleichung aufstellt, auf welche sich dann, da ihre Koeffizienten rationale Funktionen von $\nu$ sind, die sogenannte Laplacesche Transformation anwenden läßt. Da aber bei der Laplaceschen Transformation immer eine Reihe von Ausnahmsfällen bleibt, die eine gesonderte Überlegung erfordern, so hat diese Methode den Nachteil, daß sie zur Unterscheidung zahlreicher Spezialfälle zwingt, wobei die Gefahr sehr groß ist, doch den einen oder anderen entschlüpfen zu lassen. Obwohl Herrn Nörlunds Arbeit in der Erledigung dieser Spezialfälle

---

[1]) Acta Mathematica 34 (1910).

sehr sorgfältig ist, scheint es mir doch nicht überflüssig, wenn ich im folgenden das Problem nach einer, wie ich glaube, naturgemäßeren und jedenfalls einheitlicheren Methode behandle.

Dabei gelange ich zu einer wesentlich präziseren Formulierung des Resultats und kann außerdem in zwei Punkten über die Nörlundschen Untersuchungen hinausgehen. Erstens hat nämlich Herr Nörlund nur den Fall durchgeführt, daß in dem Integral $f(x)$ an einer singulären Stelle $a$ höchstens die erste Potenz von $\log(x-a)$ auftritt, während ich alle Fälle behandle. Zweitens aber brauchen bei mir die Koeffizienten der Differentialgleichung keine rationalen Funktionen von $x$ zu sein. Es gelten dann die gleichen Resultate, während man für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ keine lineare Differenzengleichung mit in $\nu$ rationalen Koeffizienten angeben kann, so daß die Verwendung der Nörlundschen Methode überhaupt nicht möglich wäre.

Zum Schluß setze ich noch einige Anwendungen der erzielten Resultate auseinander. Insbesondere möchte ich auf § 3 hinweisen; die dort gegebene Herleitung der Übergangssubstitutionen für die Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung scheint mir wesentlich einfacher wie die seither bekannt gewordenen Methoden.

## § 1.

### Hilfssätze.

Wir setzen, unter $\varrho$ eine komplexe Variable verstehend,

$$(1) \qquad \frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots \nu} = f_\nu(\varrho) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann ist offenbar für $\nu > 1$

$$(2) \qquad \frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = \varrho \prod_{s=1}^{\nu-1} \frac{(\varrho+s)s^{\varrho-1}}{(s+1)^\varrho};$$

also auch[1])

[1]) S. etwa N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion. Leipzig 1906, S. 13.

$$(3) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = Fc(\varrho),$$

wo wir nach dem Vorgang von Weierstraß mit $Fc(\varrho)$ die reziproke Gammafunktion bezeichnet haben. Dabei ist unter $\nu^{\varrho-1}$ der eindeutig bestimmte Wert

$$\nu^{\varrho-1} = e^{(\varrho-1)\log\nu}$$

zu verstehen mit reellem Logarithmus.

Wir wollen jetzt die Annäherung an den Grenzwert $Fc(\varrho)$ noch etwas genauer untersuchen und beschränken dabei $\varrho$ auf ein Gebiet $|\varrho| \leq P$, wo übrigens $P$ beliebig groß sein kann. Wenn wir zunächst noch die Werte $\varrho = 0, -1, -2, \ldots$ ausschließen, so folgt aus (2) und (3):

$$Fc(\varrho)\frac{\nu^{\varrho-1}}{f_\nu(\varrho)} = \prod_{s=\nu}^{\infty} \frac{(\varrho+s)\,s^{\varrho-1}}{(s+1)^\varrho} = \prod_{s=\nu}^{\infty} \frac{1+\frac{\varrho}{s}}{\left(1+\frac{1}{s}\right)^\varrho}.$$

Daher auch:

$$\log Fc(\varrho) - \log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = \sum_{s=\nu}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{\varrho}{s}\right) - \varrho\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right].$$

Nun folgt aus der logarithmischen Reihe mit Leichtigkeit für $s > P$

$$\left|\log\left(1+\frac{\varrho}{s}\right) - \varrho\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right| < \frac{P^2+P}{2s^2} + \frac{P^3+P}{3s^3} + \cdots < \frac{C}{s^2} < \frac{C}{s(s-1)},$$

wo $C$ von $s$ und $\varrho$ nicht abhängt. Daher für $\nu > P$:

$$\left|\log Fc(\varrho) - \log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right| < \sum_{s=\nu}^{\infty}\frac{C}{s(s-1)} = \frac{C}{\nu-1}.$$

Setzt man also

$$\log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - \log Fc(\varrho) = \frac{\vartheta\, C}{\nu-1},$$

so ist $|\vartheta| < 1$, und man erhält:

$$\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = Fc(\varrho)\, e^{\frac{\vartheta C}{\nu-1}}.$$

Folglich auch

$$\left|\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - Fc(\varrho)\right| = \left|Fc(\varrho)\left(e^{\frac{\vartheta C}{\nu-1}} - 1\right)\right| < M\left(e^{\frac{C}{\nu-1}} - 1\right) < \frac{C'}{\nu},$$

wo $M$ das Maximum von $|Fc(\varrho)|$ für $|\varrho| < P$ bedeutet, und wo $C'$ von $\nu$ und $\varrho$ nicht abhängt. Diese Ungleichung gilt aber offenbar auch für die bisher ausgeschlossenen Werte $\varrho = 0, -1, -2, \ldots, -(\nu-1)$, weil dann die linke Seite verschwindet.

Da die Funktion

$$\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - Fc(\varrho)$$

für $|\varrho| < P$ regulär ist, so läßt sich ihre $\mu^{\text{te}}$ Ableitung für $|\varrho| < P$ nach einem bekannten Satz folgendermaßen darstellen:

$$\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) - Fc^{(\mu)}(\varrho) = \frac{\mu!}{2\pi i}\int\left(\frac{f_\nu(z)}{\nu^{z-1}} - Fc(z)\right)\frac{dz}{(z-\varrho)^{\mu+1}},$$

das Integral in positiver Richtung über die Kreislinie $|z| = P$ erstreckt. Wenn wir nun $\varrho$ sogar auf das Gebiet $|\varrho| < P-1$ beschränken, so ist auf dem ganzen Integrationsweg $|z-\varrho| > 1$; ferner nach dem soeben Bewiesenen

$$\left|\frac{f_\nu(z)}{\nu^{z-1}} - Fc(z)\right| < \frac{C'}{\nu}.$$

Daher folgt:

$$\left|\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) - Fc^{(\mu)}(\varrho)\right| < \frac{\mu!}{2\pi}\int\frac{C'}{\nu}|dz| = \frac{\mu!\,C'P}{\nu}.$$

Nun ist identisch

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{d^k}{d\varrho^k}\left(\nu^{\varrho-1}\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) = \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}\frac{d^{k-\mu}}{d\varrho^{k-\mu}}(\nu^{\varrho-1})\cdot\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}\nu^{\varrho-1}(\log\nu)^{k-\mu}\cdot\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right).$$

Also, indem man auf die Terme unter dem Summenzeichen die letzte Ungleichung anwendet:

$$\left| f_\nu^{(k)}(\varrho) - \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \nu^{\varrho-1} (\log \nu)^{k-\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho) \right| < |\nu^{\varrho-1}| (\log \nu)^k \frac{C''}{\nu},$$

wo auch $C''$ von $\nu$ nicht abhängt.

Indem wir eine bekannte, von Herrn Landau eingeführte Schreibweise[1]) benutzen, können wir die bisher gewonnenen Resultate formulieren in

Hilfssatz 1. Setzt man, unter $\varrho$ eine komplexe Variable verstehend,

$$f_\nu(\varrho) = \frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots \nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist

$$f_\nu(\varrho) = Fc(\varrho)\nu^{\varrho-1} + O(|\nu^{\varrho-2}|)$$

und allgemeiner für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \nu^{\varrho-1} \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log \nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}| (\log \nu)^k).$$

Sei jetzt $z$ eine komplexe Variable. Ist $\eta$ eine positive Zahl kleiner als 1, so legen wir in der $z$-Ebene vom Punkt $1+\eta$ aus eine Schleife um den Punkt 1 herum, die nach $1+\eta$ zurückläuft und ganz im Kreis $|z-1| < \eta$ bleibt, so daß der Nullpunkt außerhalb ist. Diese Schleife, in negativer Richtung durchlaufen, nennen wir $S$ (Fig. 1). Dann beweisen wir den

Fig. 1.

Hilfssatz 2. Ist $\Phi(z)$ eine für $|z-1| < \eta$ reguläre analytische Funktion, so gilt die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}}{z^{\nu+1}} dz = \Phi(1) Fc(\varrho) \nu^{\varrho-1} + O(|\nu^{\varrho-2}|),$$

[1]) Siehe z. B. dessen Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, S. 31.

und allgemeiner für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz$$

$$= \Phi(1)\,\nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k).$$

Dabei bedeutet $\log(1-z)$ denjenigen Zweig des Logarithmus, welcher im Schnittpunkt der Schleife $S$ mit der Strecke $\overline{01}$ reell ist[1]), und $(1-z)^{-\varrho}$ bedeutet $e^{-\varrho\log(1-z)}$.

Zum Beweis gehen wir aus von der Binomialformel

$$(4)\qquad (1-z)^{-\varrho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\varrho) z^\nu \qquad |z| < 1,$$

wo $f_\nu(\varrho)$ für $\nu \geqq 1$ die in Hilfssatz 1 auftretende Funktion ist, und $f_0(\varrho) = 1$. Da die Reihe (4) bei konstantem $z$ gleichmäßig im Bereich $|\varrho| < P$ konvergiert, und ihre Glieder reguläre Funktionen von $\varrho$ sind, darf man beliebig oft gliedweise nach $\varrho$ differenzieren, und erhält:

$$(5)\quad (-1)^k(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}(\varrho) z^\nu \qquad |z| < 1.$$

Von jetzt an sei $\varrho$ konstant. Aus (5) ergibt sich für $f_\nu^{(k)}(\varrho)$ die Bedeutung:

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k\}_{z=0},$$

und folglich ist auch

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz,$$

wo der Integrationsweg irgend eine den Nullpunkt in positiver Richtung umlaufende geschlossene Linie ist, die den Punkt 1 außerhalb läßt. Beispielsweise kann man den in Fig. 2 ge-

[1]) Beim Durchlaufen der Schleife durchläuft der imaginäre Teil von $\log(1-z)$ die Werte $(+\pi i \ldots 0 \ldots -\pi i)$.

zeichneten Weg wählen, der sich zusammensetzt aus der schon beschriebenen Schleife $S$ und dem Kreis $K$, dessen Radius $1+\eta$ und dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Auf dem Kreis $K$ ist $|z| = 1+\eta$; ferner bleibt $(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k$ absolut unter einer Schranke $M$, und man erhält:

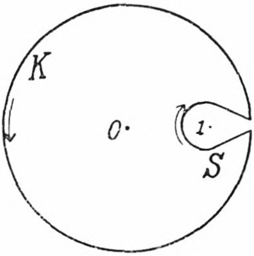


Fig. 2.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \frac{M}{(1+\eta)^{\nu+1}}\,|dz| = \frac{M}{(1+\eta)^{\nu}}.$$

Daher wird

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz + \frac{\vartheta M}{(1+\eta)^{\nu}},$$

wo $|\vartheta| < 1$ ist. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 1 folgt hieraus:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \\ &= \nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} F c^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k). \end{aligned}\right.$$

Damit ist der Hilfssatz 2 bereits für die spezielle Funktion $\Phi(z) = 1$ bewiesen. Um ihn allgemein zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$\nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} F c^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} = \Omega_\nu$$

und gehen dann aus von der Identität

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz - \Phi(1)\,\Omega_\nu \\ &= \Phi(1)\left\{\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz - \Omega_\nu\right\} \\ &+ \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{[\Phi(z)-\Phi(1)](1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz. \end{aligned}$$

Nach Formel (6) ist die geschweifte Klammer gleich

$$O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k).$$

Der Hilfssatz 2 wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß auch

$$\int_S \frac{[\Phi(z)-\Phi(1)](1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz = O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k)$$

ist; oder einfacher, indem wir

$$\frac{\Phi(z)-\Phi(1)}{z-1} = \Psi(z)$$

setzen,

$$\int_S \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz = O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k). \tag{8}$$

Zum Nachweis dieser Formel bemerken wir zunächst, daß die Funktion $\Psi(z)$ im Kreis $|1-z|\leq\eta$ regulär ist und daher absolut unter einer Schranke $G$ bleibt. Wir wollen dann bei dem Integral (8) den Integrationsweg in erlaubter Weise abändern, indem wir zuerst vom Punkt $1+\eta$ geradlinig nach $1+\frac{1}{\nu}$ gehen $\left(\frac{1}{\nu}<\eta\right)$, dann auf einem Kreis $K_\nu$ vom Radius $\frac{1}{\nu}$ um den Punkt 1 als Mittelpunkt in negativer Richtung herum und schließlich von $1+\frac{1}{\nu}$ geradlinig nach $1+\eta$ zurück. Wir erhalten dadurch:

$$\left\{\begin{aligned}\int_S \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz &= \int_{K_\nu} \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz\\ &+\int_{1+\eta}^{1+\frac{1}{\nu}} \frac{\Psi(z)e^{\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}[\log(z-1)+\pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz\\ &+\int_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{\Psi(z)e^{-\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}[\log(z-1)-\pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz,\end{aligned}\right. \tag{9}$$

wobei in den geradlinigen Integralen $\log(z-1)$ den reellen Logarithmus bedeutet, und

$$(z-1)^{1-\varrho} = e^{(1-\varrho)\log(z-1)}$$

ist. Da der neue Integrationsweg ganz im Kreis $|1-z| \leq \eta$ verläuft, ist auf ihm durchweg $|\Psi(z)| < G$. Auf dem Kreis $K_\nu$ ist außerdem $1-z = \frac{1}{\nu} e^{-i\varphi}$, wo $\varphi$ von $-\pi$ bis $+\pi$ läuft; daher

$$\begin{aligned} |(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k| &= \left| \nu^{\varrho-1} e^{i\varphi(\varrho-1)} \left(\log\frac{1}{\nu} - i\varphi\right)^k \right|, \\ &< C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k, \end{aligned}$$

wo $C$ von $\nu$ und von der Stelle $z$ auf $K_\nu$ nicht abhängt. Ferner ist auf $K_\nu$

$$|z^{\nu+1}| = \left|1 - \frac{1}{\nu} e^{-i\varphi}\right|^{\nu+1} > \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} > \frac{1}{3} \qquad \text{(für große } \nu\text{)},$$

so daß man erhält:

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{K_\nu} \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \right| &< \int\limits_{K_\nu} 3\,G\,C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k\,|dz| \\ &= 3\,G\,C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k\,\frac{2\pi}{\nu}. \end{aligned}$$

Die beiden geradlinigen Integrale auf der rechten Seite von (9) können wir gemeinsam behandeln. Es ist

$$\begin{aligned} &\left| \mp \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{\Psi(z)\,e^{\pm\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}[\log(z-1)+\pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \right| \\ &< \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{G\,|e^{\pm\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}|\,(\log\nu+\pi)^k}{z^{\nu+1}}\,dz \\ &< C_1(\log\nu)^k \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\,dz, \end{aligned}$$

wo $C_1$ von $\nu$ nicht abhängt (ebenso wie nachher $C_2$, $C_3$). Nun überzeugt man sich leicht, daß für $1 < z < 2$ stets $z > e^{\frac{z-1}{2}}$ ist, also auch

$$z^{\nu+1} > e^{(\nu+1)\frac{z-1}{2}} > e^{\nu\frac{z-1}{2}}.$$

Daher

$$\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\, dz < \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} |(z-1)^{1-\varrho}|\, e^{-\nu\frac{z-1}{2}}\, dz.$$

Oder, indem man rechts die Substitution $z = 1 + \frac{x}{\nu}$ macht:

$$\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\, dz < \int\limits_{1}^{\nu\eta} \frac{|x^{1-\varrho}|\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx}{|\nu^{2-\varrho}|} < |\nu^{\varrho-2}| \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, |x^{1-\varrho}|\, dx$$
$$= C_2\, |\nu^{\varrho-2}|.$$

Trägt man jetzt die gefundenen Abschätzungen in (9) ein, so kommt:

$$\left| \int\limits_{S} \frac{\Psi(z)\,(1-z)^{1-\varrho}\,[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\, dz \right| < 3\,G\,C\, |\nu^{\varrho-1}|\, (\log\nu)^k\, \frac{2\pi}{\nu}$$
$$+ 2\, C_1 (\log\nu)^k\, C_2\, |\nu^{\varrho-2}| = C_3\, |\nu^{\varrho-2}|\, (\log\nu)^k.$$

Daraus ergibt sich nun sofort die zu beweisende Formel (8) womit auch Hilfssatz 2 bewiesen ist.

## § 2.

### Der Hauptsatz.

Sei $y = f(x)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(10) \qquad y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n(x)\, y = 0,$$

deren Koeffizienten in der ganzen $x$-Ebene eindeutig sein mögen. $f(x)$ sei an einer gewissen Stelle $x_0$ regulär, und die der Stelle $x_0$ nächstgelegenen singulären Punkte von $f(x)$ seien in endlicher Anzahl $r$ vorhanden:

$$(11) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_r.$$

Wir setzen dann:

(12) $$|a_\lambda - x_0| = R \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r).$$

Im allgemeinen ist $r = 1$; nur bei spezieller Wahl von $x_0$ kann $r > 1$ sein. Wir setzen weiter voraus, daß sich $f(x)$ an den Stellen (11) bestimmt verhält.

Es sei jedoch bemerkt, daß die Differentialgleichung (10) sehr wohl noch andere singuläre Stellen im Kreis $|x - x_0| \leq R$ haben darf; sogar $x_0$ selbst darf eine solche sein. Auch brauchen die Stellen (11) keine Stellen der Bestimmtheit zu sein in dem Sinn, daß jedes Integral sich bestimmt verhält. Nur das ins Auge gefaßte partikuläre Integral $f(x)$ muß die angegebenen Eigenschaften haben; auf die anderen Integrale kommt es uns nicht an.

Nach unseren Voraussetzungen hat auf Grund der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $a_\lambda$ die Gestalt

(13) $$f(x) = \sum_{\varkappa, l} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log (x - a_\lambda)]^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x - a_\lambda),$$

wo die Exponenten $r_{\varkappa,\lambda}$ im allgemeinen komplex sind, während für $l$ meistens nur der Wert 0, ausnahmsweise aber auch die Werte 1, 2, ..., $n$ möglich sind; die $\mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}$ sind Potenzreihen[1]).

Nun ist

(14) $$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}},$$

wo der Integrationsweg eine den Punkt $x_0$ in positiver Richtung umlaufende geschlossene Linie ist, welche die singulären Punkte von $f(x)$ außerhalb läßt. Wir beschreiben um $x_0$ als Mittelpunkt einen Kreis $K$ vom Radius $(1 + \eta) R$, wo $\eta$ zwischen 0 und 1 liege und so klein sei, daß $f(x)$ im Innern und

[1]) Es kommt im folgenden nur darauf an, daß $f(x)$ in der Umgebung von $a_\lambda$ die Form (13) hat; die Differentialgleichung selbst spielt weiter keine Rolle. Auch ist nicht ausgeschlossen, daß der Punkt $a_\lambda$ in Wahrheit gar nicht singulär ist, indem nur $l = 0$, $r_{\varkappa,\lambda} = 0, 1, 2, \ldots$ vorkommt.

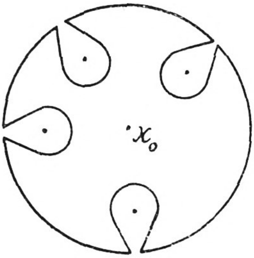


Fig. 3.

auf der Grenze von $K$ keine anderen singulären Punkte hat als $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Alsdann wählen wir in Formel (14) als Integrationsweg die aus Fig. 3 ersichtliche Linie, wobei die Schleifen um die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ herumführen, während die Kreisbogen dem eben eingeführten Kreis $K$ angehören. Es ist also

$$(15) \quad \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}} + \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}},$$

wo $S_\lambda$ die Schleife um $a_\lambda$ bedeutet, während mit $T_\lambda$ die Bogen des Kreises $K$ bezeichnet sind.

Auf dem Kreis $K$ ist nun $f(x)$ regulär, bleibt also absolut unter einer Schranke $G$; ferner ist $|x - x_0| = (1+\eta) R$, so daß man erhält:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{r} \int\limits_{T_\lambda} \frac{G\,|dx|}{(1+\eta)^{\nu+1} R^{\nu+1}} = \frac{G}{(1+\eta)^{\nu} R^{\nu}}.$$

Also nach Einsetzen in (15):

$$(16) \quad \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}} + O\left((1+\eta)^{-\nu} R^{-\nu}\right).$$

Auf der Schleife $S_\lambda$ hat $f(x)$ die Form (13), so daß sich zunächst ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}}$$

$$= \sum_{\varkappa, l} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{(x-a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log(x-a_\lambda)]^l \, \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x-a_\lambda)}{(x-x_0)^{\nu+1}}\,dx.$$

Auf die Integrale der rechten Seite wenden wir die lineare Transformation

$$\frac{x - x_0}{a_\lambda - x_0} = z$$

an; dadurch geht die Schleife $S_\lambda$ über in eine den Punkt $z = 1$ umlaufende Schleife $S$, wie sie in Hilfssatz 2 vorkommt, und man erhält:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} \frac{1}{2\pi i}$$

$$\times \int\limits_S \frac{(1-z)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log(1-z) + \log(x_0 - a_\lambda)]^l\, \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}((x_0 - a_\lambda)(1-z))}{z^{\nu+1}}\, dz.$$

Oder, indem man $[\log(1-z) + \log(x_0 - a_\lambda)]^l$ nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} [\log(x_0 - a_\lambda)]^{l-k}\, \Theta_{\nu,k},$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log(1-z)]^k\, \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}((x_0 - a_\lambda)(1-z))}{z^{\nu+1}}\, dz = \Theta_{\nu,k}$$

gesetzt wurde. Nach Hilfssatz 2 ist aber

$$\Theta_{\nu,k} = (-1)^k \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1} \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) (\log\nu)^{k-\mu}$$
$$+ O(|\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log\nu)^k).$$

Setzt man dies oben ein und vertauscht dann die Reihenfolge der Summationen nach $\mu$ und $k$, so erweist sich die Summe nach $k$ als eine binomische Entwicklung, und man erhält durch Zusammenfassen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} (-1)^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1}$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{l} \binom{l}{\mu} Fc^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) [\log\nu - \log(x_0 - a_\lambda)]^{l-\mu}$$
$$+ \sum_{\varkappa, l} O(|a_\lambda - x_0|^{-\nu} |\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log\nu)^l).$$

Statt des letzten Gliedes kann man, weil $|a_\lambda - x_0| = R$ ist, schreiben:

$$\sum_{\varkappa, l} O(R^{-\nu} |\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log \nu)^l).$$

Natürlich läßt sich diese Summe auch durch ein einziges $O$ ersetzen, indem man offenbar nur ein Glied höchster Größenordnung beizubehalten braucht, also ein Glied, bei dem der reelle Teil von $r_{\varkappa,\lambda}$ am kleinsten ist, und das zugehörige $l$ am größten. Doch ist es bequemer, die obige Summenform stehen zu lassen.

Indem man endlich die letzte Gleichung nach $\lambda$ summiert, ergibt sich mit Rücksicht auf (16) die in dem nachstehenden Satz enthaltene Formel:

**Satz.** Die Funktion $f(x)$ sei im Innern eines Kreises mit dem Mittelpunkt $x_0$ und dem Radius $R$ regulär, während auf der Peripherie eine endliche Anzahl singulärer Punkte liegen soll: $a_1, a_2, \ldots, a_r$. In der Umgebung von $a_\lambda$ habe $f(x)$ die Form

$$f(x) = \sum_{\varkappa, l} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} \log [(x - a_\lambda)]^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x - a_\lambda),$$

wo die $\mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}$ Potenzreihen sind.

Dann gilt für den Mittelpunkt $x_0$ des Kreises die Formel

$$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} (-1)^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1}$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{l} \binom{l}{\mu} Fc^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) [\log \nu - \log(x_0 - a_\lambda)]^{l-\mu}$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa, l} O(R^{-\nu} |\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log \nu)^l).$$

In diesem Satze sind speziell auch die erwähnten Nörlundschen Resultate enthalten. Wir wollen den Fall, daß keine Logarithmen vorkommen, noch besonders hervorheben, da dies doch der gewöhnliche Fall ist[1]). Dann hat $f(x)$ in der Umgebung von $a_\lambda$ die Form

$$f(x) = \sum_{\varkappa} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda}(x - a_\lambda),$$

und es ist

$$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^{\nu}} \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda}(0) Fc(-r_{\varkappa,\lambda}) \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1} + O(R^{-\nu} \nu^{-s-2}),$$

wo mit $s$ der kleinste reelle Teil der Exponenten $r_{\varkappa,\lambda}$ bezeichnet ist. Übrigens wird die Summe im allgemeinen auch Glieder aufweisen, die von geringerer oder gleicher Größenordnung sind wie $R^{-\nu}\nu^{-s-2}$, nämlich alle diejenigen, bei welchen der reelle Teil von $r_{\varkappa,\lambda}$ nicht kleiner ist wie $s+1$. Diese können natürlich weggelassen werden und sind ohne jede Bedeutung. Entsprechendes gilt auch im allgemeinen Fall, wenn Logarithmen auftreten.

## § 3.

### Erste Anwendung: Übergangssubstitutionen.

Unser Satz ist nützlich zur Berechnung der sogenannten Übergangssubstitutionen, wie wir am Beispiel der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(17) \quad x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

zeigen wollen. Zur Vermeidung von Komplikationen setzen wir voraus, daß $\gamma$ und $\alpha+\beta-\gamma$ keine ganzen Zahlen sind. Dann hat die Differentialgleichung die folgenden vier Integrale:

$$(18) \quad \begin{cases} y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} y_3 = F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x) \\ y_4 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x). \end{cases}$$

[1]) Diesen hat auf andere Art auch Herr Darboux behandelt, der im wesentlichen unser Resultat fand (Journal de mathématiques pures et appliquées, sér. 3, tome 4 (1878), p. 1 ff., namentlich p. 19–20).

wobei

$$(20)\quad F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

ist. Wir benötigen weiter nur noch die bekannte Formel

$$(21)\quad (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x).$$

Da nur zwei Integrale linear unabhängig sind, so existieren in dem gemeinsamen Konvergenzgebiet, also in dem den beiden Kreisen $|x| < 1$, $|1-x| < 1$ gemeinsamen Bereich Relationen der Form

$$(22)\qquad y_1 = A y_3 + B y_4$$

$$(23)\qquad y_2 = C y_3 + D y_4$$

mit konstanten Koeffizienten $A, B, C, D$, die wir berechnen wollen. $y_1$ ist an der Stelle $x = 0$ regulär; der nächstgelegene singuläre Punkt ist $x = 1$ [1]); in der Umgebung von $x = 1$ hat $y_1$ die Gestalt (22), wo rechts die Werte (19) einzusetzen sind. Daraus folgt nach unserem Satz:

$$\left(\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}\right)_{x=0} = B Fc(\alpha+\beta-\gamma)\, \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Anderseits ist hier die linkeSeite der Koeffizient von $x^\nu$ in der Reihe $y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$; also mit Rücksicht auf Hilfssatz 1:

$$\left(\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}\right)_{x=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)} = \frac{f_\nu(\alpha) f_\nu(\beta)}{f_\nu(\gamma)}$$

$$= \frac{Fc(\alpha)\, Fc(\beta)}{Fc(\gamma)} \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate kommt:

$$(24)\qquad B Fc(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{Fc(\alpha)\, Fc(\beta)}{Fc(\gamma)}.$$

---

[1]) Nur wenn $\alpha$ oder $\beta$ einen der Werte $0, -1, -2, \ldots$ hat, ist $y_1$ ein Polynom, also 1 kein singulärer Punkt. Aber das ändert nichts an unseren Überlegungen; vgl. die Fußnote S. 365.

Um ebenso $A$ zu finden, multiplizieren wir die Gleichung (22) mit $(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$. Dann ergibt sich mit Rücksicht auf (21):

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x) = A(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x)$$
$$+ BF(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x).$$

Die linke Seite ist hier für $x=0$ wieder regulär, und der nächstgelegene singuläre Punkt ist $x=1$. Also folgt aus unserem Satz:

$$\frac{F^{(\nu)}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 0)}{\nu!}$$
$$= AFc(\gamma-\alpha-\beta)\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|).$$

Anderseits ist nach Hilfssatz 1

$$\frac{F^{(\nu)}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 0)}{\nu!} = \frac{f_\nu(\gamma-\alpha)f_\nu(\gamma-\beta)}{f_\nu(\gamma)}$$
$$= \frac{Fc(\gamma-\alpha)Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)}\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate kommt:

$$(25) \qquad AFc(\gamma-\alpha-\beta) = \frac{Fc(\gamma-\alpha)Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)}.$$

Zur Berechnung von $C$ und $D$ multiplizieren wir (23) mit $x^{\gamma-1}$; es entsteht:

$$(26)\begin{cases} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \\ = C(1-(1-x))^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x) \\ + D(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-(1-x))^{\gamma-1}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x). \end{cases}$$

Daher nach unserem Satz:

$$\frac{F^{(\nu)}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; 0)}{\nu!}$$
$$= DFc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Anderseits nach Hilfssatz 1:

$$\frac{F^{(\nu)}(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;0)}{\nu!}=\frac{f_\nu(\alpha+1-\gamma)f_\nu(\beta+1-\gamma)}{f_\nu(2-\gamma)}$$

$$=\frac{Fc(\alpha+1-\gamma)\,Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}+O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate:

$$(27)\quad D\,Fc(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{Fc(\alpha+1-\gamma)\,Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)}.$$

Endlich multiplizieren wir (26) noch mit $(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$, wodurch die linke Seite übergeht in $F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;x)$; das ergibt sich einfach aus (21), indem man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bzw. ersetzt durch

$$\alpha+1-\gamma,\quad \beta+1-\gamma,\quad 2-\gamma.$$

Aus der so veränderten Gleichung (26) folgt dann mit Hilfe unseres Satzes:

$$\frac{F^{(\nu)}(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;0)}{\nu!}$$

$$=C\,Fc(\gamma-\alpha-\beta)\,\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1}+O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|).$$

Anderseits lehrt Hilfssatz 1:

$$\frac{F^{(\nu)}(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;0)}{\nu!}=\frac{f_\nu(1-\alpha)f_\nu(1-\beta)}{f_\nu(2-\gamma)}$$

$$=\frac{Fc(1-\alpha)\,Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)}\,\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1}+O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|);$$

also durch Vergleich:

$$(28)\qquad C\,Fc(\gamma-\alpha-\beta)=\frac{Fc(1-\alpha)\,Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)}.$$

Damit sind die Konstanten $A$, $B$, $C$, $D$ berechnet, und man erhält die bekannten Gauß-Kummerschen Formeln:

$$(29)\quad\begin{cases} y_1=\dfrac{Fc(\gamma-\alpha)\,Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)\,Fc(\gamma-\alpha-\beta)}\,y_3+\dfrac{Fc(\alpha)\,Fc(\beta)}{Fc(\gamma)\,Fc(\alpha+\beta-\gamma)}\,y_4\\[2ex] y_2=\dfrac{Fc(1-\alpha)\,Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)\,Fc(\gamma-\alpha-\beta)}\,y_3+\dfrac{Fc(\alpha+1-\gamma)\,Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)\,Fc(\alpha+\beta-\gamma)}\,y_4.\end{cases}$$

Um umgekehrt $y_3$, $y_4$ durch $y_1$, $y_2$ auszudrücken, kann man analog verfahren, wobei die singulären Punkte 0 und 1 ihre Rolle vertauschen; oder man kann (29) auflösen. Die entstehenden Formeln sind aber nichts Neues und lassen sich bequemer aus (29) durch bloße Änderung der Bezeichnung gewinnen, indem man nämlich $\gamma$ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und $x$ durch $1 - x$ ersetzt. Man erhält so:

$$(30)\quad \begin{cases} y_3 = \dfrac{Fc(1+\beta-\gamma)\,Fc(1+\alpha-\gamma)}{Fc(1+\alpha+\beta-\gamma)\,Fc(1-\gamma)}\, y_1 + \dfrac{Fc(\alpha)\,Fc(\beta)}{Fc(1+\alpha+\beta-\gamma)\,Fc(\gamma-1)}\, y_2 \\[2ex] y_4 = \dfrac{Fc(1-\alpha)\,Fc(1-\beta)}{Fc(1-\alpha-\beta+\gamma)\,Fc(1-\gamma)}\, y_1 + \dfrac{Fc(\gamma-\beta)\,Fc(\gamma-\alpha)}{Fc(1-\alpha-\beta+\gamma)\,Fc(\gamma-1)}\, y_2. \end{cases}$$

## § 4.

### Zweite Anwendung: Kettenbrüche.

Wir stützen uns hier auf folgenden Lehrsatz[1]): „Irgendwelche Größen $a_\nu$, $b_\nu$, $X_\nu$, $Y_\nu$ seien durch die Formeln miteinander verbunden:

$$X_\nu = b_\nu X_{\nu+1} + a_{\nu+1} X_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$Y_\nu = b_\nu Y_{\nu+1} + a_{\nu+1} Y_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0.$$

Dabei sollen alle $a_\nu$ und wenigstens ein $X_\nu$ von Null verschieden sein. Dann ist, falls $X_1 \neq 0$, der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

konvergent und hat den Wert $\dfrac{X_0}{X_1}$. Ist aber $X_1 = 0$, so ist der Kettenbruch unwesentlich divergent.“

I. Nun wenden wir uns zuerst zu der Differentialgleichung

$$(31)\qquad y = bxy' + ax^2y'' \qquad (a \neq 0).$$

1) Vgl. des Verfassers Lehrbuch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 291, Satz 46, Ziff. C.

Sind $\varrho_1$, $\varrho_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a\varrho(\varrho-1)+b\varrho-1=0, \tag{32}$$

woraus insbesondere

$$b=a(1-\varrho_1-\varrho_2) \tag{33}$$

folgt, so hat (31) die beiden Integrale

$$y_1 = x^{\varrho_1}$$

$$y_2 = \begin{cases} x^{\varrho_2} & \text{falls } \varrho_2 \neq \varrho_1 \\ x^{\varrho_1}\log x & \text{falls } \varrho_2 = \varrho_1. \end{cases}$$

Wir setzen voraus, daß $\varrho_1$ und $\varrho_2$ von $0, 1, 2, \ldots$ verschieden sind, so daß der Nullpunkt für beide Integrale singulär ist. Jeder andere Punkt $x_0$ ist regulär, und aus unserem Satz folgt dann, wenn wir $x$ für $x_0$ schreiben:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{\varrho_1}}{(-x)^\nu} Fc(-\varrho_1)\,\nu^{-\varrho_1-1} + O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_1-2}|),$$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \begin{cases} \dfrac{x^{\varrho_2}}{(-x)^\nu} Fc(-\varrho_2)\,\nu^{-\varrho_2-1} + O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_2-2}|) & \text{falls } \varrho_2 \neq \varrho_1 \\ -\dfrac{x^{\varrho_1}}{(-x)^\nu}\nu^{-\varrho_1-1}[Fc(-\varrho_1)(\log\nu-\log x)+Fc'(-\varrho_1)] & \\ \qquad + O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_1-2}|\log\nu) & \text{falls } \varrho_2 = \varrho_1. \end{cases}$$

Setzt man daher

$$(-x)^\nu y_1^{(\nu)} = X_\nu, \quad (-x)^\nu y_2^{(\nu)} = Y_\nu, \tag{34}$$

so wird

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0 \qquad \text{falls } \varrho_1 = \varrho_2 \text{ oder } \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2), \tag{35}$$

wo mit $\Re$ der reelle Teil bezeichnet ist. Dagegen existiert der Grenzwert nicht, wenn $\Re(\varrho_1) = \Re(\varrho_2)$, aber $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist.

Durch $\nu$-malige Differentiation von (31) folgt nun:

$$[a\nu(\nu-1)+b\nu-1]\,y^{(\nu)} = -(b+2a\nu)\,x\,y^{(\nu+1)} - a x^2 y^{(\nu+2)}.$$

Oder, indem man mit $(-x)^\nu$ multipliziert, sodann durch

$$a\nu(\nu-1)+b\nu-1 = a(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)$$

dividiert und endlich für $b$ den Wert (33) einsetzt:

$$(-x)^{\nu} y^{(\nu)} =$$
$$\frac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)}(-x)^{\nu+1} y^{(\nu+1)} - \frac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)}(-x)^{\nu+2} y^{(\nu+2)}.$$

Da dies für $y = y_1$ und $y = y_2$ gilt, so erhält man unter Anwendung der Bezeichnung (34):

$$(36)\quad \begin{cases} X_\nu = \dfrac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} X_{\nu+1} - \dfrac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} X_{\nu+2} \\ Y_\nu = \dfrac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} Y_{\nu+1} - \dfrac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} Y_{\nu+2}. \end{cases}$$

Aus (35) und (36) folgt nun dem obigen Lehrsatz zufolge:

$$\frac{X_0}{X_1} = \frac{1-\varrho_1-\varrho_2}{(-\varrho_1)(-\varrho_2)} - \frac{\frac{1}{(-\varrho_1)(-\varrho_2)}\Big|}{\Big|\frac{3-\varrho_1-\varrho_2}{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)}} - \frac{\frac{1}{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)}\Big|}{\Big|\frac{5-\varrho_1-\varrho_2}{(2-\varrho_1)(2-\varrho_2)}} - \cdots,$$

oder, indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, sodann mit $\varrho_1 \varrho_2$ multipliziert, und endlich für $X_0$, $X_1$ ihre Werte

$$X_0 = y_1 = x^{\varrho_1}, \quad X_1 = -x y_1' = -\varrho_1 x^{\varrho_1}$$

einsetzt:

$$(37)\quad \begin{cases} 1-\varrho_1-\varrho_2 - \dfrac{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)\big|}{\big|3-\varrho_1-\varrho_2} - \dfrac{(2-\varrho_1)(2-\varrho_2)\big|}{\big|5-\varrho_1-\varrho_2} \\ \qquad - \dfrac{(3-\varrho_1)(3-\varrho_2)\big|}{\big|7-\varrho_1-\varrho_2} - \cdots = -\varrho_2 \\ \text{für } \varrho_1 = \varrho_2 \text{ oder } \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2);\quad \varrho_1, \varrho_2 \neq 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Das Resultat ist übrigens nicht neu. Es ist ein spezieller Fall des in meinem genannten Lehrbuch auf ganz andere Weise bewiesenen Satz 10, S. 215. Setzt man dort speziell

$$\alpha = \frac{1-\varrho_1}{2}, \quad \beta = -\frac{\varrho_1}{2}, \quad z = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2},$$

so geht genau die Formel (37) hervor.

II. Herr Nörlund hat a. a. O. in ähnlicher Weise die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(38)\qquad (x - x^2)\,y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]\,y' - \alpha\beta y = 0$$

behandelt, was wir hier in etwas modifizierter Form auch noch tun wollen. Die Fälle, in denen Logarithmen auftreten, schließen wir dabei nicht aus; nur sollen $\alpha, \beta, \gamma$ von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sein, damit die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ gebildet werden kann und nicht abbricht. Wir haben dann die folgenden linear unabhängigen Intergrale:

$$39)\qquad y_1 = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

$$(40)\qquad y_2 = \begin{cases} x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \\ \qquad\qquad \text{falls } \gamma \neq 1, 2, 3, \ldots \\ y_1 \log x + x^{1-\gamma}(a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \cdots) \\ \qquad\qquad \text{falls } \gamma = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

wobei $a_0 \neq 0$ ist; übrigens bezeichnen wir im folgenden mit $y_1$, $y_2$ auch das, was aus diesen Reihen durch analytische Fortsetzung ohne Überschreiten der Linie $1\infty$ hervorgeht.

Durch $\nu$-malige Differentiation von (38) folgt:

$$(\alpha + \nu)(\beta + \nu)\,y^{(\nu)}$$
$$= [\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x]\,y^{(\nu+1)} + (x - x^2)\,y^{(\nu+2)}.$$

Also, indem man

$$(41)\qquad y_1^{(\nu)} = X_\nu,\quad y_2^{(\nu)} = Y_\nu$$

setzt,

$$(42)\qquad \begin{cases} X_\nu = \dfrac{\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} X_{\nu+1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{x - x^2}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} X_{\nu+2} \\ Y_\nu = \dfrac{\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} Y_{\nu+1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{x - x^2}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} Y_{\nu+2}. \end{cases}$$

Sei nun $x$ ein von Null verschiedener Wert, dessen reeller Teil $\Re(x)$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, so daß $|x| < |1-x|$ ist. Für $y_2$ ist dann der Nullpunkt der nächstgelegene singuläre Punkt. In seiner Umgebung hat $y_2$ die Gestalt (40); also ergibt sich aus unserem Satz:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} + O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) \\ \qquad\qquad \text{für } \gamma \neq 1, 2, 3, \ldots \\ \dfrac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \dfrac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} \\ \quad + O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3}) \\ \qquad\qquad \text{für } \gamma = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

In jedem Fall existiert also der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(-x)^\nu}{\nu^{\gamma-2}}$$

und ist von Null verschieden.

Für $y_1$ dagegen ist der Nullpunkt regulär; der nächste singuläre Punkt ist 1, so daß das infinitäre Verhalten von $\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}$ bestimmt wird durch Glieder der Form

$$\frac{1}{(1-x)^\nu} C\nu^\varrho (\log\nu)^l.$$

Wegen $|x| < |1-x|$ hat also sicher $\frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}}$ für $\nu = \infty$ den Grenzwert Null; daher

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0. \tag{43}$$

Aus (42) und (43) folgt dann nach dem obigen Lehrsatz:

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{X_0}{X_1} &= \frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)x}{\alpha\beta} + \frac{\frac{x-x^2}{\alpha\beta}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\gamma+1-(3+\alpha+\beta)x}{(\alpha+1)(\beta+1)}} \\ &\quad + \frac{\frac{x-x^2}{(\alpha+1)(\beta+1)}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\gamma+2-(5+\alpha+\beta)x}{(\alpha+2)(\beta+2)}} + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Oder indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, mit $\alpha\beta$ multipliziert, und für $X_0$, $X_1$ ihre Werte einsetzt:

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma-(1+\alpha+\beta)x + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(x-x^2)\,|}{|\,\gamma+1-(3+\alpha+\beta)x} \\ &+ \frac{(\alpha+2)(\beta+2)(x-x^2)\,|}{|\,\gamma+2-(5+\alpha+\beta)x} + \cdots = \alpha\beta\,\frac{y_1}{y_1'} \\ &\text{für } \alpha, \beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ x \neq 0;\ \Re(x) < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formel ist identisch mit Gleichung (10) auf S. 484 meines genannten Lehrbuches, woselbst sie zwar auch mit Hilfe der hypergeometrischen Differentialgleichung, aber auf andere Art wie hier, gewonnen wurde (auch die Fälle $\alpha, \beta, \gamma = 0, -1, -2, \ldots$ sind dort behandelt). Ich benutze diese Gelegenheit zu der Bemerkung, daß dort die Literaturangabe versehentlich weggefallen ist; die Formel findet sich bei Nörlund a. a. O.

Was den Wert des Kettenbruches (45) für $\Re(x) > \frac{1}{2}$ angeht, so kann man ihn auf gleiche Weise finden, indem man von den Integralen

$$(46)\qquad y_3 = F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-x)$$

$$(47)\quad y_4 = \left\{\begin{aligned} &(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma;\ 1-x) \\ &\qquad\qquad \text{falls } \alpha+\beta-\gamma \neq 0, 1, 2, \ldots \\ &y_3 \log(x-1) + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(b_0 + b_1(1-x) + \cdots) \\ &\qquad\qquad \text{falls } \alpha+\beta-\gamma = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right.$$

wo $b_0 \neq 0$ ist, ausgeht; dabei ist dann vorauszusetzen, daß $\alpha + \beta - \gamma \neq -1, -2, -3, \ldots$ ist. Es kommt aber nichts Neues heraus, sondern die betreffende Formel ist wesentlich mit (45) identisch, indem sie aus ihr durch bloße Änderung der Bezeichnung entsteht; man hat wieder $\gamma$ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und $x$ durch $1 - x$ zu ersetzen.

Anders ist die Sache für $\Re(x) = \frac{1}{2}$. Dann sind die singulären Punkte 0 und 1 gleich nahe; wir müssen also, um das infinitäre Verhalten von $\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}, \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!}$ beurteilen zu können, die Integrale $y_1$, $y_2$ auch in der Umgebung der Stelle 1 kennen. Dazu dienen die Formeln

$$(48) \qquad \begin{cases} y_1 = A y_3 + B y_4 \\ y_2 = C y_3 + D y_4, \end{cases}$$

wobei wir die Konstanten $A$, $B$, $C$, $D$ übrigens gar nicht zu kennen brauchen.

Da $y_1$ nur an der Stelle 1 singulär ist, am Nullpunkt aber regulär, so lehrt unser Satz:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = B \frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|1-x|^{-\nu}\,|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|),$$

falls $\alpha + \beta - \gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$ ist; dagegen

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = B \frac{-1}{(1-x)^{\nu}} Fc'(0)\,\nu^{-1}$$
$$+ B \frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} b_0 Fc(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|1-x|^{-\nu}\,|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|),$$

falls $\alpha + \beta - \gamma = 0, 1, 2, \ldots$ ist. In jedem Fall kommt also:

$$(49) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(1-x)^{\nu}}{\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}} = \text{endlich}.$$

$y_2$ ist auch am Nullpunkt singulär, und es ergeben sich vier verschiedene Fälle:

I. $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha + \beta - \gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma - 1)\nu^{\gamma-2}$$

$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

II. $\gamma = 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha + \beta - \gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2}$$

$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

$$+ O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3}) + O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

III. $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha + \beta - \gamma = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} + D\frac{-1}{(1-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1}$$

$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} b_0 Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu)$$

$$+ O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

IV. $\gamma = 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha + \beta - \gamma = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2}$$

$$+ D\frac{-1}{(1-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1}$$

$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} b_0 Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

$$+ O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3})$$

$$+ O(|1-x|^{-\nu}\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}).$$

Setzt man daher

(50) $\quad \Re(\gamma) > \Re\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)$, also $\Re(\gamma-2) > \Re(\alpha+\beta-\gamma-1)$

voraus, so kommt in allen vier Fällen, weil jetzt $|x| = |1 - x|$ ist,

$$(51) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(-x)^\nu}{\nu^{\gamma-2}} = \text{endlich} \neq 0.$$

Aus (49), (50), (51) folgt nun:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}} = 0; \quad \text{also} \lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0.$$

Daher gilt nach unserem Lehrsatz wieder die Formel (44), also auch (45). Man kann daher den Geltungsbereich von (45) ausdehnen auf

$$(52) \qquad \Re(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\gamma) > \Re\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right),$$

wie ebenfalls Herr Nörlund a. a. O. bereits gefunden hat, allerdings ohne Berücksichtigung der Fälle, in denen Logarithmen auftreten. Um den Wert des Kettenbruches (45) auch für

$$\Re(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\gamma) < \Re\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)$$

zu erhalten, hat man wieder nur nötig, $\gamma$ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und $x$ durch $1 - x$ zu ersetzen.

Beim Nachweis des Geltungsbereiches (52) haben wir übrigens bisher angenommen, daß $\alpha + \beta - \gamma$ keine negative ganze Zahl ist; denn die in (46), (47) gegebene Form der Integrale $y_3$, $y_4$ war an diese Voraussetzung gebunden. Indes bleibt unser Resultat auch ohne sie richtig; um das einzusehen, sei also

$$\alpha + \beta - \gamma = -1, -2, -3, \ldots.$$

Dann modifizieren sich die Formeln (46), (47) in folgender Weise:

$$y_3 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x)$$
$$(= \text{regulär für } x = 1)$$
$$y_4 = y_3 \log(x-1) + c_0 + c_1(1-x) + c_2(1-x)^2 + \cdots.$$

Führt man das in (48) ein, so liefert jetzt unser Satz:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = -B\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu).$$

Ferner für $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^{\nu}} Fc(\gamma-1)\,\nu^{\gamma-2}$$
$$- D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu);$$

dagegen für $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^{\nu}} Fc'(0)\,\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^{\nu}} a_0\,Fc(\gamma-1)\,\nu^{\gamma-2}$$
$$- D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}\,\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\,\nu^{\gamma-3})$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu).$$

Daraus folgt bei unseren Voraussetzungen wie vorhin:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{X_\nu}{Y_\nu} = \lim_{\nu=\infty}\frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}} = 0;$$

daher gilt wieder die Formel (44), also auch (45). W. z. b. w.