Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XI. Jahrgang 1881.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1881.

In Commission bei G. Franz.

Herr v. Jolly theilt mit und bespricht die Abhandlung:

„Ueber den Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten" von Dr. W. Braun und Dr. A. Kurz in Augsburg.

Bewegt sich eine ebene dünne Scheibe innerhalb der durch sie bestimmten Ebene oder senkrecht zu derselben, so hat sie beziehungsweise die Luftreibung oder den Luftwiderstand zu überwinden. Von letzterem soll im Folgenden hauptsächlich die Rede sein.

§ 1. Nach einem bekannten Satze wird dieser Luftwiderstand häufig der Menge der von der Scheibe verdrängten Luft und der Wegstrecke der Scheibe, beide pro Sekunde genommen, proportional gesetzt, also dass

$$W = a \,.\, F \,.\, v^2$$

ist, worin a eine durch Versuche zu bestimmende Constante, F der Flächeninhalt der Scheibe und v ihre Geschwindigkeit ist.

Recknagel entwickelte jüngst, Wiedemann's Annalen Band 10 S. 677 u. f., zwei andere Ausdrücke für das Widerstandsgesetz, die aber beide als Annäherung auch auf vorige Form führten, welche alsdann von ihm mit Geschwindigkeiten bis zu 10 Metern bestätigt wurde. Der Coefficient a ist bei dieser Annäherung in bemerkenswerter Weise gleich der Masse der halben Cubikeinheit Luft gefunden worden; also in Grammen, Centimetern und Sekunden ausgedrückt

$$a = \frac{0{,}001293}{2 \cdot 981} = 0{,}000\,000\,65$$

Hienach ist also der Luftwiderstand gleich gesetzt dem Gewichte der Luftsäule vom Querschnitte F und der Höhe h, welche der Geschwindigkeit v als sogenannte Geschwindigkeitshöhe entspricht $\left(h = \frac{v^2}{2g}\right)$. Dies wurde schon von Newton ausgesprochen, wie u. A. auch bei Gronau „Historische Entwicklung der Lehre vom Luftwiderstande, Sitzungsber. der Danziger naturforsch. Gesellsch. 1868" zu finden ist. Nur hat Newton noch einen konstanten Faktor δ dabei, welchen er zu $\frac{1}{2}$ bestimmt hat für Kugeln, die sich in der Luft bewegen, z. B. herabfallen. Näheres über weitere Bestimmungen einer solchen von der Form des bewegten Körpers abhängigen Constanten auch in A. Ritter's „technischer Mechanik", im letzten § dieses Buches.

§ 2. Kurz vorher wurden wir durch gütige Mitteilung des Herrn Professors O. E. Meyer in Breslau auf Hagen's Versuche, Poggendorff's Annalen Bd. 152 S. 95 u. f. 1874, aufmerksam gemacht. Derselbe liess Scheiben von F = 4 bis 40 „Quadratzollen" mit v = 17 bis 66 „Zolle" sich bewegen, supponiert auch die Gesetzesform des § 1, aber mit der Modifikation

$$a = \beta + \gamma \cdot u,$$

worin u den Umfang der Scheibe bedeutet. Hagen macht dabei eine Analogie der Randreibung tropfbarer Flüssigkeiten namhaft. In den Einheiten des vorigen § ergaben seine Versuche

$a = 0{,}000\,000\,71$, wenn $\gamma = 0$ wäre, und

$a = 0{,}000\,000\,75$ für $F = 1$, $v = 1$, $u = 4$, bei 1 Quadratcentim.

§ 3. Wie man für die grossen Geschossgeschwindigkeiten das rein kubische und auch das gemischte Gesetz

$$W = F \,.\, (av^2 + bv^3)$$ [1]

versucht hat, so hat Saint-Loup für die Geschwindigkeiten von 1500 bis 3600 Centim. bei seinen Versuchen, Compt. Rend. Bd. 88 S. 1257 (1879), das Gesetz

$$W = F \,.\, (av + bv^2)$$

zu Grunde gelegt und für Gramm, Centimeter, Sekunde

$$a = 0{,}000\,5835, \quad b = 0{,}000\,000\,562\,8$$

angegeben.

§ 4. Etwas ausführlicher müssen wir bei dem „Studium des Luftwiderstandes in der Drehwage" von Cornu und Baille, Compt. Rend. T. 86 p. 571—574 1878, verweilen, weil wir hernach von ähnlichen eigenen Versuchen berichten wollen.

Zwei gleiche Cylinder, 190 Gramm schwer, 2,46 Centim. hoch und breit, waren an einem Hebel in den Entfernungen $y = 5, 10, 15, 20, 25$ Centim. von der Drehaxe unifilar aufgehängt. Also war das Trägheitsmoment der beiden Cylinder $\frac{2\,.\,190}{981}\,.\,y^2$, und das Trägheitsmoment des ganzen Apparates, Spiegel und Hebel hinzugerechnet, ward mit

$$\mu = \frac{2\,.\,190}{981}\,(y^2 + \beta^2)$$

bezeichnet; über β fehlt aber jede weitere Angabe in dem betreffenden Aufsatze.

Nennt man K das Torsionsmoment und H das Moment der dämpfenden Kraft bei der Geschwindigkeit 1, macht

1) S. Zeitschrift für Mathem. u. Phys. v. Schlömilch Bd. 2 S. 199 und Bd. 11 S. 515.

aber über letztere die für kleine Geschwindigkeiten erlaubte Annahme

$$W = n . F . v$$

so ist nach d'Alembert's Prinzip

$$\mu \frac{d^2\omega}{dt^2} + H \frac{d\omega}{dt} + K . \omega = 0$$

und der Ausschlagwinkel ω zur Zeit t ergiebt sich hieraus als

$\omega = \omega_1 e^{-\alpha t} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}$ [1], wobei $t_0 = 0$ gesetzt werden soll, e die Basis der natürlichen Logarithmen, α das zugehörige Dekrement pro 1 Sekunde, T die Schwingungsdauer ist.

Die beiden letzteren werden nach bekannten Methoden gemessen und gestatten gemäs den zugehörigen Formeln

$$\alpha = \frac{H}{2\mu}, \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{\mu} - \alpha^2}$$

die Berechnung von H und K.

Hier handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung von H: „Nous avons cherché à déterminer, dans des circonstances variées, la valeur absolue de la résistance spécifique que l'air exerce sur les masses cylindriques à l'extremité d'un levier.“ Ist N dieser Widerstand für einen Cylinder bei der Geschwindigkeit 1, und setzt man $2Nb^2$ für den Widerstand des Hebels und Spiegels, so ist der Gesammtwiderstand

$$H = 2N . (b^2 + y^2).$$

Durch welche Messungen die Angabe b = 23,15 erhalten worden, ist nicht beigesetzt.

1) Wie die Pendelbewegung (H = 0) bekanntlich als Projektion einer gleichförmigen Bewegung im Kreise dargestellt werden kann, so lässt sich auch obige Differentialgleichung geometrisch integrieren; das Integral ist die Projektion der Bewegung eines Punktes in der logarithmischen Spirale mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Nach Tait 1867 und Maxwell's Treatise on electr. and magn. hat dies Wallentin in der Zeitschr. für Realschulwesen, Wien 1880 S. 472 u. f., dargelegt.

Hierauf folgt das tabellarische Verzeichnis der eingestellten y, der beobachteten T und α und der berechneten K und N, welches mit einigen Abkürzungen lautet:

y	T	α	K	N
5	108,..	0,00062...	0,0356	0,000 011 7
10	167	31	356	123
15	234	20	355	132
20	303	14	358	123
25	375	11	357	120

Bezüglich K schreibt das Original 0,00356, was sich beim Nachrechnen als ein Versehen herausstellte. Aber auch die angenäherte Constanz von K, welche von den Verfassern gerühmt wird und sich freilich ergeben sollte, zeigt sich beim Nachrechnen nicht zutreffend, indem z. B. für y = 25 das K grösser als 0,06 .. sich herausstellt; schon wenn man das $\beta = o$ setzt[1]). Davon abgesehen nehmen wir noch mit den Verfassern

$$N = 0{,}000\,012\,0$$

vorübergehend als angenäherten Wert an.

Den Herrn Verfassern lag daran zu berechnen, wieviel hienach jener „spezifische Widerstand" eines Cylinders ihrer Drehwage im höchsten Falle betragen könne; deshalb berechnen sie die Maximalgeschwindigkeit eines Cylinders für y = 25 und 40 Bogensekunden in der Zeitsekunde

$$v_{max} = 25 . \frac{40 . \pi}{180 . 60 . 60} = \frac{11}{2268},$$ d. i. etwas kleiner als $\frac{1}{200}$ Centimeter (statt „kleiner als $\frac{1}{100}$ Centim."); also der höchste Widerstand für einen Cylinder

$$0{,}000\,012\,0 . \frac{1}{200} \text{ oder } 0{,}000\,000\,06 \text{ Gramm},$$

wofür schliesslich unsere Quelle die Angabe „kleiner als 0,000 000 1" enthält.

1) Um so mehr bei grösserem β.

§ 5. Wollte man aus dem vorigen Werte von N auf den Widerstand n der Fläche von 1 Quadratcentimeter bei der Geschwindigkeit 1 in Grammen schliessen (siehe § 4), so bedürfte es noch einer Annahme: wie z. B. dass man für die widerstehende Fläche F beim bewegten Cylinder des § 4 seinen Axenschnitt $2{,}46^2$, also nahezu 6 Quadratcentim. setzen dürfe; dann wäre $n = 0{,}000\,002\,0$.

Oder wenn man in Analogie zu § 1 für diese Fläche setzen müsste $\frac{2}{3}$ F (siehe z. B. den letzten § von Ritters Mechanik), so käme heraus

$$n = 0{,}000\,003\,0$$

Gramme pro Quadratcentimeter Fläche und 1 Centim. Geschwindigkeit.

Dies wie gesagt nur als vorübergehender Anhaltspunkt.

§ 6. Unsere Versuche waren zuerst auch unifilare, da wir uns schon früher mit dem Studium der Dämpfung der Torsionsschwingungen beschäftigt hatten und von diesem Felde gelegentlich auch auf gegenwärtiges gelangten. Siehe Carl's Repertorium Bd. 15 S. 561 u. f. (1879), wovon bald eine Fortsetzung ibidem Bd. 17 S. 197 u. f. erscheinen wird; vergl. insbes. § 13 daselbst.

Bei unserem Apparate wiegt die eiserne, mit Schroten gefüllte Hohlkugel 3283 Gramme und hat als Durchmesser 10 Centimeter; also ist mit der Bezeichnung des § 4

$$\mu = \frac{2}{5} \cdot \frac{3283}{981} \cdot 5^2 = 33{,}5.$$

Dieses Trägheitsmoment wurde durch Anbringung von zwei kreisförmigen Cartons ($\pi \,.\, 2{,}8^2$) in 10 Centimeter Abstand von der Torsionsaxe nicht merklich vergrössert und auch die Schwingungsdauer, welche je nach Länge, Dicke und Material des Drahtes 6 bis 10 Sekunden betrug, und bis auf Hundertel Sekunden bestimmt wurde, zeigte nur in den letzteren eine Erhöhung, wenn die Cartons angebracht waren, so dass wir auch diese als dadurch ungeändert betrachteten. Aber das Dekrement α des Apparates mit den Cartons betrug nahezu das doppelte desjenigen α' nach Entfernung der Cartons; es war beispielsweise das erstere Dekrement in briggischen Logarithmen und für eine Schwingungsdauer 0,00111, und das letztere 0,00056. In natürlichen Logarithmen und zur Sekunde umgerechnet ist also gemäs Calkul des § 4

$$\alpha = \frac{\mathrm{H}}{2\mu},$$

worin H den gesammten Widerstand des ganzen Apparates sammt den Cartons, auf die Entfernung 1 und auf die Geschwindigkeit 1 (auf letztere nach dem Widerstandsgesetze mit der ersten Potenz) reduziert vorstellt. Und analog ist

$$\alpha' = \frac{\mathrm{H}'}{2\mu},$$

worin H′ den gesammten Widerstand des Apparates ohne die Cartons bedeutet.

Die Differenz (H—H′) ist der gesuchte Luftwiderstand der beiden Cartons in der Entfernung 1 und bei der Geschwindigkeit 1. Wie schon in § 5, wollen wir n diesen Luftwiderstand nennen, wenn derselbe auch auf die Fläche 1 reduziert ist. Dann ist

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \mathrm{n} \,.\, 2\pi\, 2{,}8^2 \,.\left(10^2 + \frac{2{,}8^2}{4}\right).$$

Reduziert man ferner die vorhin angegebenen numerischen Werte der beiden Dekremente, oder kürzer blos deren Differenz auf natürliche Logarithmen (Faktor 2,3...) und auf 1 Sekunde (Divisor 6,..), so wird dieselbe 0,00021.

Also

$$\mathrm{n} = \frac{0{,}000\,21 \,.\, 33{,}5}{\pi\, 2{,}8^2 \,.\, 102} . = 0{,}000\,002\,8$$

Gramme beträgt der Luftwiderstand von 1 Quadratcentimeter bei 1 Centimeter Geschwindigkeit. Diese Zahl stimmt einigermassen mit unserem „Anhaltspunkte" oder der Vergleichszahl des § 5.

§ 7. Betrüge der grösstmögliche Fehler in der Bestimmung der beiden Faktoren des letzten Quotienten je eine Einheit der letztangegebenen Zifferstelle, so wäre der Fehler in der Messung des n höchstens zwei Einheiten von der Zahl 28. Wir änderten auch die Grösse der Cartons ab, indem wir neben den vorigen (π $2{,}8^2$) auch die kleineren ($\pi\,.\,1{,}4^2$) und die grösseren (π $4{,}2^2$) im Abstande 10 Centimeter von der Drehaxe wählten. Dadurch wurde die vorhin angegebene Differenz der gemessenen Dekremente 0,00055 (nach briggischen Logarithmen und pro Schwingungsdauer) abgeändert bezüglich in 0,00012 und 0,00120; während die Trägheitsmomente der Cartonflächen im Verhältnis von

$$1{,}4^2\left(10^2+\frac{1{,}4^2}{4}\right) \text{ zu } 2{,}8^2\left(10^2+\frac{2{,}8^2}{4}\right) \text{ zu } 4{,}2^2\left(10^2+\frac{4{,}2^2}{4}\right)$$

oder von

$$1\,.\,1005 \text{ zu } 4\,.\,1020 \text{ zu } 9\,.\,1045$$

variierten. Vergleicht man hiemit die Verhältnisse der vorher genannten Differenzen der Dekremente

$$12 : 55 : 120,$$

so sieht man, dass dieselben angenähert übereinstimmen, nämlich mit Abweichungen von ungefähr 10 Procenten in runder Zahl.

Letztere drei und drei Verhältnisse sind Durchschnittszahlen aus wiederholten Beobachtungen. Wir fassten aber bald den Vorsatz, die unifilare Aufhängung mit der bifilaren zu vertauschen.

§ 8. Bifilare Versuche, vorerst mit einer kleinen Drehwage:

Die alte Drehwage, wie sich deren eine in vielen physikalischen Cabineten vorfindet, ward zur bifilaren umgewandelt mit dem Abstande der parallelen Hälften des Drahtes oder dem Durchmesser der festen Rolle 1,5 Centimeter; die bifilare Länge betrug 41 Centimeter, das Gesammtgewicht 284 Gramme. Dann kommt statt des Torsionsmomentes das Gewichtsmoment $K' = \frac{284 . 1{,}5^2}{4 . 41}$ in Rechnung, das ist 3,89; und aus der Schwingungsdauer $T' = 2{,}13$ Sek. berechnet sich das Trägheitsmoment

$$\mu' = \frac{K' . T'^2}{4\pi^2} = 0{,}447.$$

(Von diesen 284 Gr. sind 200 cylindrisch vom Radius 1,85 und um die Cylinderaxe sich drehend angeordnet, was als Trägheitsmoment $\frac{1}{2} . \frac{200 . 1{,}85^2}{981}$ oder 0,349 giebt; würden alle 284 Gr. einen solchen Cylinder bilden, so würde das Trägheitsmoment 0,488 sein; das aus Messung und Theorie hervorgegangene 0,447 ist also wirklich mitteninne. Diese erste Probe ermutigte zu weiterem Vorgehen).

Nach Anhängung der beiden grössten Cartons des § 7 (π 4,2^2), deren Gewicht zusammen ganz nahe 5 Gr. beträgt, wurde die Schwingungsdauer beim jetzigen Apparate um die Hälfte grösser als vorher, $T = 3{,}24$; das Gewichtsmoment betrug jetzt $\frac{289 . 1{,}5^2}{4 . 41} = 3{,}95$; also das Trägheitsmoment $\mu = \frac{KT^2}{4\pi^2} = 1{,}051$, jetzt mehr als doppelt so gross gegenüber vorhin.

(Die Kontrolle $\mu = \mu' + \frac{5}{981}\left(10^2 + \frac{4{,}2^2}{4}\right) = 0{,}447 + 0{,}53 = 0{,}98$ diente als zweite Probe).

Die beiden Dekremente mit und ohne Cartons in briggischen Logarithmen und pro Sekunde waren 0,00828 und

0,00062; die Dekremente nach natürlichen Logarithmen sollen wie in § 6 wieder α und α' heissen. Dann ist, wenn wir uns im ersteren Falle eine noch unbekannte Fläche f denken, die den Luftwiderstand pro Quadratcentim. von n Grammen bei der Geschwindigkeit 1 leistet und auf diese Art das Dekrement α' verschulden würde,

$$\alpha' = \frac{f \, . \, n}{2\mu'}$$

(Diese ideale Fläche f muss man sich auch noch im Abstande 1 von der Drehaxe denken, weil in der Differentialgleichung des § 4 H' oder jetzt fn das Moment der dämpfenden Kraft bedeutet.)

Analog zu § 6 ist ferner, wenn die beiden Cartons aufgesteckt sind,

$$\alpha = \frac{fn + 2\pi \, . \, 4{,}2^2 \left(10^2 + \frac{4{,}2^2}{4}\right)}{2\mu}$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiert sich das Produkt fn und wird nach Ausführung der Rechnung mit den angegebenen numerischen Daten

$$n = 0{,}000\,003\,36$$

welcher Wert im Vergleich mit dem durch die unifilare Drehwage gefundenen des § 6 um 20% zu hoch ist. Sieht man von dieser Ungenauigkeit der kleinen Drehwage ab, so kann man als Beisatz auch noch die Grösse f bestimmen und findet dafür rund 380 Quadratcentimenter. Hierin ist die thatsächliche Luftreibung des grossenteils cylindrischen Gewichtes enthalten, das sich beim Schwingen um seine Axe dreht; aber grösser als dieser Anteil wird der Luftwiderstand des Apparates (ohne die Cartons), und des zwar dünnen aber 20 Centim. langen Drahtes sein, an dem die Cartons aufzustecken waren. Dies führt uns vorübergehend auf den

§ 9. Vergleich der Luftwiderstandskonstante n mit der Luftreibungskonstante k:

Die Luftreibung ist als Kraft gleich dem Produkte aus Masse (nach dem absoluten Systeme eine Anzahl von Grammen) und Beschleunigung (Centimeter durch das Quadrat der Sekundenzahl). Diese Kraft ist nach dem Newton'schen Fundamentalgesetze proportional der Fläche und der relativen Geschwindigkeit zweier Schichten in der Entfernungs-Einheit. So gelangen wir zu der Gleichung für die Bestimmung der Dimensionen von k

$$\text{Gramm}^1 . \frac{\text{Centim.}^1}{\text{Sekunde}^2} = \text{k} . \text{Centim.}^2 . \frac{\text{Centim.}^1}{\text{Sekunde}^1} : \text{Centim.}^1$$

Oder die Dimensionen von k sind:

$$\frac{\text{Gramm}^1 .}{\text{Centim.}^1 . \text{Sekunde}^1} \text{ in absol. System.}$$

Im konventionellen Systeme ist die vorhin besprochene „Masse" noch mit der Erdbeschleunigung $981 \frac{\text{Centim.}^1}{\text{Sekunde}^2}$ zu dividieren, so dass übrig bleibt: $\frac{\text{Gramm}^1 . \text{Sekunde}^1}{\text{Centim.}^2}$ im konvent. System.

Als Zahlenwert für k giebt Dr. H. Herwig in „Physikalische Begriffe und absolute Maasse", Leipzig Teubner 1880,

0,000 19 im absol. Syst. und
0,000 000 194 im konventionellen.

Der Luftwiderstandskoeffizient n[1]) der vorausgehenden §§ ist daselbst nach dem letzteren System genommen; er ergab sich am Schlusse von § 7 als Produkt des Trägheitsmomentes eines Gewichtes und einer Dekrementendifferenz, dividiert durch das Trägheitsmoment der Scheibenflächen; also

$$\frac{\text{Gramm}^1 . \text{Centim.}^2}{\text{Beschleunigung (981)}} . \frac{1}{\text{Sekunde}^1} : \text{Centim.}^4$$

1) In Herwig's Sammlung nicht aufgeführt.

Demnach wird

n = 0,000 003 $Gramm^1 . Centim.^{-3} . Sekunde^1$ im konventionellen System, und

n' = 0,003 $Gramm^1 . Centim.^{-2} . Sekunde^{-1}$ im absoluten System.

Hätte man das letztere Resultat (n') gerade so abgeleitet wie das erste Resultat dieses §, so hätte man in der ersten Gleichung desselben den letzten Divisor der rechten Seite, das ist eine Längendimension weglassen müssen. Die Constante des Luftwiderstandes ist auch naturgemäs um eine Längendimension niedriger als diejenige der Luftreibung. Für obige Einheiten ist bei uns die erstere Constante rund 15 mal so gross ausgefallen als die letztere schon seit längerer Zeit angegeben wird.

(Dagegen findet sich für die Constante a des § 1 nach dem quadratischen Widerstandsgesetze

a = 0,000 000 65 $Gramm^1 . Centim.^{-4} . Sek.^2$ im konv. Syst.,

das ist nur 3 und $\frac{1}{2}$ mal so gross als die Luftreibungskonstante 0,000 000 194.)

§ 10. Von den vorgängigen Versuchen des § 6 und 8 mit der grossen unifilaren und der kleinen bifilaren Drehwage gingen wir auf solche mit einer grossen bifilaren Drehwage über. Länge derselben l = 200 Centim., Kugel ähnlich wie in § 6 aber 3850 Gramme schwer, Cartons wie in § 8; Dekremente pro Sek. in brigg. Logarithmen mit und ohne Cartons 0,000 262 und 0,000 064; das Trägheitsmoment der Kugel sammt Zubehör wie in § 8 durch die Schwingungsdauer 12,2 Sekunden bestimmt und gleich 41,3 gefunden (theoretisch aus dem Gewicht der Kugel allein ergab sich 39). Das Trägheitsmoment und die Schwingungsdauer (12,24 mit und 12,16 ohne Cartons) galten in den beiderlei Versuchen mit und ohne Cartons wieder als gleich wie in § 6, mit genügender Annäherung. Die Berechnung nach § 6 lieferte

$$n = 0{,}000\,003\,29 \text{ oder nahe } 0{,}000\,003$$

in Uebereinstimmung mit § 6 und 8.

Zweiter Versuch: $l = 50$ Centim.; das Uebrige am Apparate wie vorhin; es ergab sich in brigg. Logarithmen 0,000 264 und 0,000 088 (s. noch § 11 u. 12); also die Differenz 0,000 176 und in natürl. Logarithmen 0,000 405. So kommt nach § 6

$$n = \frac{0{,}000\,405 \,.\, 41{,}3}{\pi \,.\, 4{,}2^2 \,.\, 104{,}4} = 0{,}000\,002\,89$$

nahe beim Resultate des § 6 und zwischen diesem und dem Resultate des § 8, sowie dem vorigen Resultate dieses §.

§ 11. Bei der grossen Torsionswage (§ 6 u. 10) betrug der Abstand der Skale vom Spiegel 160 Centim. Die Skale war 80 Centim. lang, und wir hatten im letzten Versuche des § 10 absichtlich mit Amplituden begonnen, welche der ganzen Skale entsprechen. Die Dekremente sind da n i c h t k o n s t a n t gewesen, wie es der Theorie des § 4 entsprechen würde, sondern f a l l e n merklich, und nähern sich erst bei hinreichend klein gewordenen Amplituden einem Endwerte, statt dessen wir vorläufig das letztbeobachtete Dekrement in die Rechnung gesetzt haben.

Wir gaben deshalb auch noch dem Reize zur Erweiterung der Differentialgleichung des § 4 nach, damit diese auch für fallende Dekremente gelte.

Hiebei war vor Allem zu untersuchen, ob die Abnahme der Dekremente sich nicht daraus erklären lasse, dass für das Gewichtsmoment [1]) bei der bifilaren Aufhängung eigentlich $K \sin \omega$ statt $K\omega$ in § 4 oder wenigstens

$$K\omega - \frac{K}{6}\,\omega^3$$

gesetzt werden musste. S. § 13.

Alsdann konnte man darangehen, den Gesammtwiderstand $H \frac{d\omega}{dt}$ in § 4 auf

$$H \cdot \frac{d\omega}{dt} + J \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

zu erweitern. Wir mussten sogar bis zur dritten Potenz der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ vorgehen. S. § 14 u. f. Dergleichen Berechnungen werden zum Glücke dadurch einigermassen erleichtert, dass es gestattet ist, jede Correctur ohne Rücksicht auf die andern vorzunehmen.

§ 12. Die am Schlusse von § 10 und am Anfange von § 11 erwähnte und für den nachfolgenden Calkul benutzte Beobachtungsreihe ist folgende:

9. November, 8^0 Cels., $l = 50$ Centim.; das Uebrige a. a. O.

---

1) Auch beim Torsionsmomente der unifilaren Aufhängung fällt die zweite Potenz der variablen Amplitude ω ausser Acht, so oft man dieses Moment für positive und negative ω als gleich ansehen darf. Aber Cornu und Baille untersuchten gerade die mit einem Gliede $K'\omega^2$ erweiterte Differentialgleichung, wovon noch im § 17 die Rede sein soll.

I. Mit den beiden Cartons ($\pi \,.\, 4{,}2^2$); Schwingungsdauer 5,75 Sek.

N.	Zeit	Ampl. in Bogen-minuten	Logar. brigg.	Differenz der Logar.	Dekrement pro 1 Sek. brigg.	Dekre-ment λ_N pro 1 Schwing. in natürl. Log.
1	$1^h 49' 35''$	704,4	2,84782	0,10439	0,000343	0,00454
2	$1^h 54' 39''$	553,9	74343	09595	315	417
3	u. s. f.	444,1	64748	9021	296	392
4	nach je	360,8	55727	8671	285	377
5	53 ganzen	295,5	47056	8513	277	366
6	Oscill. oder	242,9?	38543	8245	271	359
7	304,5 Sek.	200,9	30298	8131	267	354
—	$2^h 25' 6\frac{1}{2}''$	166,6	22167	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	$2^h 45' 35''$	78,33	1,89393	0,32549	264	350
—	$3^h\ 6'\ 9''$	37,02	56844	—	—	—

II. Ohne die Cartons; Schwingungsdauer 5,71 Sek.

1	$3^h 19' 5''$	758,3	2,87984	0,11619	0,0000921	0,00121
2	$3^h 40' 6''$	580,3	76365	11558	916	121
3	u. s. f.	444,7	64807	11519	913	120
4	nach je 221	341,1	53288	11375	902	119
5	Oscill. oder	262,5	41913	11228	890	117
6	1261 Sek.	202,7	30685	11123	881	116
—	$5^h 25' 11''$	156,9	19562	—	—	—

Bei dem obigen Fragezeichen war eine Störung oder ein Versehen des Beobachters vorgefallen; durch Auftragen der Dekremente als Ordinaten mit der Abscisse der Zeit ward die gerechnete Zahl 0,000280 zwischen den obigen Dekrementen 0,000285 und 0,000271 in die oben eingetragene 0,000 277 verbessert (s. Col. 6). Die fragliche Kurve verläuft ungefähr nach einer kubischen Parabel als Annäherung an die Exponentialkurve (s. Ende des § 19); dagegen nehmen die Dekremente in II so ziemlich linear ab.

§ 13. Zuerst berechneten wir den Einfluss von $\frac{K\omega^3}{6}$ bei $K\omega$ (§ 11) nach der von O. Chwolson in seiner Schrift „über die Dämpfung von Schwingungen bei grösseren Amplituden" (Petersburger Akademie 1879) angegebenen Formel, die wir verifiziert hatten. Die betreffende Correctur ergab sich im höchsten Falle als 0,001 mal dem in unserer Tabelle § 12 angegebenen Dekremente, fällt also über die von uns angegebenen Dezimalen hinaus. Also konnten oder mussten wir dieses Correcturglied bei Seite lassen.

Nicht so leicht war aber unsere Arbeit hinsichtlich des J im § 11, für welches wir uns die Correcturformel selber herzustellen hatten. Darum teilen wir die betreffende Entwicklung sogleich mit.

§ 14. Setzen wir in der Differentialgleichung des § 4 $\frac{H}{\mu} = 2\alpha$, $\frac{K}{\mu} = \beta^2$ und das J des § 11 gleich $\mu b'$, so lautet die erweiterte Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\omega}{dt} + \beta^2\omega = -b'\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = V$$

wobei $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \varrho$ für die Schwingungsdauer T gilt und in dem folgenden Correcturgliede ψ der gesuchten Amplitude ω mit erlaubter Annäherung ϱ statt β (oder ϱ^2 statt $\varrho^2 + \alpha^2$) gesetzt wird.

Man setzt

$\omega = \omega_1 e^{-\alpha t} \sin \varrho t + \psi$, worin nach der in § 13 angegebenen Quelle

$$\psi = \frac{e^{-\alpha t}}{\varrho} \cdot \left[\sin\varrho t \int V \cdot e^{\alpha t} \cos\varrho t\, dt - \cos\varrho t \int V\, e^{\alpha t} \sin\varrho t\, dt\right]$$

$$+ e^{-\alpha t} \cdot (A \cos\varrho t + B \sin\varrho t).$$

A und B sind aus $\psi = 0$ und $\frac{d\psi}{dt} = 0$ für $t = 0$ zu bestimmen. Die beiden angedeuteten Integrale sind

$$-\omega_1{}^2 b' \int e^{-\alpha t} \cdot (\varrho^2 \cos^3\varrho t - 2\varrho\alpha \cos^2\varrho t \sin\varrho t + \alpha^2 \sin^2\varrho t \cos\varrho t) dt$$

und

$$-\omega_1{}^2 b' \cdot \int e^{-\alpha t} \cdot (\varrho^2 \cos^2\varrho t \sin\varrho t - 2\varrho\alpha \cos\varrho t \sin^2\varrho t + \alpha^2 \sin^3\varrho t) dt.$$

Mit Hülfe von $A_k = e^{-\alpha t} \sin^{3-k}\varrho t \cdot \cos^k \varrho t$ und $J_k = \int A_k dt$, worin für k successive zu setzen ist 0, 1, 2, 3, wird

$$\left.\begin{array}{ll} A_0 = -\alpha J_0 + 3\varrho J_1 & \\ A_1 = -\varrho J_0 - \alpha J_1 + 2\varrho J_2 & \\ A_2 = \quad - 2\varrho J_1 - \alpha J_2 + \varrho J_3 & \\ A_3 = \quad - 3\varrho J_2 - \alpha J_3 & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Determ. } \Delta = \alpha^4 \\ + 10\alpha^2\varrho^2 + 9\varrho^4 \end{array}$$

Im Einklange mit der schon angegebenen Vernachlässigung von α^2 gegenüber ϱ^2 konnten wir auch $\Delta = 9\varrho^4$ schreiben. Dass wir dies nicht sogleich thaten, ward uns durch die zur Kontrolle der Rechnung vorzüglich geeignete Symmetrie gelohnt.

$$\Delta \cdot J_0 = A_0 (-\alpha^3 - 7\alpha\varrho^2) + A_1 (-3\alpha^2\varrho - 9\varrho^3)$$
$$+ A_2 (-6\alpha\varrho^2) + A_3 (-6\varrho^3)$$

$$\Delta \cdot J_1 = A_0 (\alpha^2\varrho + 3\varrho^3) + A_1 (-\alpha^3 - 3\alpha\varrho^2)$$
$$+ A_2 (-2\alpha^2\varrho) + A_3 (-2\alpha\varrho^2)$$

$$\Delta \cdot J_3 = A_0 (-2\alpha\varrho^2) + A_1 (2\alpha^2\varrho)$$
$$+ A_2 (-\alpha^3 - 3\alpha\varrho^2) + A_3 (-\alpha^2\varrho - 3\varrho^3)$$

$$\Delta \cdot J_4 = A_0 (6\varrho^3) + A_1 (-6\alpha\varrho^2)$$
$$+ A_2 (3\alpha^2\varrho + 9\varrho^3) + A_3 (-\alpha^3 - 7\alpha\varrho^2).$$

Hiemit sind die a. v. S. Z. 5 u. 7 angedeuteten Integrationen, also auch der erste Teil von ψ, Zeile 1, erledigt. (Zur Zusammenfassung desselben leistet noch die Relation $A_k \,.\, \cos \varrho t = A_{k+1} \,.\, \sin \varrho t$ einen passenden Dienst). Für den zweiten Teil von ψ findet sich

$$A = \frac{3\omega_1{}^2 b' \varrho^2}{\varDelta}(\alpha^2 + \varrho^2) \text{ und } B = -\frac{\omega_1{}^2 b' \varrho \alpha}{\varDelta}(\alpha^2 + \varrho^2).$$

Alles zusammengefasst und α^2 wie gesagt als verschwindend betrachtet, wird endgültig

$$\psi = -\frac{\omega_1{}^2 b' e^{-\varepsilon \alpha t}}{9\varrho} \,.\left(-\frac{3}{2}\varrho \cos 2\varrho t + \alpha \sin 2\varrho t + \frac{9}{2}\varrho\right)$$

$$+ \frac{\omega_1{}^2 b' e^{-\alpha t}}{9\varrho} (3\varrho \cos \varrho t - \alpha \sin \varrho t).$$

Zur Probe der Richtigkeit dieses Resultates setzten wir dasselbe in die Differentialgleichung ein. Wir rechneten auch einmal ohne obige A und $\varDelta$, indem wir in den obigen Integralen die Sinus und Cosinus der Vielfachen einführten. Auf letztere Weise wird auch Chwolson, s. vorigen §, verfahren sein.

§ 15. Nun ist die Gleichung für das Dekrement zu bilden, dessen Endwert mit λ_∞ bezeichnet werde, während die beobachteten Werte (§ 12) λ_n heissen sollen.

Die unkorrigierte Zeit τ_n der Vollendung der n^{ten} Elongation ω_n wird berechnet aus der Gleichung $\frac{d\omega_n}{dt} = 0$ und ergiebt sich als

$$\tau_n = \frac{1}{\varrho}\left[\operatorname{arc\,tan}\frac{\varrho}{\alpha} + (n-1)\pi\right], \text{ woraus folgt}$$

$$\sin \varrho \tau_n = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \alpha^2}} \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1},$$

$$\cos \varrho \tau_n = \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 + \alpha^2}} (-1)^{n-1} = \frac{\alpha}{\varrho} \cdot (-1)^{n-1}.$$

Nennen wir alsdann mit Chwolson a. a. O. § 7 $\frac{\sigma}{\varrho}$ die Correctur von τ_n, so ist die n^te^ Elongation

$$\omega_n = \omega_{t = \tau_n + \frac{\sigma}{\varrho}} + \psi_{t = \tau_n}$$

$$= \omega_1 \cdot e^{-\alpha \tau_n} \cdot e^{-\alpha \frac{\sigma}{\varrho}} \cdot \sin(\varrho \tau_n + \sigma) + \psi_{t = \tau_n}$$

$$= \omega_1 \cdot e^{-\alpha \tau_n} \left(1 - \frac{\alpha \sigma}{\varrho}\right) (\sin \varrho \tau_n + \sigma \cdot \cos \varrho \tau_n) + \psi_{t = \tau_n}$$

$$= \omega_1 \cdot e^{-\alpha \tau_n} \cdot (-1)^{n-1} + \psi_{t = \tau_n}.$$

Unter Benützung des Wertes ψ vom § 14 wird hieraus

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \cdot \omega_1 \cdot e^{-\alpha \tau_n} \cdot \left[1 - \frac{2}{3} \omega_1 b' \cdot e^{-\alpha \tau_n} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{2}{9} \omega_1 b' \frac{\alpha}{\varrho}\right].$$

Eine ganze Schwingungszeit später, oder nach Verlauf von $\tau_{n+2} = \tau_n + \frac{2\pi}{\varrho}$ Sekunden vom Aufangspunkte der Zeit an gerechnet, ist

$$\omega_{n+2} = (-1)^{n+1} \cdot \omega_1 \cdot e^{-\alpha \tau_n} \cdot e^{-2\alpha\pi : \varrho} \cdot \left[1 - \frac{2}{3} \omega_1 b' e^{-\alpha \tau_n} \cdot e^{-2\alpha\pi : \varrho} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{2}{9} \omega_1 b' \frac{\alpha}{\varrho}\right].$$

Also, wenn man gleich die Annäherung log nat $(1+\gamma) = \gamma$ benützt

$$\lambda_n = \log \operatorname{nat}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n+2}}\right) = \frac{2\alpha\pi}{\varrho} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}\omega_1 b' e^{-\alpha\tau_n} \cdot (e^{-2\alpha\pi:\varrho} - 1).$$

Nach § 4 ist α das Dekrement in natürl. Logarithmen pro Sekunde; nach § 14 ist $\frac{2\pi}{\varrho} = T$ die Schwingungsdauer. Also ist $\frac{2\alpha\pi}{\varrho} = \lambda_\infty$ der Endwert des Dekrementes pro Schwingungsdauer. Gerade so ist also auch das beobachtete Dekrement λ_n in Rechnung zu bringen; deshalb die letzte Colonne der Tabelle in § 12. Hiemit wird, wenn fürderhin der Suffix ∞ wegbleibt,

$$\lambda_n = \lambda - (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}\omega_1 \cdot b' \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda\tau_n : T}$$

Das auftretende Doppelzeichen sagt, dass nach n gleich einer ungeraden oder geraden Zahl von Elongationen die Constante b' des Correcturgliedes $b'\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ des Gesammtwiderstandes unseres Torsionspendels beziehungsweise negativ oder positiv sein muss, wie es auch dieser Gesammtwiderstand[1]) $2\alpha \cdot \frac{d\omega}{dt}$ ist, der mit der Richtung der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ sein Zeichen wechselt. Man vergleiche das im § 11 wegen des quadratischen Correcturgliedes $b\omega^2$ Gesagte. Es muss nämlich jedes beobachtete Dekrement λ_n (§ 12) grösser sein

1) Strenge genommen gehört noch der Beisatz „am Hebelarme 1" hinzu, weil in der Differentialgleichung des § 4 oder 14 statische Momente zu denken sind. Auch ist im § 14 mit dem Trägheitsmomente der Kugel (μ) wegdividiert worden.

als der beobachtete oder berechnete Endwert λ. Vergl. auch Gronau, welcher bei seiner Berechnung der Newton-'schen Pendelversuche (Danzig 1850) den Widerstand in die Differentialgleichung mit $b \frac{d\omega}{dt}$ minus $b' \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ eingeführt hat.

§ 16. Zur numerischen Berechnung der Versuche in § 12 ist statt des Suffixes n, der die Anzahl der Elongationen bedeutet, der Suffix N der dortigen Tabelle zu denken, welcher die Anzahl der Beobachtungen vorstellt.

Ferner ist die erste Elongation ω_1

mit Cartons: $\frac{1}{2} . 704{,}4 . \frac{\pi}{180 . 60}$ oder 0,1025 und

ohne Cartons: „ 758,3 „ „ 0,1103.

Einen genäherten Wert für b' erhält man vorerst, indem man λ beziehungsweise 0,00350 und 0,00116 aus der Tabelle einsetzt, und statt λ_N die Anfangswerte 0,00454 und 0,00121. Für diese ist $\tau_n : T = \frac{1}{4}$. Für die folgenden Dekremente 0,00417 und 0,00121 wäre hernach $\tau_n : T = \frac{1}{4} + 1 . 53$, beziehungsweise $\frac{1}{4} + 1 . 221$ zu setzen; überhaupt allgemein für λ_N

$$\text{mit Cartons: } \tau_N : T = \frac{1}{4} + (N-1) . 53$$

$$\text{ohne Cartons: } \frac{1}{4} + (N-1) . 221.$$

Dies werden wir im § 19 brauchen. Jetzt aber genügte schon das genäherte Resultat von b', welches „mit Cartons“ gleich 5 und „ohne dieselben“ gleich $\frac{1}{2}$ wurde, um uns zu zeigen, dass das Correcturglied $b' \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ unbrauchbar ist. Es ist viel zu gross, viel grösser als der zu corrigierende Wert $2\alpha\frac{d\omega}{dt}$ und überragt weit alle die Angaben über den Luftwiderstand in § 1 und den folgenden. Zur Vergleichung kann das im § 19 folgende b'' dienen und die hierauf folgenden §§.

So auffallend dieses Ergebnis scheinen konnte, so hatten wir doch noch einen andern Fingerzeig dafür auf dem Wege unserer wiederholten Rechnungen erhalten. Es zeigte sich nämlich, dass die im § 12 erwähnte kubische Parabel unsere λ_N nur dann befriedigend darstellen könnte, wenn in der letzten Gleichung des § 15 der Exponent e noch einen Faktor hätte, der sich gleich 2 entzifferte. Dass wir diesen Faktor bei Benützung des Correcturgliedes

$$b''\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3$$

erhalten würden, hat uns diejenige Rechnung, über welche schon im § 13 berichtet wurde, gelehrt oder zunächst vermuten lassen. Indes wäre wohl auch davon abgesehen dieses letztgenannte Correcturglied an die Reihe gekommen.

Vorläufig kann schon auf den Vergleich der Schlussformeln in § 15 und 19 hingewiesen werden.

§ 17. Ehe wir auf diese dritte Potenz der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ eingehen, mag es hier der geeignetste Ort sein, die von Cornu und Baille behandelte Correctur der Differentialgleichung des § 4 mit dem Gliede, welches der zweiten Potenz des Ausschlags ω proportional, eingehender zu erwähnen, als dies schon in der Anmerkung des § 11 geschehen konnte. Diese beiden Autoren integrierten in den Compt. Rend. T. 86 (1878) S. 1001 u. f. (influence des termes proport. au carré des écarts dans le mouvement oscill. de la balance de torsion) die Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + h\frac{d\omega}{dt} + s\omega = w\,.\,\omega^2$$

mit

$$\omega = \omega_1\,.\,e^{-\alpha t}\,.\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{w\,.\,\omega_1{}^2\,.\,e^{-2\alpha t}}{3\,s}\,.\left(1 + \cos^2 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

worin

$$\alpha = \frac{h}{2} \text{ und } \frac{2\pi}{T} = \sqrt{s - \alpha^2} = \varrho\,;$$

sie fügen bei, dass sie α^2 vernachlässigt haben (gegen ϱ^2, vergl. § 14). Nun ergiebt sich aber unter dieser Voraussetzung

$$\omega = \omega_1 e^{-\alpha t}\,.\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{w\,.\,\omega_1{}^2\,.\,e^{-2\alpha t}}{3s}\,.\left(1 + \cos^2 2\pi\frac{t}{T}\right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{s}}\sin 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right)$$
$$+ \frac{w\,.\,\omega_1{}^2 e^{-\alpha t}}{3\,s}\,.\left(\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{s}}\sin 2\pi\frac{t}{T} - 2\cos 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Man sieht, dass Cornu und Baille nicht nur α^2 gegen s sondern auch α gegen $\sqrt{s}$ vernachlässigt und sogar ein von α als Faktor ganz freies Glied weggelassen haben, worüber eine Kontrollrechnung hätte Aufschluss geben müssen.

§ 18. Correctur $-\,b''\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = V$ in § 14:

Die beiden S. 181 Z. 5 u. 7 stehenden Integrale werden jetzt

$$-\,\omega_1{}^3\,.\,b''\,.\int e^{-2\alpha t}\,.\,(\varrho^3\cos^4\varrho t - 3\varrho^2\alpha\cos^3\varrho t\sin\varrho t$$
$$+ 3\varrho\alpha^2\cos^2\varrho t\sin^2\varrho t - \alpha^3\cos\varrho t\sin^3\varrho t)\,dt$$

und

$$-\,\omega_1{}^3\,.\,b''\,.\int e^{-2\alpha t}\,.\,(\varrho^3\cos^3\varrho t\sin\varrho t - 3\varrho^2\alpha\cos^2\varrho t\sin^2\varrho t$$
$$+ 3\varrho\alpha^2\cos\varrho t\sin^3\varrho t - \alpha^3\sin^4\varrho t)\,dt.$$

Ferner

$$A_k = e^{-2\alpha t}\,.\cos^k\varrho t\,.\sin^{4-k}\varrho t\,, \quad \text{wobei } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Lassen wir jetzt zur Abkürzung α^2 gegenüber ϱ^2 gleich von vorneherein weg, so haben wir statt der vorigen zweimal vier Glieder nur zwei Binome zu berücksichtigen. Ferner folgt

$$\left.\begin{array}{ll} A_0 = & -2\alpha J_0 - 4\varrho J_1 \\ A_1 = & \varrho J_0 - 2\alpha J_1 - 3\varrho J_2 \\ A_2 = & 2\varrho J_1 - 2\alpha J_2 - 2\varrho J_3 \\ A_3 = & 3\varrho J_2 - 2\alpha J_3 - \varrho J_4 \\ A_4 = & 4\varrho J_3 - 2\alpha J_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = -128\varrho^4.\alpha \\ \text{(abgekürzt).} \end{array}$$

Die beiden Constanten ergeben sich

$$A = -\frac{1}{32}.\omega_1{}^3.b''.\varrho$$

$$B = -\frac{6}{32}.\omega_1{}^3.b''.\frac{\varrho^2}{\alpha}.$$

Alles zusammengefasst wird die Correctur der Variablen ω

$$\psi = \frac{1}{32}.\omega_1{}^3.b''.\frac{\varrho}{\alpha}.e^{-3\alpha t}.(\alpha\cos^5\varrho t + 6\varrho\cos^4\varrho t.\sin\varrho t$$
$$-2\alpha\cos^3\varrho t.\sin^2\varrho t + 12\varrho\cos^2\varrho t.\sin^3\varrho t$$
$$-3\alpha\cos\varrho t.\sin^4\varrho t + 6\varrho\sin^5\varrho t)$$
$$-\frac{1}{32}.\omega_1{}^3 b''.\frac{\varrho}{\alpha}.e^{-\alpha t}.(\alpha\cos\varrho t + 6\varrho\sin\varrho t).$$

Auch dieser Wert wurde durch Einsetzen in die Differentialgleichung kontrolliert.

§ 19. Analogie zu § 15 (jetzt die dritte Potenz der Geschwindigkeit statt der dortigen zweiten):

$$\omega_n = (-1)^{n-1}.\omega_1.e^{-\alpha\tau_n}.\left[1+\frac{3}{16}\omega_1{}^2 b''\frac{\varrho^2}{\alpha}(e^{-2\alpha\tau_n}-1)\right]$$

$$\omega_{n+2} = (-1)^{n+1}.\omega_1.e^{-\alpha\tau_n}.e^{-2\alpha\pi:\varrho}.\left[1+\frac{3}{16}\omega_1{}^2 b''\frac{\varrho^2}{\alpha}\right.$$
$$\left..(e^{-2\alpha\tau_n}.e^{-4\alpha\pi:\varrho}-1)\right].$$

Folglich das natürlich logarithmische Dekrement pro Schwingungsdauer

$$\lambda_n = \lambda + \frac{3}{16} \cdot \omega_1{}^2 b'' \frac{\varrho^2}{\alpha} \cdot e^{-2\alpha\tau_n} \cdot (1 - e^{-4\alpha\pi:\varrho})$$

oder $\frac{2\pi}{\varrho} = T$ und $\frac{2\alpha\pi}{\varrho} = \lambda$ gesetzt

$$\lambda_n = \lambda + \frac{3}{16} \cdot \omega_1{}^2 b'' \frac{\varrho^2}{\alpha} \cdot e^{-2\lambda\tau_n : T} \cdot (1 - e^{-2\lambda})$$

$$= \lambda + \frac{3}{8} \cdot \omega_1{}^2 b'' \cdot \lambda \frac{\varrho^2}{\alpha} \cdot e^{-2\lambda\tau_n : T}$$

$$= \lambda + \frac{3}{4} \omega_1{}^2 b'' \cdot \pi\varrho \cdot e^{-2\lambda\tau_n : T} ; \text{ wobei } \varrho = \frac{2\pi}{T} \text{ (§ 15)}$$

oder mit Rücksicht auf unsere Versuchstabelle in § 12 und wie im § 16

$$\lambda_N = \lambda + \frac{3}{2} \cdot \omega_1{}^2 b'' \cdot \frac{\pi^2}{T} \cdot e^{-2\lambda\tau_N : T} .$$

§ 20. Analogie zu § 16 (dritte Potenz der Geschwindigkeit statt der zweiten):

Betrachten wir das Enddekrement λ als die Unbekannte x und setzen als zweite Unbekannte

$$y = \frac{3}{2} \omega_1{}^2 \frac{\pi^2}{T} \cdot b'' \qquad (b'' \text{ gesucht});$$

setzen wir ferner im Exponenten (Correcturglied) für λ das aus der Beobachtung hervorgegangene 0,00350, beziehungsweise 0,00116 (mit und ohne Cartons), so ist allgemein

$$\lambda_N = x + y \cdot e^{-2\lambda\tau_N : T}$$

Wegen $\tau_n : T$ siehe § 16; dabei kann oder muss vielmehr noch für den ersten Fall $N = 1$ der ganze Exponent als Null angesehen werden. Für N = 2 kommt alsdann $e^{-53\lambda}$ in die vorige Formel; für N = 3 kommt $e^{-2.53\lambda}$ u. s. w.

Auf diese Art erhält man

I. Mit Cartons	II. Ohne Cartons
$0{,}00454 = x + y$	$0{,}00121 = x + y$
$0{,}00417 = x + y \,.\, 0{,}67989$	$0{,}00121 = x + y \,.\, 0{,}600$
$0{,}00392 = x + y \,.\, 0{,}46225$	$0{,}00120 = x + y \,.\, 0{,}360$
$0{,}00377 = x + y \,.\, 0{,}31428$	$0{,}00119 = x + y \,.\, 0{,}216$
$0{,}00366 = x + y \,.\, 0{,}21368$	$0{,}00117 = x + y \,.\, 0{,}1294$
$0{,}00359 = x + y \,.\, 0{,}14518$	$0{,}00116 = x + y \,.\, 0{,}0776$
$0{,}00354 = x + y \,.\, 0{,}09877$	

Subtrahiert man unter I die erste und letzte, zweite und vorletzte, dritte und drittletzte Gleichung und versieht die so entstehenden Gleichungen beziehungsweise mit den Faktoren oder Gewichten 3, 2, 1, so erhält man nach Addition der drei letzteren Gleichungen

$$y = 0{,}00109$$

und x oder das gesuchte Enddekrement λ wird alsdann gleich 0,00343, während 0,00350 das letzte beobachtete Dekrement ist.

Der Unterschied beider beträgt geradezu 2 Prozent; um ebensoviel ist die am Schlusse von § 10 berechnete Grösse von n zu verringern; also wird n = 0,000 002 83, oder mit Weglassung der letzten unsicheren Stelle

$$n = 0{,}000\,002\,8.$$

Aus dem vorhin angegebenen Werte von y berechnet sich ferner

$$b'' = 0{,}0403$$

als der Coeffizient des Correcturgliedes des Gesammtwiderstandes bei den Versuchen I des § 12.

Auf analoge Weise ergiebt sich der entsprechende Coefficient aus den sechs Gleichungen unter II; nur mit dem Unterschiede, dass bei der Combination der ersten und sechsten, zweiten und fünften, dritten und vierten Gleichung die Gewichtsfaktoren 5, 3, 1 anzuwenden sind. Das betreffende b″ beträgt

$$0{,}0019;$$

der Unterschied der beiden letzten Zahlen

$$0{,}0384$$

stellt die Constante des Correcturgliedes $b'' \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3$ vor, welches dem von den beiden Cartons allein herrührenden Luftwiderstande $(H - H')\frac{d\omega}{dt}$ oder $2(\alpha - \alpha')\mu\frac{d\omega}{dt}$ zugehört. (s. § 6 u. 14).

§ 21. Endgültige Berechnung des Luftwiderstandes: Es war im § 6 das Moment des Luftwiderstandes $(H - H')\frac{d\omega}{dt}$, und nach dem Widerstandsgesetz $W = n . F . v$ (§ 4) zerfällt dasselbe, wenn man einen vertikalen Streifen der beiden Cartons mit ydx und seinen Abstand (Hebelarm) von der Drehaxe mit x bezeichnet in die Elementarteile

$$n . (y\,dx) . \left(\frac{x\,d\omega}{dt}\right) . x; \text{ also}$$

$$H - H' = n\int x^2 . y\,dx \quad \text{oder nach § 14}$$

$2(\alpha - \alpha')\mu =$ n mal dem Trägheitsmomente der beiden Cartonflächen

$= n . 2\pi\varrho^2 . \left(a^2 + \frac{\varrho^2}{4}\right)$, wenn a den Abstand des Centrums eines Cartons von der Drehaxe und ϱ den

Radius also $\pi\varrho^2$ die Fläche eines Cartons bedeutet. Deshalb war im § 6, 8, 10

$$n = \frac{(\alpha - \alpha')\mu}{\pi\varrho^2 . (a^2 + \frac{\varrho^2}{4})}$$ gesetzt worden (a = 10 Centim. ϱ = 2,8, auch 1,4 u. 4,2).

Analog ist nun für das Correcturglied des Luftwiderstandes $0{,}0384 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3$ (s. § 20) zu setzen, wenn n' die gesuchte Constante für die Einheiten der Fläche und Geschwindigkeit (Centimeter und Sekunde) in Grammen bedeuten soll,

$$0{,}0384 . \mu . \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = n' \int (y\,dx) \left(x \frac{d\omega}{dt}\right)^3 . x, \quad \text{oder}$$

$$0{,}0384 . \mu = n' \int x^4 . y\,dx$$

worin jetzt nach § 10 zu rechnen ist $\mu = 41{,}3$, und das Integral auf die beiden Kreisflächen $\pi . 4{,}2^2$ im Abstande ihrer Centra von der Drehaxe a = 10 zu beziehen. Folglich ist

$$0{,}0384 . 41{,}3 = n' . 2 . \pi\varrho^2 . \left(a^4 + \frac{3}{2} a^2\varrho^2 + \frac{\varrho^4}{8}\right), \quad \begin{array}{l} a = 10 \\ \varrho = 4{,}2 \end{array}$$

$$\text{oder} \qquad n' = 0{,}000\,001\,12$$

und das Gesetz für den Luftwiderstand ist

$$\begin{aligned} W &= F . (n v + n' v^3) \\ &= F . v\,(0{,}000\,002\,8 + 0{,}000\,001\,1 . v^2) \end{aligned}$$

oder nahezu

$$W = 0{,}000\,002\,8 . F . v . \left(1 + \frac{2}{5} . v^2\right)$$

mit den Einheiten Gramm, Centimeter, Sekunde.

§ 22. Es entsteht noch die Frage, welche Maximal-Geschwindigkeit bei unserem Torsionspendel (§ 10 u. 12) vorgekommen ist, wegen der Gültigkeitsgränze der so eben bestimmten numerischen Coeffizienten (vielleicht auch der ganzen Gesetzesform).

In § 16 wurde die Anfangselongation $\omega_1 = 0{,}11$ Centim. (im Abstande 1 von der Drehaxe) angegeben. Dieser Weg wurde zurückgelegt in $\frac{T}{4}$ oder 1,43 Sekunden (§ 12), so dass als mittlere Geschwindigkeit $\omega_1 \cdot \frac{4}{T}$ oder 0,08 sich ergäbe. Aber die Maximalgeschwindigkeit ergiebt sich aus $\omega = \omega_1 \sin \varrho t$, (§ 14) also $\frac{d\omega}{dt} = \omega_1 \varrho \cos \varrho t$ für $\varrho t = 0$, wobei $\varrho = \frac{2\pi}{T}$; dieselbe ist demnach $\omega_1 \frac{2\pi}{T}$ und wird aus der mittleren Geschwindigkeit durch Multiplikation der letzteren mit $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{11}{7}$ gefunden, das ist 0,126 oder ungefähr $^1/_8$ Centimeter. Da die Cartons am Hebelarm 10 sich befanden, so bewegten sich ihre Mittelpunkte mit der Geschwindigkeit von höchstens $1\,^1/_4$ Centimeter.

Hienach ist einstweilen die Giltgkeitsgränze des Resultates von § 21 zu bemessen.

Beispielsweise wird, wenn

$v < {}^1/_4$	Centim.,	$W =$	$0{,}000\,002\,8$ F. v
$v = {}^1/_4$	"	"	29 "
$v = {}^1/_2$	"	"	31 "
$v = {}^3/_4$	"	"	34 "
$v = 1$	"	"	39 "

§ 23. Die Ergebnisse des Vorigen lassen sich schliesslich in folgender Weise zusammenfassen:

1. Aus der kritischen Beleuchtung der Abhandlung von Cornu und Baille zogen wir im § 4 und 5 das Resultat, dass

für die kleinen Geschwindigkeiten in ihrer Drehwage der Gesammtwiderstand der zwei Cylinder (Luftwiderstand im engeren Sinne und Luftreibung) 2 bis 3 Milliontel Gramme betrug pro 1 Quadratcentimeter Fläche (F) und 1 Centimeter Geschwindigkeit (v). Die faktische Geschwindigkeit betrug aber im höchsten Falle nicht einmal $1/200$ Centimeter. Dabei ist das Gesetz

$$W = n \,.\, F \,.\, v.$$

supponiert.

Ueber die von beiden Autoren mit dem Quadrate der Amplitude erweiterte Differentialgleichung ist im § 11 und 17 die Rede gewesen.

2. Wir fanden für den Luftwiderstand zweier Cartonflächen, deren Grössen wir in den Verhältnissen 1 zu 4 zu 9 abänderten, bei den kleineren Geschwindigkeiten, oder wenn die logarithmischen Dekremente nahezu konstant waren, für $W = n\, F \,.\, v$ unter Zugrundlegung der nämlichen Einheiten Gramm, Centimeter, Sekunde

$$n = 0{,}000\,003 \text{ angenähert.}$$

S. die §§ 6, 7, 8, 10.

3. Wir verglichen diese Constante des Luftwiderstandes im engsten Sinne des Wortes mit derjenigen der Luftreibung nach dem konventionellen und noch beide nach dem absoluten Masssystem, s. § 9.

4. Wenn dagegen die logarithmischen Dekremente nicht mehr konstant waren, sondern merklich abnahmen, so versuchten wir, nachdem die Ersetzung des Sinus der Amplitude durch diese selbst als statthaft sich erwiesen hatte (§ 13), das Widerstandsgesetz

$$W = F \,.\, (av + bv^2),$$

s. § 14, 15, 16,

5. mussten aber dieses durch dasjenige

$$W = F.(nv + n'v^3)$$

ersetzen, im § 18, 19, 20, 21, wobei n den in Nro. 2 angegebenen Wert hat und n′ ungefähr $\frac{1}{3}$ von n ist.

6. Die nach dem Pendelgesetze variable Geschwindigkeit betrug bei unsern Versuchen höchstens 1 ¼ Centimeter, s. § 22. —

Weiteres hierüber behalten wir uns, wenn die Umstände günstig sind, vor.