

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1913

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder.

Von Ludwig Föppl in Göttingen.

Mit 1 Taf.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 11. Januar 1913.

§ 1. Die Gleichgewichtslage des Wirbelpaares.

Wird ein Kreiszyylinder, der sich in einem Gefäß mit Wasser befindet, aus der Ruhe heraus in Bewegung gesetzt, so lösen sich bald nach Eintritt der Bewegung an seinem hinteren Rand zwei Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn ab, deren Wirbelstärke fortwährend wächst, indem immer neue wirbelnde Flüssigkeit aus der Grenzschicht zwischen Zylindermantel und Potentialströmung heraus nachgeliefert wird. Dabei rückt das Wirbelpaar vom Zylinder ab mit einer Geschwindigkeit, die klein ist im Vergleich mit der Fortschrittgsgeschwindigkeit des Zylinders samt Wirbelpaar in der ruhenden Flüssigkeit. Im Göttinger Institut für Angewandte Mechanik wurde das durch aufgestreutes Lycopodiumpulver deutlich sichtbar gemachte Wirbelpaar in den verschiedenen Entwicklungsstadien nach seiner Ablösung photographiert¹⁾. Die im Anhang wiedergegebene Photographie zeigt das Wirbelpaar in vorgeschrittener Entwicklung; man macht beim Experiment die Wahrnehmung,

¹⁾ Die photographischen Aufnahmen rühren von Herrn stud. math. Rubach her, der sie in seiner bald erscheinenden Dissertation, die das experimentelle Material zu meiner vorliegenden mehr theoretischen Arbeit enthält, veröffentlichen wird. Die Photographien auf beiliegender Tafel hat mir Herr Rubach in freundlicher Weise zur Verfügung gestellt.

daß dieses so vollkommen ausgebildete Wirbelpaar gegenüber dem Zylinder fast in Ruhe bleibt.

Die angeführten Beobachtungen und Experimente veranlaßten Herrn v. Kármán und mich die Frage aufzuwerfen, ob es wohl hinter einem in ruhender Flüssigkeit bewegten Kreiszylinder Lagen gäbe, wo sich ein Wirbelpaar gegenüber dem Zylinder in Ruhe befinden könne. Gleichzeitig hofften wir, bei der bewegten Platte, bei der gleichfalls ein Wirbelpaar beobachtet wurde, die unendlich große Geschwindigkeit der Potentialströmung an den beiden Enden der Platte mit Hilfe des Wirbelpaares zu umgehen¹⁾.

Ich habe die Beantwortung dieser Frage versucht, indem ich zunächst hinter dem Kreiszylinder vom Radius 1 den geometrischen Ort für die Ruhelage des Wirbelpaares suchte. Sei die komplexe Koordinate der mit dem Zylinder fest verbundenen Ebene der Strömung $\zeta = \xi + i\eta$, und die Lage der Wirbel $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ bzw. $\bar{\zeta}_0 = \xi_0 - i\eta_0$, so läßt sich das komplexe Geschwindigkeitspotential W mit Hilfe der beiden am Kreiszylinder gespiegelten Wirbel folgendermaßen schreiben:

$$(1) \quad W = \Phi + i\Psi = U\left(\zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + iC \lg \frac{(\zeta - \zeta_0)\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}{(\zeta - \bar{\zeta}_0)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0}\right)},$$

wobei U die Geschwindigkeit im Unendlichen und C die Wirbelstärke bedeuten. Φ ist das Geschwindigkeitspotential; $\Psi = \text{const.}$ sind die Stromlinien. Aus (1) erhält man durch Differentiation die komplexe Geschwindigkeit

$$(2) \quad \frac{dW}{d\zeta} = u - iv = U\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + iC \left\{ \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_0} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\zeta_0}} \right\}.$$

¹⁾ Dieser Fall ist schon vor mehreren Jahren von Herrn Professor W. Kutta behandelt worden; eine ausführliche Zeichnung der Strömung befindet sich in der Sammlung des mathem. Instituts der Technischen Hochschule in München. (Anm. von Prof. Finsterwalder.)

Um daraus die Geschwindigkeit der beiden Wirbel, die natürlich immer spiegelbildlich zur ξ -Achse liegen, abzuleiten, ersetzt man in (2) ξ durch ξ_0 . Der Term $iC \frac{1}{\xi - \xi_0}$ gibt für $\xi = \xi_0$ die im Wirbelzentrum herrschende unendlich große Geschwindigkeit des eigenen Wirbels, die aber zu der Fortschreitungs geschwindigkeit des Wirbelzentrums nichts beiträgt und daher hier weggelassen werden muß. Die komplexe Fortschreitungs geschwindigkeit des Wirbelzentrums beträgt demnach:

$$(3) \quad u_0 - iv_0 = U \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right) + iC \left\{ \frac{1}{\xi_0 - \frac{1}{\xi_0}} - \frac{1}{\xi_0 - \xi_0} - \frac{1}{\xi_0 - \frac{1}{\xi_0}} \right\}.$$

Lassen wir nun die Indizes 0 als selbstverständlich weg und trennen Gleichung (3) in Real- und Imaginärteil, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} (a) \quad u &= U \left(1 - \frac{\xi^2 - \eta^2}{r^4} \right) + C\eta \left(\frac{1}{(r^2 - 1)^2} - \frac{1}{2\eta^2} \right), \\ (b) \quad -v &= 2U \frac{\xi\eta}{r^4} - C \frac{\xi}{r^4 - 1}, \end{aligned}$$

wobei $r^2 = \xi^2 + \eta^2$. Die Bedingung dafür, daß das Wirbel-paar ruht, ist einfach $u = 0$ und $v = 0$, oder:

$$(5) \quad \begin{aligned} (a) \quad U \left(1 - \frac{\xi^2 - \eta^2}{r^4} \right) + C\eta \left(\frac{1}{(r^2 - 1)^2} - \frac{1}{2\eta^2} \right) &= 0 \\ (b) \quad 2U \frac{\xi\eta}{r^4} - C \frac{\xi}{r^4 - 1} &= 0. \end{aligned}$$

Da ξ als Faktor der linken Seite von Gleichung (5b) auftritt, so ist $\xi = 0$ oder die η -Achse eine Lösung unseres Problems; d. h. ein Wirbelpaar, dessen Mittelpunkte die Koordinaten η und $-\eta$ auf der η -Achse besitzt, kann gegenüber dem Zylinder in Ruhe bleiben. Dabei berechnet sich die Stärke der zu dem beliebig gewählten η gehörigen Wirbel aus (5). Doch hat diese Lösung der Gleichungen (5) für uns kein weiteres Interesse, da sie bei den Experimenten nicht

beobachtet wird. Wir suchen nach weiteren Lösungen der Gleichungen (5) bzw. der aus (5) hervorgehenden Determinantengleichung:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 - \frac{\xi^2 - \eta^2}{r^4} & \eta \left(\frac{1}{(r^2 - 1)^2} - \frac{1}{2\eta^2} \right) \\ \frac{2\eta}{r^4} & -\frac{1}{r^4 - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Da sich Gleichung (6) beim Wechsel der Vorzeichen von ξ und η nicht ändert, so muß die Kurve in allen vier Quadranten symmetrisch verlaufen. Durch Umformungen läßt sich Gleichung (6) in folgende einfache Gestalt bringen:

$$(7) \quad \pm 2\eta = r - \frac{1}{r},$$

wobei die verschiedenen Vorzeichen vor η zu den beiden Ästen der Kurve gehören¹⁾.

Gleichung (7) gestattet eine einfache Konstruktion der Kurve, die in Fig. 1 für positive ξ wiedergegeben ist. Hervorgehoben sei, daß die Kurve im Punkte $\xi = 1$ unter 45° ansteigt und im Unendlichen eine Asymptote besitzt, die unter 30° gegen die ξ -Achse geneigt ist. Der Verlauf der Kurve für negative ξ ergibt sich natürlich durch Spiegelung der gezeichneten Kurve an der η -Achse. Doch hat dieser Ast der Kurve bei der von uns gewählten und in Fig. 1 eingetragenen Rich-

1) Die Richtigkeit des Überganges von Gleichung (6) zu Gleichung (7) läßt sich sehr einfach beweisen, indem man umgekehrt Gleichung (7), die man auch $4\eta^2 r^2 = (r^2 - 1)^2$ schreiben kann, in Gleichung (6) einsetzt. Dabei läßt sich die linke Seite der Gleichung (6) folgendermaßen umformen:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{r^2} + \frac{2\eta^2}{r^4} & \eta \frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^2} \\ \frac{2\eta}{r^4} & -\frac{1}{r^4 - 1} \end{vmatrix} = -\frac{1 - \frac{1}{r^2} + \frac{(r^2 - 1)^2}{2r^6}}{r^4 - 1} - \frac{(r^2 - 1)^2(1 - 2r^2)}{2r^6(r^2 - 1)} \\ = \frac{(-2r^6 + 2r^4 - r^4 + 2r^2 - 1) - (r^4 - 2r^6 - 1 + 2r^2)}{2r^6(r^4 - 1)} = 0.$$

tung der Geschwindigkeit U im Unendlichen keine Bedeutung, da sich die Wirbel hinter dem Zylinder ausbilden und dabei einen Drehsinn besitzen, wie er für eine bestimmte Lage des Wirbelpaares auf der Kurve in Fig. 1 eingezeichnet ist.

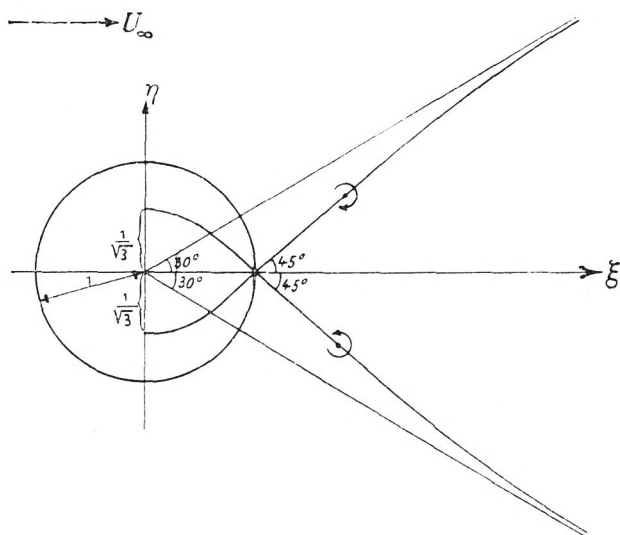


Fig. 1.

Die Wirbelstärke C , die zu den verschiedenen Lagen des Wirbelpaares auf der Kurve gehört, berechnet sich aus (5):

$$(8) \quad C = U \cdot 2\eta \left(1 - \frac{1}{r^4}\right).$$

Zu konstanter Geschwindigkeit U im Unendlichen gehört demnach eine um so größere Wirbelstärke C , je weiter das Wirbelpaar auf der Kurve vom Zylinder abliegt.

Vergleichen wir nun die auf der Tafel wiedergegebene Photographie, so finden wir durch Ausmessung, daß die beiden Zentren des Wirbelpaares genau auf der oben bestimmten Kurve liegen. Wir können jetzt folgende Schilderung von dem hydrodynamischen Vorgang, der bei der Bewegung eines sehr

langen Kreiszylinders aus der Ruhe heraus beobachtet wird, entwerfen: Es löst sich an der hinteren Zylinderwand ein Wirbelpaar ab, das unter fortwährendem Wachstum seiner Wirbelstärke sich unserer Kurve nähert und, nachdem es die Kurve erreicht hat, langsam längs der Kurve oder deren nächsten Umgebung weiterwandert, wobei seine Wirbelstärke abermals zunimmt, wie es Gleichung (8) verlangt. Es fragt sich nun, wie der Vorgang sich weiter entwickelt. Das Experiment zeigt, daß die Entwicklung des Wirbelpaares, wie wir sie soeben verfolgt haben, nicht in derselben Art weitergeht, sondern daß sich das Strömungsbild vollständig ändert. Die beiden Wirbel geben ihre spiegelbildlich symmetrische Lage zur ξ -Achse auf; es entstehen neue Wirbel, und zwar nunmehr abwechselnd an beiden Seiten des Zylinders; es tritt eine Art Pendelung der Strömung hinter dem Zylinder auf, während die vorher abgelösten Wirbel in einiger Entfernung hinter dem Zylinder in zwei Wirbelstraßen weiterwandern. Wir haben nunmehr das Strömungsbild, wie es Herr v. Kármán¹⁾ untersucht hat. Die Änderung des ursprünglichen Strömungsbildes hat offenbar in einer Instabilität der Strömung ihren Grund. Wir wollen uns daher die Aufgabe stellen, das eine Wirbelpaar hinter dem Kreiszylinder auf Stabilität zu prüfen.

§ 2. Stabilitätsuntersuchung des Wirbelpaares.

Wir nehmen an, daß sich das Strömungsbild schon soweit entwickelt hat, daß die Mittelpunkte der beiden Wirbel auf unserer in § 1 bestimmten Kurve liegen; wir denken uns also den Zustand, wie er durch die beigegefügte Photographie gekennzeichnet ist. Wie schon in § 1 bemerkt, schreitet das Wirbelpaar nur langsam längs der Kurve weiter, so daß wir diesen Zustand für die Stabilitätsuntersuchung angenähert als Gleichgewichtslage auffassen können. Aus dieser Gleichgewichtslage verschieben wir nun das Wirbelpaar um unendlich kleine

¹⁾ Gött. Nachr. 1911, S. 509 und 1912, S. 1; ferner v. Kármán und Rubach, Phys. Zeitschr., Jahrg. 1912, S. 49.

Strecken, um zu sehen, ob das Wirbelpaar wieder in die Gleichgewichtslage zurückschwingt. Die Stabilitätsuntersuchung wollen wir in zwei Teilen durchführen: Einmal untersuchen wir die Stabilität bei spiegelbildlich symmetrischer Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, das andere Mal bei antisymmetrischer Verschiebung.

Um mit dem ersteren der beiden Fälle zu beginnen, denken wir uns die beiden Wirbel um die unendlich kleinen Strecken $+a$ parallel der ξ -Achse und $+\beta$ bzw. $-\beta$ parallel der η -Achse aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben. Da demnach die beiden Wirbel immer spiegelbildlich zur ξ -Achse bleiben, so können wir die unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Gleichungen (4 a) und (4 b) für die Geschwindigkeiten $u = \frac{da}{dt}$ parallel der ξ -Achse und $v = \frac{d\beta}{dt}$ parallel der η -Achse anwenden. Ersetzt man in den Gleichungen (4) ξ durch $\xi + a$ und η durch $\eta + \beta$ und entwickelt die linken Seiten der Gleichungen (4) nach den kleinen Größen a und β unter Beibehaltung nur der ersten Potenzen in a und β , so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (5 a) und (5 b), denen zufolge die endlichen, bei der Entwicklung auftretenden Terme für sich verschwinden, die folgenden Stabilitätsgleichungen:

$$(9) \quad \begin{aligned} (a) \quad & Aa + B\beta = \frac{da}{dt}, \\ (b) \quad & Xa + Y\beta = -\frac{d\beta}{dt}, \end{aligned}$$

wobei

$$(10) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{2U}{r^6} \xi (4\eta^2 + 1); & B &= \frac{2U}{r^5} \left(r^4 + 2r^2 + \frac{2\eta^2}{r^2} \right); \\ X &= 8\xi^2 \eta \frac{U}{r^6(r^4 - 1)}; & Y &= \frac{2\xi U}{r^4} \left(1 + \frac{4\eta^2}{r^2(r^4 - 1)} \right). \end{aligned}$$

Aus den beiden linearen simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung (9 a) und (9 b) läßt sich durch Elimination

einer der beiden Abhängigen α oder β die folgende für β ebenso wie für α gültige Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten:

$$(11) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + (Y - A) \frac{d\alpha}{dt} + (BX - AY)\alpha = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$(12) \quad \alpha = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ist, wobei

$$(13) \quad \lambda_{1,2} = -\frac{Y-A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Y-A)^2 - 4(BX - AY)}.$$

Die Bedingungen der Stabilität sind demnach die beiden Ungleichungen:

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & Y > A \\ \text{(b)} & BX - AY > 0, \end{array}$$

die aber erfüllt sind, wie man sich durch Einsetzen der Werte für A, B, X, Y aus (10) überzeugen kann.

Die Stabilität des Wirbelpaares für spiegelbildlich symmetrische Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage ist damit bewiesen. Denkt man sich also statt der ξ -Achse eine Wand, so daß sich Flüssigkeit etwa nur in der einen Halbebene befindet, so ist der eine Wirbel gegenüber unendlich kleinen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage vollkommen stabil, da ja die übrigen drei Wirbel durch Spiegelung an der Wand bzw. dem Zylinder entstehen und daher die beliebigen Verrückungen stets spiegelbildlich symmetrisch sein müssen. Versuche mit einer Scheidewand hinter dem Zylinder sind vorläufig noch nicht in Angriff genommen worden.

Es erübrigt noch die Stabilitätsuntersuchung des Wirbelpaares gegenüber antisymmetrischen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage. Seien also die Koordinaten der Gleichgewichtslage für den ersten Wirbel $\xi' \eta$ und für den zweiten Wirbel $\xi' - \eta$, so sollen die entsprechenden Koordinaten für das verschobene Wirbelpaar $\xi + \alpha, \eta + \beta$ bzw. $\xi - \alpha, -\eta + \beta$

sein, wobei unter α und β wieder unendlich kleine Strecken zu verstehen sind. Wir dürfen in diesem Falle nicht, wie oben, von den Gleichungen (4) ausgehen, da diese ebenso wie die Gleichungen (1) bis (3) nur für spiegelbildlich symmetrische Anordnung der beiden Wirbel Geltung besitzen. Bezeichnen wir hingegen allgemein die Koordinaten der beiden Wirbelzentren mit $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ und $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$, so findet man leicht durch ähnliche Betrachtungen, wie sie den Gleichungen (1) bis (3) zu Grunde liegen, für die komplexe Fortschreitungs- geschwindigkeit des ersten Wirbels:

$$(15) \quad u - iv = U \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + iC \left\{ \frac{1}{\zeta_1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_2}} - \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_1}} \right\},$$

wobei wieder $\bar{\zeta}$ den konjugiert imaginären Wert von ζ bezeichnet.

Trennen wir nun Gleichung (15) in Real- und Imaginärteil, ersetzen ξ_1 durch $\xi + \alpha$, η_1 durch $\eta + \beta$, ξ_2 durch $\xi - \alpha$ und η_2 durch $-\eta + \beta$ und entwickeln wieder nach α und β , so erhalten wir wie oben die beiden Stabilitätsgleichungen:

$$(16) \quad \begin{aligned} (a) \quad & A' \alpha + B' \beta = \frac{d\alpha}{dt}, \\ (b) \quad & X' \alpha + Y' \beta = -\frac{d\beta}{dt}, \end{aligned}$$

wobei

$$(17) \quad \begin{aligned} A' &= Y' = \frac{2U}{r^6} \xi \left\{ 2(\xi^2 - \eta^2) - \frac{r^2 + 1}{2} \right\}, \\ B' &= \frac{2U}{r^6} \eta \left\{ 2(\xi^2 - \eta^2) + \frac{r^2 - 1}{2} \right\}, \\ X' &= \frac{2U}{r^6} \eta \left\{ 2(\eta^2 - \xi^2) - \frac{r^2 - 1}{2} - 2r^2 \eta (r^2 + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Ebenso wie wir Gleichung (11) aus den beiden Differentialgleichungen (9) ableiteten, so läßt sich aus den zwei Differentialgleichungen (16) die folgende wegen $A' = Y'$ vereinfachte Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten:

$$(18) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} + (B' X' - A'^2) a = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$a = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ist, mit

$$(19) \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{A'^2 - B' X'},$$

sodafß

$$(20) \quad A'^2 - B' X' < 0$$

die Bedingung der Stabilität ist. Durch Einsetzen der Werte für A' , B' , X' aus (17) überzeugt man sich leicht, daß die Ungleichung (20) für keinen Punkt der Kurve erfüllt ist, so daß damit die Labilität unseres Wirbelpaares nachgewiesen ist. Die beiden Wurzelwerte

$$\lambda_1 = \sqrt{A'^2 - B' X'} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{A'^2 - B' X'}$$

gehören zu den beiden Hauptschwingungen des Wirbelpaares für antisymmetrische Verrückungen. Von diesen gibt die zu λ_1 gehörige zur Labilität Veranlassung, während die zu λ_2 gehörige Hauptschwingung eine gedämpfte Bewegung darstellt. Für die erstere dieser beiden Hauptschwingungen erhält man aus (16) das Verhältnis

$$(a) \quad \frac{\beta}{a} = -\frac{A' - \sqrt{A'^2 - B' X'}}{B'};$$

(21) für die letztere, die stabile Bewegung,

$$(b) \quad \frac{\beta}{a} = -\frac{A' + \sqrt{A'^2 - B' X'}}{B'}.$$

Da aber nach (17) $B' X'$ stets negativ ist, weil B' stets positiv, X' stets negativ ist, so sieht man, daß im Fall der labilen Verschiebung $\frac{\beta}{a}$ positiv, im Fall der stabilen $\frac{\beta}{a}$ negativ und zwar absolut genommen größer als im ersteren Fall ist. Wendet man die obigen Formeln (21) für $\frac{\beta}{a}$ auf die aus der

beigefügten Photographie zu entnehmenden speziellen Lage des Wirbelpaares an, so erhält man durch einfache Rechnung:

$$\text{für die labile Verschiebung } \frac{\beta}{a} = 1,2$$

$$\text{für die stabile Verschiebung } \frac{\beta}{a} = -3,7.$$

Die Veränderung des beobachteten Strömungsbildes, wovon am Ende des § 1 die Rede war, hat also in der Labilität einer der vier Hauptschwingungen unseres Wirbelpaares seinen tieferen Grund. Tatsächlich beobachtet man auch bald, nachdem das Wirbelpaar unsere Kurve erreicht hat, und sich nur langsam weiter bewegt, eine merkliche Änderung in dem hydrodynamischen Vorgang, der in der eben berechneten Labilität seinen Grund haben dürfte. Jedoch äußert sich diese Labilität nicht in einer plötzlichen antisymmetrischen Verschiebung der beiden Potentialwirbel, wie man es aus der vorausgehenden Berechnung erwarten könnte, sondern vor Eintritt dieser labilen Verschiebung verlieren die beiden Wirbel den Charakter als Potentialwirbel, indem sich nämlich im Zentrum der Wirbel ein wirbelnder Kern bildet, der sich elliptisch auszieht und gelegentlich auch spaltet. Erst nach dieser Umbildung der Wirbel tritt die obenerwähnte labile Verrückung der Wirbel ein, die den Anfang für die Ausbildung der Kármán'schen Anordnung nach zwei parallelen Wirbelstraßen bedeutet.

§ 3. Der Widerstand des Zylinders.

Wir wollen uns die Frage vorlegen, wie der Widerstand des bewegten Kreiszylinders sich theoretisch aus dem beobachteten Fortwandern des Wirbelpaares erklären läßt. Zu dem Zweck denken wir uns den Zylinder gleichförmig bewegt und berechnen für das mitbewegte Koordinatensystem die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses, die von der Wanderung des Wirbelpaares herrührt. Würde das Wirbelpaar relativ zum gleichförmig bewegten Zylinder in Ruhe bleiben, so wäre der Widerstand des Zylinders Null. Tatsächlich beobachtet man

aber, daß die Wirbel wachsen und dabei weiterwandern. Mathematisch wollen wir diesen Vorgang dadurch fassen, daß wir außerhalb der beiden Wirbelkerne Potentialströmung annehmen, aber trotzdem uns die Wirbel zeitlich wachsend denken. Dabei soll das Wirbelpaar auf unserer in § 1 bestimmten Kurve wandern. Der Gesamtimpuls setzt sich aus zwei Teilen zusammen: dem Impuls der Potentialströmung um den Kreiszylinder und dem des Wirbelpaares. Der erste Anteil beträgt $U \cdot \pi \cdot \varrho$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit, U die Geschwindigkeit des Zylinders und der Kreisradius 1 ist¹⁾. Der zweite Anteil rührt von den beiden reellen und den beiden gespiegelten Wirbeln her. Das komplexe Potential dieser vier Wirbel mit den Koordinaten $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$ (siehe Fig. 2) beträgt:

$$(22) \quad W = \Phi + i\Psi = C i \lg \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_4)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)},$$

sodaß

$$(a) \quad \Phi = C(\alpha - \beta)$$

$$(23) \quad (b) \quad \Psi = C \lg \frac{r_1 r_4}{r_2 r_3}.$$

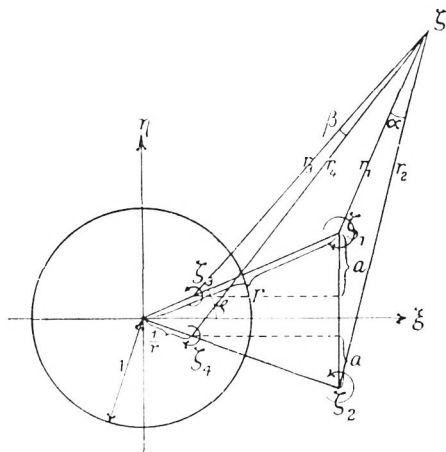


Fig. 2.

¹⁾ S. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, übers. v. Friedel, S. 93.

Die X -Komponente des Impulses der gesamten Flüssigkeit ist

$$(24) \quad P = \varrho \iint u \, dx \, dy = \varrho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, dx \, dy,$$

wobei sich die Integration über den Teil der Ebene erstreckt, der von Flüssigkeit erfüllt ist¹⁾. Die Integration nach x läßt sich in dem letzten Doppelintegral ausführen, und man erhält mit Rücksicht auf (23 a)

$$(25) \quad P = 4\pi C \varrho a - C \varrho \int_{(\text{Kreis})} (a - \beta) \, dy.$$

Dabei hat a die aus Fig. (2) zu entnehmende Bedeutung, und das Integral ist über den Umfang des Einheitskreises zu erstrecken. Dieses letztere Integral, das man durch Einführung von $y = \sin \gamma$ auch

$$J = \int_0^{2\pi} (a - \beta) \cos \gamma \, d\gamma$$

schreiben kann, läßt sich wohl am einfachsten durch komplexe Integration lösen. Wir trennen J in seine beiden Teile, die von den beiden Wirbelpaaren herrühren:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} a \cos \gamma \, d\gamma, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \beta \cos \gamma \, d\gamma,$$

sodaß

$$J = J_1 - J_2,$$

und berechnen zunächst zur Bestimmung von J_1 die komplexen Integrale

$$J'_1 = \int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - r e^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - r e^{-i\varphi}} e^{i\gamma} \, d\gamma; \quad J''_1 = \int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - r e^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - r e^{-i\varphi}} e^{-i\gamma} \, d\gamma,$$

sodaß

$$J_1 + J'_1 = 2 \int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - r e^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - r e^{-i\varphi}} \cos \gamma \, d\gamma.$$

¹⁾ Entsprechend erhält man für die Y -Komponente des Impulses $Q = \varrho \iint v \, dx \, dy$. Jedoch sieht man sofort aus Symmetriegründen, daß $Q = 0$ sein muß.

Die Bedeutung der Größen φ und r ist aus Fig. 2 zu entnehmen. Der imaginäre Bestandteil von $J'_1 + J''_1$ ist das Doppelte von J_1 . Die beiden Integrale J'_1 und J''_1 lassen sich aber sehr einfach berechnen. Führt man als Integrationsvariable im ersten Integral $\zeta = e^{i\varphi}$, im zweiten $\zeta = e^{-i\varphi}$ ein, so wird:

$$J'_1 = -i \int_{(\text{Kreis})} \lg \frac{\zeta - r e^{i\varphi}}{\zeta - r e^{-i\varphi}} d\zeta; \quad J''_1 = -i \int_{(\text{Kreis})} \lg \frac{1 - \zeta r e^{i\varphi}}{1 - \zeta r e^{-i\varphi}} d\zeta.$$

Da $r e^{i\varphi}$ und $r e^{-i\varphi}$ außerhalb des Integrationsweges liegen, ist $J'_1 = 0$. Dagegen ist J''_1 von Null verschieden, indem

$$\begin{aligned} \int_{(\text{Kreis})} \lg (1 - \zeta r e^{i\varphi}) d\zeta &= -\frac{2i\pi}{r e^{i\varphi}}, \\ \int_{(\text{Kreis})} \lg (1 - \zeta r e^{-i\varphi}) d\zeta &= -\frac{2i\pi}{r e^{-i\varphi}}, \end{aligned}$$

sodaß

$$J''_1 = -\frac{2\pi}{r} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{4\pi i}{r} \sin \varphi.$$

Demnach ist

$$J_1 = \frac{2\pi}{r} \sin \varphi.$$

Zur Berechnung von J_2 dient dieselbe Methode, und es gelten dieselben Formeln, wenn man nur statt r einfach $\frac{1}{r}$ einsetzt. Entsprechend erhält man

$$J_2 = 2\pi r \sin \varphi,$$

sodaß

$$J = J_1 - J_2 = -2\pi \sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

oder

$$J = -2\pi a$$

weil

$$\sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right) = a,$$

wie aus Fig. 2 hervorgeht. Gleichung (25), die den von den Wirbeln herrührenden Bestandteil des Impulses gibt, lautet jetzt

$$(26) \quad P = 4 C a \pi \varrho + 2 C a \pi \varrho = 6 C a \pi \varrho.$$

Fügt man den Impuls der Potentialströmung hinzu, so erhält man den Gesamtimpuls:

$$(27) \quad G = U \pi \varrho + 6 C a \pi \varrho.$$

Der Flüssigkeitsdruck auf den Zylinder ist durch die zeitliche Änderung von C bestimmt; also bei konstanter Geschwindigkeit ist

$$(28) \quad \frac{dG}{dt} = 6 \pi \varrho \frac{d(Ca)}{dt}.$$

Da sich nun nach Gleichung (8) C durch die jeweilige Lage der Wirbel auf unsere Kurve ausdrücken läßt, so läßt sich nach (28) der Druck, den der Zylinder bei gleichförmiger Geschwindigkeit erfährt, aus der Lage und der zeitlichen Lagenänderung des Wirbelpaares ableiten.

Der Durchführung der Widerstandsberechnung auf Grund des beobachteten Weiterwanderns des Wirbelpaares auf unserer Kurve stehen aber sehr große Schwierigkeiten im Wege, die vor allen Dingen in der in § 2 nachgewiesenen Labilität des Wirbelpaares begründet sind, indem das Wirbelpaar kurz, nachdem es unsere Kurve erreicht hat, infolge einer labilen Störung die Kurve wieder verläßt. Hat sich aber dann die Kármánsche Anordnung der Wirbel nach zwei Wirbelstraßen hinter dem Zylinder ausgebildet, so läßt sich, wie Herr v. Kármán¹⁾ gezeigt hat, aus der Beobachtung der Fortschrittgsgeschwindigkeit der Wirbel, sowie des Abstandes der beiden Wirbelstraßen der Widerstand des Körpers mit sehr befriedigender Genauigkeit angeben.

¹⁾ v. Kármán und Rubach: Phys. Zeitschr. 1912.

§ 4. Die Strömung um die unendlich lange ebene Platte.

Es liegt nahe, die in § 1 bis § 3 für den Kreiszylinder durchgeführten Betrachtungen auch auf die Bewegung einer ebenen Platte auszudehnen, und zwar wollen wir die Richtung der Bewegung senkrecht zur Platte annehmen. Es ist sehr einfach, sich zu überzeugen, daß es auch hinter der bewegten Platte einen geometrischen Ort für die Lage zweier gegen die Platte ruhender Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn geben muß; denn bilden wir die früher betrachtete Strömung um den Einheitskreis der ζ -Ebene mitsamt dem Wirbelpaar durch

$$(29) \quad z = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)$$

konform auf die z -Ebene der Platte von der Länge 2 ab und bilden für die Strömung in der z -Ebene die Ableitung des komplexen Geschwindigkeitspotentials, das aus Gleichung (1) durch Elimination von ζ mittels Gleichung (29) erhalten wird, so ergibt sich als Bedingung für die Ruhelage des Wirbelpaares hinter der Platte.

$$(30) \quad \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Da aber in dem Blatt der z -Ebene, dem allein physikalische Bedeutung zukommt, überall $\frac{d\zeta}{dz} \neq 0$, so vereinfacht sich Gleichung (30) zu

$$\frac{dW}{d\zeta} = 0.$$

Diese Bedingung ist aber dieselbe wie sie die Gleichungen (5) des § 1 ausdrücken, d. h. wir erhalten den gesuchten geometrischen Ort, wenn wir die durch Gleichung (7) bestimmte Kurve mit Hilfe der Gleichung (29) in den Koordinaten $z = x + iy$ ausdrücken.

Diese Umrechnung will ich hier nicht ausführen, sondern nur noch auf die Frage, die vor allen Dingen interessiert, ein-

gehen, ob es Lagen des Wirbelpaares hinter der Platte gibt, die endliche Geschwindigkeit an den beiden Enden der Platte liefern. Die Rechnung zeigt, daß diese Bedingung nur für die Lage des Wirbelpaares im Unendlichen erfüllt ist, was natürlich für die Erklärung der Strömungsbilder nicht in Frage kommt. Was die Beobachtungen der Strömung bei der Bewegung einer Platte betrifft, so zeigt es sich, daß ähnlich wie beim Zylinder bald nach Eintritt der Bewegung sich ein Wirbelpaar am hinteren Rand der Platte ablöst, das fortwährend wächst und dabei langsam von der Platte abrückt.

Nimmt man statt der Platte eine Schale, etwa von kreisbogenförmigem Querschnitt und bewegt sie nach der konvexen Seite hin, so liefert meine Theorie, worauf mich Professor Prandtl aufmerksam gemacht hat, für eine bestimmte Lage des Wirbelpaares im Endlichen, die von der Krümmung der Schale abhängt, an den beiden Enden der Schale endliche Geschwindigkeiten. Auf diese Frage will ich nicht näher eingehen, da noch keine Photographien dieser Strömung vorliegen.

Fig. 3.

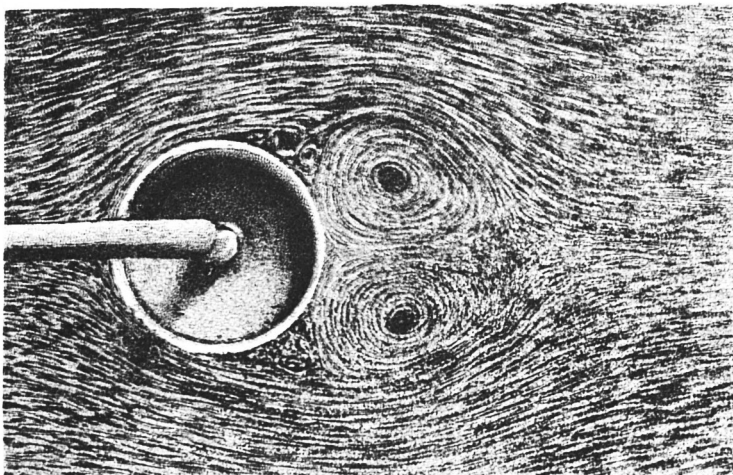


Fig. 4.

