Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen II. Ordnung.

Von **E. von Weber.**

(Eingelaufen 5. November.)

Die reellen Erzeugenden der Flächen eines reellen konfokalen Systems II. Ordnung besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass die zwei konjugierten Minimalebenen, die durch je eine dieser Geraden gehen, alle Systemflächen berühren. Aus dieser Bemerkung fliesst nun, wie wir im folgenden zeigen wollen, eine Methode, um das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen II. Ordnung auf die einfachste und natürlichste Weise reell-geometrisch zu deuten, d. h. also alle komplexen Raumgebilde, die in der algebraisch-projektiven Theorie des konfokalen Systems eine Rolle spielen, der unmittelbaren Anschauung und der elementar-geometrischen Konstruktion zugänglich zu machen.

Den Ausgangspunkt bilden einige Sätze aus der Geometrie der Speere (§ 1), die ich an anderer Stelle[1]) begründet habe. Da die ∞^2 orientierten Erzeugenden der Systemflächen ein elliptisches Gebilde (§ 2) darstellen, so ergeben sich viele unserer Sätze durch einfache dualistische Übertragung der von A. Clebsch[2]) und A. Harnack[3]) mit Hilfe der elliptischen Funktionen gewonnenen, von A. Voss[4]) und H. Schröter[5]) direkt begründeten

[1]) „Die komplexen Bewegungen." Lpz. Ber., 1903, p. 384.

[2]) J. f. Math., 63, p. 94 u. 189.

[3]) Math. Ann., 12, p. 47.

[4]) Math. Ann., 10, p. 143.

[5]) Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve IV. Ordnung, 1. Spezies. Lpz. 1890.

Theoreme über Raumkurven IV. Ordnung erster Art (§ 3 und 4). Von neuen Resultaten hebe ich hervor: Die geometrische Darstellung und konstruktive Behandlung der verschiedenen Arten von Systemflächen, insbesondere der nullteiligen und komplexen (§ 3, 4); die Einführung der Henriciflächen (§ 4), die Konstruktion der Minimalerzeugenden und komplexen Nabelpunkte (§ 5), die Betrachtung der zyklischen Quadrupel und Speervierseite (§ 6), ferner einige, wie ich glaube, neue Sätze über die Krümmungskreise des Kegelschnitts (§ 7), endlich mehrere auf die Striktions- und Mittelfläche bezügliche Ergebnisse (§ 7), durch die unsere Untersuchung mit der differentiellen Liniengeometrie und der Theorie der Minimalflächen zusammenhängt.

§ 1. Speere und Zyklen.

1. Sind $u\,v\,w\,\tilde{\omega}$ komplexe Konstante, die der Bedingung

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

genügen, ohne dass $u\,v\,w$ gleichzeitig verschwinden, so stellt die Gleichung

$$(1) \qquad u\,x + v\,y + w\,z + \tilde{\omega} = 0$$

in rechtwinkligen Koordinaten $x\,y\,z$ eine Minimalebene dar, die mit ihrer konjugierten eine im Endlichen liegende reelle Gerade g gemein hat. Diese betrachten wir als Trägerin zweier orientierter Gerader oder „Speere“ (Study), und ordnen der Minimalebene (1) denjenigen dieser Speere zu, der die Richtungskosinus:

$$\frac{v'\,w'' - w'\,v''}{\varrho}, \quad \frac{w'\,u'' - u'\,w''}{\varrho}, \quad \frac{u'\,v'' - v'\,u''}{\varrho}; \quad (\varrho = u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

besitzt.[1]) Vermöge dieser Verabredung ist jedem Speer σ des Raums eine Minimalebene (σ) umkehrbar eindeutig zugewiesen, so dass wir $u\,v\,w\,\tilde{\omega}$ auch als „Koordinaten des Speers σ“ bezeichnen können. Konjugierten Minimalebenen entsprechen entgegengesetzte, parallelen Minimalebenen syntaktische (d. i.

---

[1]) Es ist $u = u' + i\,u''$ etc. gesetzt.

gleichgerichtete) Speere. Jedes Bündel syntaktischer Speere repräsentiert einen und nur einen Punkt des unendlich fernen Kugelkreises, den wir im folgenden mit $\varkappa_\infty$ bezeichnen.

2. Ein komplexer Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$a + i\,a', \quad b + i\,b', \quad c + i\,c'$$

kann reell repräsentiert werden durch den „Pfeil $[A\,A']$", d. h. die Strecke mit dem „Anfangspunkt" $A\,(a\,b\,c)$ und dem „Endpunkt" $A'\,(a + a', \ b + b', \ c + c')$ oder auch (nach E. Laguerre)[1]) durch den Ort aller reellen Punkte, die von P die Entfernung null haben, nämlich durch den Kreis mit dem Zentrum A, dessen Ebene zur Geraden $A\,A'$ senkrecht und dessen Radius r gleich der Strecke $A\,A'$ ist; diesen Kreis $\varkappa$ versehen wir mit einer Umlaufsrichtung, die von A' aus betrachtet ebenso erscheint, wie von einem Punkte der positiven z-Achse aus betrachtet die Umdrehung, durch welche die $+x$-Achse auf dem kürzesten Wege in die $+y$-Achse übergeführt wird. Die Speere der ∞^2 Minimalebenen, die durch den Punkt P gehen, sind dann die Erzeugenden der ∞^1 konfokalen einschaligen Rotationshyperboloide, die den Kreis $\varkappa$ zur Fokalkurve haben; jede dieser Erzeugenden ist so orientiert, dass ihre Projektion auf die Ebene von $\varkappa$ den Punkt A in dem gleichen Sinne umkreist wie $\varkappa$ selbst. Unter diesen Speeren befinden sich auch die im selben Sinne wie $\varkappa$ orientierten Tangenten dieses Kreises. Diese ∞^2 Speere sollen uns künftig neben dem Kreis $\varkappa$ und dem Pfeil $[A\,A']$ als reelle Repräsentation des komplexen Raumpunktes P dienen; wir bezeichnen diesen Inbegriff von ∞^2 Speeren als einen „Zyklus", $[A\,A']$ als den zugehörigen Pfeil, die reelle Verbindungslinie $A\,A'$ der konjugiert komplexen Punkte $P\,\bar{P}$ als die „Achse", A als das „Zentrum", $\varkappa$ als den „Äquator", r als den „Radius" des Zyklus. Der entgegengesetzte Zyklus, der aus dem Gegebenen durch Umkehrung des Sinnes aller Speere hervorgeht, reprä-

[1]) Nouv. Ann. (2), 11 (1872), p. 14—21, 108—118, 241—254.

sentiert den konjugierten Punkt $\bar{P}$; der zugehörige Pfeil $[A A'']$ liegt so, dass A die Strecke $A' A''$ halbiert.

3. Ist P reell, so reduziert sich der zugehörige Zyklus auf das Speerbündel durch P. Ein „ausgearteter Zyklus" besteht aus zwei verschiedenen Bündeln syntaktischer Speere und repräsentiert einen nicht auf $\varkappa_\infty$ liegenden reellen oder komplexen unendlich fernen Punkt, je nachdem die beiden Bündel entgegengesetzt sind oder nicht.

4. Ist ein Speer σ und ein reeller Punkt A gegeben, so erfüllen die Endpunkte A' der Pfeile $[A A']$, welche je einen komplexen Punkt der Minimalebene (σ) repräsentieren, deren zugehörige Zyklen also den Speer σ enthalten, eine Gerade h, die folgendermassen konstruiert wird: Bedeutet B den Fusspunkt der von A auf σ gefällten Senkrechten, und wird B' so bestimmt, dass die Strecke $A B'$ senkrecht zur Ebene (A, σ) und gleich $A B$ ist, und dass der Speer σ, die von B nach A weisende und die von A nach B' weisende Richtung in analogem Sinne aufeinander folgen wie die positive x-, y-, z-Richtung unseres Koordinatensystems, dann ist h die durch B' parallel zu σ gezogene Gerade.

5. Eine Gerade g, die den Kreis $\varkappa_\infty$ nicht trifft, liegt auf 2 verschiedenen Minimalebenen $(\sigma)(\tau)$; sie kann also durch das zugehörige Speerpaar reell repräsentiert und demgemäss als „die Gerade (σ, τ)" bezeichnet werden. Ist g reell, also σ und τ entgegengesetzt, so werden die komplexen Punkte von g repräsentiert durch den Inbegriff der Pfeile $[A A']$, die ganz auf g liegen.

Ist g hochimaginär, d. h. ohne reelle Punkte, so liegen σ und τ nicht in derselben reellen Ebene; ist die Gerade g niederimaginär, also in einer reellen Ebene e gelegen, und liegt ihr reeller Punkt M im Endlichen, so schneiden sich die Speere σ, τ in ihm. In beiden Fällen erfüllen die Anfangspunkte A der ∞^2 Pfeile $[A A']$, durch welche die auf g liegenden komplexen Punkte repräsentiert werden, eine Ebene e, die „Mittelebene" der Speere σ, τ. Diese Ebene geht durch die Gerade, die sowohl σ als τ senkrecht schneidet, und bildet mit σ und τ

gleiche Winkel, so zwar, dass die Vertikalprojektionen von σ und τ auf e antitaktisch sind. Die Endpunkte A' erfüllen eine zu e parallele Ebene e'. Wenn σ, τ und A gegeben sind, wird A' nach Nr. 4 als Schnitt zweier Gerader gefunden.

Ist g hochimaginär, so bilden die ∞^2 reellen Geraden AA' eine Linienkongruenz (1, 1), die die beiden konjugiert komplexen Geraden $g\bar{g}$ zu Leitlinien hat. Bedeutet g eine niederimaginäre Gerade, so koinzidiert e' mit e, und g ist ganz in der reellen Ebene e enthalten.

Liegt der reelle Punkt M der niederimaginären Geraden g im Unendlichen, dann und nur dann sind die Speere σ und τ antitaktisch und gehen beide durch M hindurch. Die Anfangspunkte A der ∞^2 Pfeile $[AA']$, welche die Punkte von g repräsentieren, erfüllen jetzt die reelle Gerade h, die mit σ und τ in derselben reellen Ebene ε liegt, ihnen parallel läuft und von beiden Speeren denselben Abstand hat. Die Endpunkte A' liegen auf einer zu h parallelen Geraden, die mit h zusammen auf einer zu ε senkrechten Ebene e liegt. Diese letztere Ebene bezeichnen wir in diesem Falle als die „Mittelebene" der Speere σ, τ.

6. Ist g eine Minimallinie, d. h. trifft sie den Kreis $\varkappa_\infty$, so geht nur eine doppelt zählende Minimalebene (σ) durch sie hindurch. Die Anfangs- bezw. Endpunkte der ∞^2 Pfeile $[AA']$, die zu den komplexen Punkten von g gehören, erfüllen wiederum zwei parallele, zu σ senkrechte Ebenen e, e'. Danach kann eine hochimaginäre Minimalgerade reell repräsentiert werden durch einen Speer σ und einen auf ihm liegenden Pfeil $[M_0 M]$; die Ebenen e und e' stehen in den Punkten M_0 bezw. M auf σ senkrecht. Koinzidiert M mit M_0, also e' mit e, so erhält man eine niederimaginäre Minimalgerade, deren reeller Punkt M_0 ist und die von der Minimalebene (σ) aus der zu σ senkrechten, durch M_0 gehenden reellen Ebene e ausgeschnitten wird. Die Figur (σ, $M_0 M$) resp. (σ, M_0) nennen wir die „reelle Repräsentation" unserer Minimallinie.

Projiziert man also den Pfeil $[AA']$ eines komplexen Punktes P senkrecht auf einen Speer σ des zugehörigen Zyklus und sind M_0, M die betreffenden Fusspunkte, so ist (σ, $M_0 M$)

eine durch P gehende Minimallinie; berührt der Speer σ den Äquator in M_0, so erhält man insbesondere eine durch P gehende niederimaginäre Minimalgerade (σ, M_0).

Zwei Minimalebenen, deren Speere σ, τ syntaktisch sind, schneiden sich in einer Tangente t des Kreises $\varkappa_\infty$, und irgend zwei Speere desselben syntaktischen Bündels definieren also dieselbe unendlich ferne Gerade t.

7. Drei Speere $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ bestimmen einen sie enthaltenden Zyklus (den Schnittpunkt der Minimalebenen (σ_i)), der mit $(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3)$ bezeichnet werde. Sein Zentrum A ist der Schnittpunkt der Mittelebenen der drei Speerpaare $(\sigma_i\ \sigma_\varkappa)$, worauf A' nach Nr. 4 gefunden wird. Nur der Fall, dass die 3 Speere derselben reellen Ebene parallel laufen, erfordert besondere Konstruktionen.[1]) Die Annahme, dass zwei der σ_i syntaktisch sind, führt auf ausgeartete Zyklen.

8. Um den Schnittpunkt $[A\,A']$ einer gegebenen Minimalgeraden $(\sigma, M_0\,M)$ mit einer gegebenen Minimalebene (τ) zu finden, konstruiere man die parallelen Ebenen e und e', welche die Anfangs- bezw. Endpunkte der zu der Geraden (σ, τ) gehörigen Pfeile enthalten (Nr. 5), ferner die Ebenen e_0 und e_0', die im Punkte M_0 bezw. M auf σ senkrecht stehen. Ist h die Schnittlinie der Ebenen e, e_0, h' diejenige der Ebenen e', e_0', so ist der Ort der Endpunkte der Pfeile, welche zu Punkten der Geraden (σ, τ) gehören und deren Anfangspunkte auf h liegen, eine in e' gelegene Gerade h'', die aus h' den Punkt A' ausschneidet; A ergibt sich dann mittels der Bemerkung, dass die Punktreihen h und h'' ähnlich sind.

Zwei Zyklen P, Q haben einen oder zwei Speere gemein, je nachdem die Gerade $P\,Q$ den Kreis $\varkappa_\infty$ trifft oder nicht. Auf die elementar-geometrische Konstruktion dieser Speere kann hier nur verwiesen werden.[2])

---

[1]) Vgl. meine Arbeit, Lpz. Ber., 1903, p. 393 f.

[2]) Lpz. Ber., 1903, p. 392.

§ 2. Das konfokale Speersystem als elliptisches Gebilde.

9. Ist ein reelles konfokales System Σ

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \; (a^2>b^2>c^2>0)$$

vorgelegt, so werden die ∞^2 „Speere des Systems Σ" oder orientierten Erzeugenden der in (1) enthaltenen einschaligen Hyperboloide, d. h. also alle Minimalebenen, die der Relation

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = \bar{\omega}^2$$

genügen, durch die Formeln definiert:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varrho u &= 1 - k\, sn^2 \varphi; & \varrho v &= i(1 + k\, sn^2 \varphi) \\ \varrho w &= -2 \,|\sqrt{k}|\, sn \varphi; & \varrho \bar{\omega} &= |\sqrt{a^2-b^2}|\, cn \varphi \cdot dn \varphi, \end{aligned}$$

worin das Argument φ eine unabhängige komplexe Variable bedeutet, während der Modul k der elliptischen Funktionen $sn \varphi$, $cn \varphi$, $dn \varphi$ unter Gebrauch der Abkürzung:

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{a^2 - b^2}$$

durch die Gleichung:

$$k = \left| \sqrt{\alpha - |\sqrt{\alpha^2 - 1}|} \right|$$

bestimmt ist. Die Perioden von $sn \varphi$ bezeichnen wir wie üblich mit $4K$, $2iK'$.

10. Der durch (2) definierte Speer des Systems Σ werde kurz der „Speer φ" genannt;[1] zwei Speere φ, ψ sind dann und nur dann identisch, wenn $\varphi \equiv \psi$.[2] Der zu dem Speer φ entgegengesetzte Speer hat das Argument $-\bar{\varphi} + iK'$. Aus dem Speer φ erhält man durch Umwendung um die x-, y- und z-Achse bezw. die Speere

---

[1] Die Buchstaben φ, ψ, χ reservieren wir für die Argumente der elliptischen Funktionen, die Buchstaben σ, τ, $\bar{\omega}$ zur Bezeichnung der Speere selbst.

[2] Das Kongruenzzeichen bezieht sich, wenn nichts anderes bemerkt wird, auf die Moduln $4K$, $2iK'$.

$$\varphi + i K', \ \varphi + 2K + iK', \ \varphi + 2K,$$

ferner durch Spiegelung an den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und am Koordinatenanfangspunkt O bezw. die Speere

$$\bar{\varphi} + 2K, \ \bar{\varphi}, \ \bar{\varphi} + iK', \ \bar{\varphi} + 2K + iK'.$$

Vier Speere $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ liegen zyklisch, d. h. die betreffenden Minimalebenen gehen durch einen Punkt, dann und nur dann wenn $\Sigma \varphi_i \equiv 0$. Damit also die Speere $\varphi' + i\varphi''$, $\psi' + i\psi''$ einen reellen Punkt gemein haben, ist notwendig und hinreichend, dass sie mit ihren entgegengesetzten zusammen einen Zyklus bilden, dass also

$$\varphi'' + \psi'' \equiv 0 \text{ oder } K' \pmod{2K'}.$$

11. Die 4 Quadranten der xy-Ebene, welche bezw. von der $+x$- und $+y$-Achse, der $-x$- und $+y$-Achse, der $-x$- und $-y$-Achse, endlich der $+x$- und $-y$-Achse begrenzt werden, bezeichnen wir mit I, II, III, IV. Ferner nennen wir einen Speer nach oben oder unten gerichtet, je nachdem er die xy-Ebene in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wie die positive z-Richtung durchsetzt. Endlich sagen wir, ein Speer umwindet die z-Achse positiv oder negativ, je nachdem seine Vertikalprojektion auf die xy-Ebene dem Sinne nach mit der Drehrichtung, die die $+x$-Achse auf dem kürzesten Weg in die $+y$-Achse überführt, übereinstimmt oder nicht.

Bezeichnet man ferner die 4 Intervalle:

$$0 \ldots K \ldots 2K \ldots 3K \ldots 4K$$

bezw. mit $a'\, b'\, c'\, d'$, und die Intervalle

$$0 \ldots \frac{K'}{2} \ldots K' \ldots \frac{3K'}{2} \ldots 2K'$$

mit $a''\, b''\, c''\, d''$, so ergibt sich folgende Tabelle:

$(a'a'')$ (II + −);	$(b'a'')$ (I + −);	$(c'a'')$ (IV + −);	$(d'a'')$ (III + −)
$(a'b'')$ (II − −);	$(b'b'')$ (I − −);	$(c'b'')$ (IV − −);	$(d'b'')$ (III − −)
$(a'c'')$ (III − +);	$(b'c'')$ (IV − +);	$(c'c'')$ (I − +);	$(d'c'')$ (II − +)
$(a'd'')$ (III + +);	$(b'd'')$ (IV + +);	$(c'd'')$ (I + +);	$(d'd'')$ (II + +).

Die Zusammenstellung $(d' b'')$ (III — —) besagt z. B.: wenn die reelle Zahl φ' mod. $4\,K$ einem Wert zwischen $3\,K$ und $4\,K$, und φ'' mod. $2\,K'$ einem Wert zwischen $\frac{K'}{2}$ und K' kongruent ist, dann und nur dann schneidet der Speer $\varphi' + i\varphi''$ die xy-Ebene in einem Punkte des Quadranten III, ist nach unten orientiert und umwindet die z-Achse negativ.

12. Auch die Fälle, in denen φ' oder φ'' einer Viertelsperiode gleich ist, können aus obiger Tabelle unmittelbar abgelesen werden. So ergibt sich:

Numeriert man die Quadranten, in die die xz-Ebene durch die x- und z-Achse zerlegt wird, analog wie die der xy-Ebene, so ist der Speer mit dem reellen Argument φ' eine nach oben gerichtete Tangente der Fokalhyperbel von Σ, deren Berührpunkt im Quadranten I, II, III oder IV liegt, je nachdem die Zahl φ' dem Intervall $b'\,d'\,a'\,c'$ angehört. Die Speere, welche die Fokalellipse berühren und die z-Achse negativ bezw. positiv umwinden, sind bezw. durch Argumente der Form $\frac{1}{2}\,i\,K' + \varphi'$, $\frac{3}{2}\,i\,K' + \varphi'$ gekennzeichnet. Der Speer mit dem rein imaginären Argument $i\,\varphi''$ schneidet die negative x-Achse senkrecht; er ist nach oben oder unten gerichtet, je nachdem φ'' in den Intervallen $a''\,d''$ oder $b''\,c''$ liegt, und umwindet die z-Axe positiv oder negativ, je nachdem φ'' den Intervallen $a''\,b''$ oder $c''\,d''$ angehört u. s. w. f.

13. Wir bezeichnen mit 1 und 2 die nach oben gerichteten Speere, die die Fokalhyperbel in den Endpunkten der $-x$- resp. $+x$-Achse berühren, mit 3 und 4 die nach oben orientierten Asymptoten dieser Hyperbel, die mit der $-x$- resp. $+x$-Achse je einen spitzen Winkel bilden, ferner mit 5 6 7 8 die Speere, die die z-Achse positiv umwinden und die Fokalellipse bezw. in den Endpunkten der Halbachsen $+x$, $+y$, $-x$, $-y$ berühren, endlich durch darüber gesetzte Querstriche die jedesmal entgegengesetzten Speere. Dann findet man für die Speere $1\;\bar{1}\;2\;\bar{2}\;3\;\bar{3}\;4\;\bar{4}$ die Argumentwerte:

$0,\ i\,K',\ 2\,K,\ 2\,K + i\,K',\ -K,\ K + i\,K',\ K,\ -K + i\,K';$

und für die Speere $5\,\bar{5}\,6\,\bar{6}\,7\,7\,8\,\bar{8}$ die folgenden:

$$2K - i\frac{K'}{2},\ 2K + i\frac{K'}{2},\ -K - i\frac{K'}{2};\ K + i\frac{K'}{2},\ -i\frac{K'}{2},\ i\frac{K'}{2}$$

$$K - i\frac{K'}{2},\ -K + i\frac{K'}{2}.$$

Diese 16 „ausgezeichneten" Speere entsprechen dualistisch den 16 Wendeberührpunkten der Raumkurve IV. Ordnung.[1])

§ 8. Involutorische Speertransformationen.

14. Lässt man jedem Argumentwert φ ein ψ vermöge der Formel

(1) $$\varphi + \psi = C$$

entsprechen, so erhält man eine involutorische Transformation $\mathfrak{R}$, die das Speersystem Σ in sich überführt; die so definierten ∞^1 Speerpaare φ, ψ repräsentieren die Erzeugenden einer Regelschar II. Ordnung des konfokalen Systems,[2]) die wir kurz als die „Regelschar C oder $\mathfrak{R}$" bezeichnen wollen, während C der „Argumentwert" dieser Schar und ψ der „Begleitspeer des Speeres φ in Bezug auf die Regelschar C" heissen möge. Die „adjungierte", d. h. auf derselben F_2 liegende Schar ist durch den Argumentwert $-C$ charakterisiert. Die einzelne Fläche II. Ordnung des konfokalen Systems wird demnach mit $\pm C$ zu bezeichnen sein. Kongruente Werte von C (und nur solche) liefern dieselbe Regelschar.

15. Der Zusammenhang zwischen dem Argumentwert C einer Regelschar und dem Parameter λ der zugehörigen F_2 (Nr. 9) wird durch die Formel

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2}\,(cn\,\gamma\; dn\,\gamma + k\,sn^2\,\gamma)$$

hergestellt, wo $\gamma = C - iK'$ gesetzt wurde. Die konfokale Flächenschar selbst erscheint so als elliptisches Gebilde auf

---

[1]) H. Schröter, „Grundzüge", § 11.

[2]) A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 71 ff.

einer über der komplexen λ-Ebene ausgebreiteten zweiblätterigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigungspunkte den 4 ausgearteten Flächen des Systems entsprechen. Diese sind: der nullteilige Fokalkegelschnitt, die Fokalhyperbel, die Fokalellipse und der Kreis $\varkappa_\infty$; sie gehören bezw. zu den Argumentwerten:

$$2K + iK', \; iK', \; 0, \; 2K.$$

Die ∞^2 komplexen Tangenten eines Fokalkegelschnitts werden also definiert durch die ∞^2 Paare von Speeren des Systems Σ, die sich auf der betreffenden Hauptebene schneiden und dieselbe zur Mittelebene (Nr. 5) haben. Die ∞^2 Paare syntaktischer Speere des Systems Σ repräsentieren die unendlich fernen Tangenten des Kreises $\varkappa_\infty$ (Nr. 6 a. E); die beiden Träger eines solchen Paares gehen durch Spiegelung am Koordinatenanfang O auseinander hervor.

Wir wollen die Transformationen, die den Speer φ bezw. in die Speere

$$-\varphi + 2K + iK', \; -\varphi + iK', \; -\varphi, \; -\varphi + 2K$$

verwandeln, mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ resp. bezeichnen; sie entstehen, indem man den zu φ entgegengesetzten Speer bezw. an den Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ und an O spiegelt.

16. Durch zwei gegebene Speere σ, τ des Systems Σ ist eine die komplexe Gerade (σ, τ) enthaltende Regelschar $\mathfrak{R}$ des konfokalen Systems eindeutig bestimmt. Um den Speer τ_1 zu konstruieren, der vermöge der Transformation $\mathfrak{R}$ einem gegebenen Speer σ_1 des Systems entspricht, verstehe man unter $(\sigma_i' \tau_i')$ die Speerpaare, die aus (σ, τ) vermöge der Transformationen $\mathfrak{A}_i$ hervorgehen. Diese Paare sind i. A. verschieden; sie reduzieren sich dann und nur dann auf bloss zwei verschiedene, wenn τ aus σ durch Spiegelung an O oder an einer der Hauptachsen hervorgeht, und definieren Gerade der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Regelschar. In allen Fällen ist τ_1 der zweite gemeinsame Speer der Zyklen $(\sigma\, \sigma_i'\, \tau_i')$. Ebenso ergibt sich die Lösung der Aufgabe: Wenn drei beliebige Speere $\sigma\, \sigma'\, \sigma''$ des Systems Σ gegeben sind, den vierten Speer σ''' zu finden, den der Zyklus

$(\sigma\,\sigma'\,\sigma'')$ mit dem Speersystem Σ gemein hat. Es ist nämlich σ''' der zweite gemeinsame Speer der Zyklen $(\sigma_i\,\sigma_i'\,\sigma'')$, wenn $\sigma_i\,\sigma_i'$ das Speerpaar bedeutet, das aus $\sigma\,\sigma'$ durch die Transformation $\mathfrak{A}_i$ entsteht.

17. Die Regelschar $\mathfrak{R}$ der Nr. 14 liegt auf einer reellen Fläche des konfokalen Systems, wenn C eine der vier Formen

$$C',\ C' + iK',\ iC'',\ 2K + iC''$$

besitzt, wo C', C'' reelle Konstante bedeuten. Die beiden ersten Formen gehören zu den ovalen Flächen des Systems, und zwar die erste zu den Ellipsoiden, die zweite zu den zweischaligen Hyperboloiden. Durch die dritte Form der Konstanten C sind die einschaligen Hyperboloide, durch die vierte die nullteiligen Flächen des Systems definiert. Nur die ovalen Flächen des Systems besitzen niederimaginäre Erzeugende, und alle Erzeugende einer solchen Fläche sind niederimaginär; die zugehörigen ∞^2 Speerpaare sind dadurch gekennzeichnet, dass die beiden Speere σ, τ eines solchen Paares sich in je einem Punkte der ovalen Fläche schneiden und daselbst entweder beide aus dem Innern der Fläche austreten oder beide in dasselbe eintreten, je nachdem die komplexe Gerade (σ, τ) dem einen oder andern Erzeugendensystem der Fläche angehört.

18. Den Inbegriff der ∞^1 Speere, deren Argumentwerte die Form $i\varphi'' + \varrho$ besitzen, wo φ'' eine reelle Konstante, ϱ eine reelle Variable bedeutet, nennen wir eine „Kette 1. Art". Diese Kette umwindet die z-Achse positiv oder negativ, je nachdem φ'' mod. $2K'$ den Intervallen $a''\,b''$ oder $c''\,d''$ angehört, und ist nach oben oder unten orientiert, je nachdem φ'' in den Intervallen $a''\,d''$ oder $b''\,c''$ liegt (Nr. 11). Die entgegengesetzte Kette wird durch $i(\varphi'' + K') + \varrho$ dargestellt. Die Ketten 1. Art, die in der Regelschar iC'' enthalten sind, werden durch die Ausdrücke

$$\varrho + \tfrac{i}{2}(C'' + K')$$

definiert. Alle übrigen ∞^2 Erzeugenden einer solchen Regelschar, ferner alle Erzeugenden der nullteiligen und komplexen Flächen des konfokalen Systems sind hochimaginär.

19. Bewegt sich der Speer φ auf einer reellen Regelschar $i\,D''$, so beschreibt sein Begleitspeer in Bezug auf die Schar $i\,C''$ wiederum eine Regelschar mit dem Argumentwert $i\,(2\,C'' - D'')$. Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Satzes: Liegt die komplexe Gerade (σ, τ) auf der Regelschar C, und sind σ_1, τ_1 die Begleitspeere von σ, τ in Bezug auf die Regelschar C_0, so liegt die komplexe Gerade (σ_1, τ_1) auf der Regelschar D, wo C und D durch die Relation

$$C + D = 2\,C_0 \tag{2}$$

verknüpft sind, d. h. die Speertransformation $\varphi + \psi = C_0$ begründet eine involutorisch-eindeutige Transformation des in Nr. 15 genannten elliptischen Gebildes in sich. Hierbei bleiben vier Regelscharen fest, die bezw. die Argumentwerte

$$C_0,\; C_0 + i\,K',\; C_0 + 2\,K,\; C_0 + 2\,K + i\,K' \tag{3}$$

besitzen.

20. Der Übergang von einer beliebigen Regelschar C_0 zu einer der drei übrigen Regelscharen (3) ist mit einer involutorischen Transformation der Flächen (nicht bloss der Regelscharen) des konfokalen Systems unter sich äquivalent. Die so definierten Involutionen nennen wir $J_1\, J_2\, J_3$; die zugehörigen Transformationsgleichungen des Parameters λ (Nr. 9) entstehen aus:

$$\lambda\,\lambda' - (\lambda + \lambda')\,a^2 + a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2 = 0 \tag{J_1}$$

durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $a\;b\;c$. Bei der Involution J_1 bleiben fest: das einschalige Hyperboloid $\pm i\,\frac{K'}{2}$ und die nullteilige Fläche $\pm\left(2\,K + i\,\frac{K'}{2}\right)$; bei der Involution J_2 das Ellipsoid $\pm K$ und das zweischalige Hyperboloid $\pm(K + i\,K')$; endlich bei J_3 die beiden konjugiert komplexen Flächen $\pm\left(K + \frac{iK'}{2}\right)$ und $\pm\left(K - i\,\frac{K'}{2}\right)$. Diese drei Flächenpaare sind die „Voss'-

schen Flächen"[1]) des konfokalen Systems. Die Involutionen $J_1\, J_2\, J_3$ bilden mit der Identität zusammen eine Vierergruppe; jede einzelne derselben vertauscht die beiden adjungierten Regelscharen auf jeder ihrer Fixflächen, und die zwei Flächen eines jeden der beiden andern Paare.

Die Voss'schen Flächen können auch durch die Eigenschaft charakterisiert werden, dass die beiden involutorischen Transformationen der Systemflächen, welche bezw. zu den beiden Regelscharen einer Voss'schen Fläche gehören (Nr. 19), identisch werden.

§ 4. Die Henriciflächen.

21. Wir betrachten jetzt die Speertransformation $\mathfrak{S}$, welche durch eine Gleichung der Form

$$\psi = \varphi + C \qquad (\mathfrak{S})$$

dargestellt wird.[2]) Die ∞^2 Speerpaare φ, ψ, die dieser Relation genügen, definieren die Erzeugenden einer Linienfläche VIII. Ordnung und Klasse, die durch Umwendung um jede der drei Hauptachsen in sich übergeht und als die „Henricifläche C oder $\mathfrak{S}$" bezeichnet werde. Zu entgegengesetzten oder kongruenten Werten von C (und nur zu solchen) gehört dieselbe Henricifläche. Die Speertransformation $\mathfrak{S}$ ist mit jeder andern Transformation dieser Art vertauschbar, führt also jede Henricifläche in sich über, während sie jede Regelschar D des konfokalen Systems in eine andere Regelschar D' nach dem Gesetz

$$D' = D + 2C$$

transformiert.

Die Aufgabe, den Speer ψ_1 zu bestimmen, der einem gegebenen φ_1 vermöge einer Transformation $\mathfrak{S}$ entspricht, von der zwei einander entsprechende Speere φ, ψ gegeben sind, lässt sich auf die der Nr. 16 mittels der Bemerkung zurückführen, dass der Speer ψ_1 Begleitspeer des Speeres $-\varphi_1$ in

[1]) A. Voss, Math. Ann., 10, p. 143 ff., § VI.

[2]) Vgl. A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 77.

Bezug auf eine Regelschar II. Ordnung ist, von der die Begleitspeere $-\varphi$ und φ gegeben sind, sowie dass der Speer $-\varphi$ aus φ und ebenso $-\varphi_1$ aus φ_1 durch die Transformation $\mathfrak{A}_3$ hervorgeht (Nr. 15).

22. Die Henricifläche $C' + i\,C''$ besitzt i. A. keine reelle, dagegen zwei verschiedene Systeme von je ∞^1 niederimaginären Erzeugenden. Die reellen Punkte der letzteren erfüllen die beiden Raumkurven IV. Ordnung γ_1 und γ_2, wonach das einschalige Hyperboloid $+(C'' + K')\,i$ von dem Ellipsoid $\pm C'$ bezw. dem zweischaligen Hyperboloid $+(C' + i\,K')$ geschnitten wird; diese Raumkurven enthalten alle reellen Punkte der Fläche. Die letztere hat zu Doppelkurven die vier Kegelschnitte, welche resp. von den Flächen II. Ordnung mit den Argumentwerten:

$$\pm(C + 2\,K + i\,K'); \;\; +(C + i\,K'); \;\; +C; \;\; \pm(C + 2\,K)$$

aus den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene ausgeschnitten werden. Ausserdem hat die Henricifläche mit jeder der vier Hauptebenen noch die vier Geraden gemein, die den Fokalkegelschnitt in den Punkten berühren, wo er von dem betreffenden Doppelkegelschnitt getroffen wird.

23. Die Henricifläche C ist dann und nur dann reell, wenn C eine der vier Formen:

$$i\,C'', \; i\,C'' + 2\,K; \; C'; \; C' + i\,K'$$

besitzt, wo C', C'' reelle Konstante bedeuten. Die Flächen der drei ersten Kategorien sind nullteilig (ohne reelle Gerade) und besitzen je zwei nullteilige und zwei einteilige Doppelkegelschnitte, sonst keine reellen Punkte.

Jede Fläche der vierten Kategorie enthält ∞^1 reelle Gerade; sie ist zweiteilig, d. h. sie besteht aus zwei reellen Mänteln, welche sich längs einer zur Fokalellipse konfokalen Hyperbel, längs einer zur Fokalhyperbel konfokalen Ellipse, endlich längs einer zum nullteiligen Fokalkegelschnitt konfokalen Ellipse wechselseitig durchdringen, und besitzt ausser den reellen nur hochimaginäre Erzeugende. Die orthogonalen

Trajektorien der Erzeugenden sind Raumkurven IV. Ordnung; ängs einer jeden der letzteren durchdringen sich je ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid des konfokalen Systems. Denkt man sich eines der konfokalen einschaligen Hyperboloide als bewegliches Stabmodell unter Festhaltung der drei Achsen deformiert, so erhält man der Reihe nach alle konfokalen einschaligen Hyperboloide, während der einzelne Stab den einen Mantel einer Henricifläche[1]) beschreibt. Das Gleichungspaar

$$\frac{y}{\sqrt{b^2-\lambda}}+\frac{z}{\sqrt{\lambda-c^2}}=\varrho\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2-\lambda}}\right);$$

$$1-\frac{x}{\sqrt{a^2-\lambda}}=\varrho\left(\frac{y}{\sqrt{b^2-\lambda}}-\frac{z}{\sqrt{\lambda-c^2}}\right)$$

stellt bei konstantem ϱ und variabelem λ die ∞^1 Erzeugenden einer Henricifläche dar.

Den Werten iK', $2K+iK'$, $2K$ der Konstanten C entsprechen drei „spezielle" Henriciflächen vierter Ordnung,[2]) welche bezw. die x-, die y- und die z-Achse zu Doppellinien haben. Die zugehörigen Speertransformationen $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ sind bezw. die Umwendung um die x-, y- und z-Achse. Die Henricifläche $\mathfrak{S}_x$ enthält zwei getrennte reelle Teile, bestehend aus den Geraden des konfokalen Systems, die die negative bezw. positive x-Achse senkrecht schneiden, die Fläche $\mathfrak{S}_y$ dagegen nur einen reellen Teil, bestehend aus allen Systemgeraden, die die y-Achse senkrecht schneiden; $\mathfrak{S}_z$ endlich ist eine nullteilige Fläche.

24. Bezeichnet man als „Kette 2. Art" den Inbegriff aller Speere mit den Argumentwerten $\varphi+i\varrho$, wo φ eine Konstante, ϱ eine reelle Variable bedeutet, so liegen auf einer Henrici-

[1]) Diese Bezeichnung wurde gewählt, weil bekanntlich Henrici diesen Vorgang zuerst beschrieben hat. Vgl. indessen die ältere Literatur bei W. Fr. Meyer, Schriften der phys.-ökon. Ges. Königsberg, Bd. 41 (1900), p. [24].

[2]) A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 79 $C=0$ gibt die Minimal developpable Γ; vgl. § 5.

fläche der Kategorie $C' + iK'$ zwei Paare entgegengesetzter Ketten 2. Art:

$$\pm \tfrac{1}{2} C' + i\varrho; \quad \pm \tfrac{1}{2} C' + 2K + i\varrho$$

und jede Kette $\varphi' + i\varrho$ ist auf einer und nur einer Henricifläche $2\varphi' + iK'$ gelegen.

Die spezielle Fläche $\mathfrak{S}_x$ enthält die beiden verschiedenen Ketten $i\varrho$ und $2K + i\varrho$, welche bezw. den zwei reellen Bestandteilen der Fläche entsprechen und unter allen Ketten 2. Art allein die Eigenschaft haben, zu jedem Speer auch den entgegengesetzten zu enthalten. Die Fläche $\mathfrak{S}_y$ trägt zwei entgegengesetzte Ketten 2. Art.

25. Ist ein Speer σ des Systems gegeben, $\varphi' + i\varphi''$ sein Argumentwert, so kann man die Speere σ', σ'' mit den Argumenten φ' bezw. $i\varphi''$ sofort konstruieren. Denn σ' und σ'' liegen mit σ auf derselben Kette 2. bezw. 1. Art. Ist also P der Punkt, wo σ die xy-Ebene schneidet, so trifft σ' die negative x-Achse in einem Punkte der durch P gehenden, zur Fokalellipse konfokalen Ellipse, und σ'' schneidet die x-Achse da, wo sie von dem durch P gehenden, zur Fokalellipse konfokalen Hyperbelast getroffen wird. Da ferner aus der Lage von σ die Intervalle, in denen die Zahlen φ' und φ'' liegen, sofort ermittelt werden können, so sind die Speere σ', σ'' nach Nr. 12 vollkommen bestimmt.

Durch Umkehrung dieses Verfahrens kann man, wenn die Speere φ' und $i\varphi''$ gegeben sind, den Speer $\varphi' + i\varphi''$ eindeutig konstruieren. Diese Aufgabe ist auch ein Spezialfall der folgenden: zu zwei gegebenen Speeren φ, ψ den Speer $\varphi + \psi$ zu finden; sie wird gelöst, indem man den Begleitspeer des Speeres 0 (Nr. 13) in Bezug auf die Regelschar $C = \varphi + \psi$ aufsucht (Nr. 16).

26. Aus den Sätzen der Nr. 17 und 24 folgt unmittelbar: Die Begleitspeere eines gegebenen Speers σ in Bezug auf alle einschaligen Hyperboloide des konfokalen Systems Σ erfüllen die Kette 2. Art, die den zu σ entgegengesetzten Speer enthält. Die Begleitspeere von

σ in Bezug auf die ∞^1 nullteiligen Flächen des Systems bilden die Kette 2. Art, die aus der vorigen durch Umwendung um die z-Achse entsteht. Beide Ketten liegen auf verschiedenen Mänteln derselben zweiteiligen Henricifläche, die den Speer σ enthält.

Nach Nr. 17 können wir hinzufügen:

Die Begleitspeere von σ in Bezug auf alle Ellipsoide des Systems erfüllen die Kette 1. Art, deren Speere von σ geschnitten werden und mit σ übereinstimmend nach oben oder unten gerichtet sind. Die Begleitspeere von σ in Bezug auf die zweischaligen Hyperboloide bilden die zu der vorigen entgegengesetzte Kette.

27. Ist von der einen Regelschar $\mathfrak{R}$ eines einschaligen Hyperboloids eine komplexe Erzeugende (σ, τ) gegeben, so dass die Speere σ, τ die zu Anfang der vorigen Nummer angegebene Lage besitzen, so erwächst die Aufgabe, die Regelschar selbst, d. h. also eine ihrer reellen Geraden zu konstruieren. Dazu genügt es offenbar, von der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Schar $\mathfrak{R}'$ die beiden reellen Erzeugenden g und g' zu ermitteln, die die x-Achse senkrecht schneiden. Zu diesem Zwecke wählen wir zwei beliebige Speere σ_1, σ_2 des Systems Σ, die die negative x-Axe senkrecht schneiden, und bestimmen nach Nr. 16 ihre Begleitspeere τ_1 bezw. τ_2 in Bezug auf $\mathfrak{R}$, die die negative x-Achse ebenfalls senkrecht treffen (Nr. 23 und 26). Nun bilden die reellen Treffgeraden der komplexen Linie $(\sigma_i\, \tau_i)$ eine Linienkongruenz (1, 1), diejenigen unter ihnen, die überdies die x-Achse senkrecht schneiden, also eine sofort konstruierbare paraboloidische Regelschar. Die Geraden g, g' erweisen sich sonach als Schnittlinien zweier bekannter Regelscharen II. Ordnung, die sich ausserdem in der x-Achse und der unendlich fernen Geraden der yz-Ebene durchsetzen.[1])

[1]) Diese Konstruktion ist übrigens linear, nicht quadratisch, da g und g' durch Umwendung um die z-Achse auseinander hervorgehen.

§ 5. Doppelspeere und Nabelpunkte.

28. Wir kehren zur Betrachtung der involutorischen Speertransformation $\mathfrak{R}$:

$$\varphi + \psi = C$$

zurück. Es gibt zwei und nur zwei entgegengesetzte Ketten 1. Art:

$$\tfrac{1}{2}\, C \pm \tfrac{1}{2}\, i\, K' + \varrho$$

der Eigenschaft, dass jeder Speer der einen vermöge $\mathfrak{R}$ in einen Speer der andern übergeht; sie erfüllen die reelle Regelschar $\mathfrak{R}_1$ mit dem Argumentwert $i\, C''$, wo $C = C' + i\, C''$ gesetzt wird. Ferner gibt es zwei und nur zwei (ebenfalls entgegengesetzte) Ketten 1. Art:

$$\tfrac{1}{2}\, C + \varrho, \; \tfrac{1}{2}\, C + i\, K' + \varrho,$$

die vermöge $\mathfrak{R}$ je in sich übergehen. Sie erfüllen die reelle Regelschar $\mathfrak{R}_2$ mit dem Argument $i\,(C'' + K')$, die der Schar $i\, C''$ vermöge der Involution J_1 entspricht (Nr. 20). Jede dieser Ketten enthält zwei Speere

$$\tfrac{1}{2}\, C, \; \tfrac{1}{2}\, C + 2\, K \text{ bezw. } \tfrac{1}{2}\, C + i\, K', \; \tfrac{1}{2}\, C + i\, K' + 2\, K, \quad (1)$$

die vermöge $\mathfrak{R}$ fest bleiben. Diese Speere, die „Doppel- oder Fixspeere der Transformation $\mathfrak{R}$“, gehen aus einem unter ihnen durch Umwendung um die drei Hauptachsen hervor, und jedes solches System von vier Speeren ist Fixspeersystem einer ganz bestimmten Regelschar C. Wir nennen solche vier Speere ein Quadrupel.[1]) Zur adjungierten Regelschar $-C$ gehört ein Quadrupel, das aus dem ebengenannten hervorgeht, indem man irgend einen der Speere (1) den vier Transformationen $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_4$ (Nr. 15) unterwirft.[2])

29. Die vier Fixspeere einer Regelschar, die auf einem Ellipsoid (zweischaligen Hyperboloid) unseres konfokalen Systems liegt, berühren die Fokalhyperbel (= ellipse) in den

[1]) Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten, bes. H. Schröter, a. a. O., § 8.

[2]) Vgl. H. Schröter, a. a. O.

Punkten, wo sie von der Fläche geschnitten wird, d. h. in den reellen Nabelpunkten, und treten daselbst entweder alle vier aus der Fläche aus oder alle vier in dieselbe ein.

Die vier Doppelspeere einer reellen, auf dem einschaligen Hyperboloid H gelegenen Regelschar $\mathfrak{R}$ sind paarweise entgegengesetzt, also auf zwei reellen Geraden g, g' gelegen, die die x-Achse senkrecht schneiden und durch Umwendung um die z-Achse auseinander hervorgehen; sie liegen auf dem einschaligen Hyperboloid H', das dem H vermöge der Involution J_1 zugeordnet ist, und zwar auf derjenigen Regelschar desselben, die die z-Achse entgegengesetzt umwindet wie die Regelschar $\mathfrak{R}$. Das unter den sechs Voss'schen Flächen enthaltene einschalige Hyperboloid ist also dadurch ausgezeichnet, dass die beiden Doppelspeerpaare jeder auf ihm liegenden Regelschar jedesmal der andern Regelschar angehören.

Die Doppelspeere einer nullteiligen Regelschar $\mathfrak{R}$ liegen ebenfalls paarweise auf zwei reellen Geraden g, g', die die y-Achse senkrecht treffen und demjenigen einschaligen Hyperboloid angehören, das aus $\mathfrak{R}$ durch die Involution J_3 (Nr. 20) entsteht.

Betrachtet man daher die Doppelspeere als Repräsentanten der zugehörigen Regelscharen unseres konfokalen Systems Σ, so werden die Ellipsoide durch die Tangenten der Fokalhyperbel, die zweischaligen Hyperboloide durch die der Fokalellipse, die einschaligen Hyperboloide durch die Speere der speziellen Henricifläche $\mathfrak{S}_x$, endlich die nullteiligen Flächen durch die der Fläche $\mathfrak{S}_y$ (Nr. 23) repräsentiert.

30. Unter den Erzeugenden jeder Regelschar $\mathfrak{R}$ finden sich vier Minimalgerade; die durch sie gehenden Minimalebenen werden bezw. durch die Doppelspeere von $\mathfrak{R}$ repräsentiert.

Jeder Speer σ oder φ unseres Systems Σ ist Doppelspeer einer ganz bestimmten Regelschar $\mathfrak{R}$ mit dem Argumentwert 2φ. Wir fragen nun nach der reellen Repräsentation (σ, $M_0 M$)

der auf der Minimalebene (σ) gelegenen Minimalerzeugenden von $\mathfrak{R}$, d. h. also der Minimalgeraden, längs deren die Ebene (σ) ihre Enveloppe berührt. Damit erhalten wir die reelle Repräsentation für die ∞^2 Erzeugenden und die ∞^4 Punkte der Minimaldeveloppabeln Γ, die unserm konfokalen System umschrieben ist.

31. Die gesuchte Minimalgerade, die mit $[\sigma]$ bezeichnet werde, ist Ort der Punkte, wo die Minimalebene (σ) die Flächen des Systems berührt. Bedeuten also σ_1 und σ_1' die Begleitspeere von σ in Bezug auf irgend zwei adjungierte Regelscharen, so repräsentiert der Zyklus $(\sigma\,\sigma_1\,\sigma_1')$, der mit Σ den Speer σ doppelt zählend gemein hat, einen Punkt der Geraden $[\sigma]$.

Sei k einer der im Endlichen liegenden Fokalkegelschnitte, P_0 der Punkt, wo σ die Ebene von k trifft, Q_0 der auf dem Durchmesser $O\,P_0$ liegende Punkt, der von P_0 durch k harmonisch getrennt ist, g die durch Q_0 gehende Polare von P_0 in Bezug auf k, endlich σ' der zweite durch P_0 gehende Speer des Systems Σ, der so orientiert ist, dass die Ebene von k Mittelebene des Speerpaares $(\sigma\,\sigma')$ wird. Die Gerade $(\sigma\,\sigma')$ ist dann Tangente von k, ihr komplexer Berührpunkt liegt auf g, sein Pfeil also ebenfalls, und zwar ist der Anfangspunkt offenbar Q_0, während sein Endpunkt Q durch die Konstruktion der Nr. 4 gefunden wird. Der Pfeil $[Q_0\,\bar{Q}]$ des komplexen Punktes, in dem die zu $(\sigma\,\sigma')$ konjugiert komplexe Gerade $(\bar{\sigma}\,\sigma')$ den Kegelschnitt k berührt, liegt dann so, dass Q_0 die Mitte der Strecke $Q\,\bar{Q}$ wird; offenbar sind die Punkte Q und $\bar{Q}$ auch dadurch bestimmt, dass sie hinsichtlich k konjugiert und zu Q_0 symmetrisch auf g liegen.

Bedeuten nun $M_0\,M$ und $M_0'\,M'$ die Vertikalprojektionen der Punkte $Q_0\,Q$ auf σ bezw. σ', so sind $(\sigma,\,M_0\,M)$ bezw. $(\sigma',\,M_0'\,M')$ die reellen Repräsentationen der beiden Minimalgeraden $[\sigma]$ und $[\sigma']$.[1]) Der komplexe Punkt mit dem Pfeil

---

[1]) Diese Konstruktion lässt sich in der Weise verallgemeinern, dass man unter k eine ovale Fläche von Σ, unter g die Polare der reellen

$[Q_0\, Q]$ ist der Schnittpunkt dieser zwei Geraden, also einer der drei auf der Minimalgeraden $[\sigma]$ im Endlichen liegenden Nabelpunkte der Fläche II. Ordnung, zu deren Regelscharen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die Doppelspeere σ, σ' gehören. Bedeutet $\bar{\sigma}$ den zu σ entgegengesetzten Speer, so besitzt die Minimalgerade $[\bar{\sigma}]$ die reelle Repräsentation $(\bar{\sigma}, M_0\, \bar{M})$, und es ist M_0 die Mitte der Strecke $M\,\bar{M}$.

32. Berührt der Speer σ den einteiligen Fokalkegelschnitt k, so koinzidieren die Punkte $M_0\, M$ in den Berührungspunkt, d. h. also in einen der reellen Nabelpunkte der ovalen Fläche, zu der σ als Doppelspeer gehört. Durch Umwendung um die beiden in der Ebene von k liegenden Hauptaxen gehe der Speer σ in σ' bezw. σ'', der Punkt M_0 in M_0', M_0'' über; ist dann $\varkappa'$ der orientierte Kreis, der σ in M_0 und $\bar{\sigma}'$ in M_0' berührt, ferner $\varkappa''$ der Kreis, der den Speer σ in M_0 und $\bar{\sigma}''$ in M_0'' berührt, so werden durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ die beiden andern auf der Minimalgeraden (σ_0, M_0) gelegenen Nabelpunkte unserer ovalen Fläche dargestellt. Daraus folgt nebenbei die Tatsache, dass jede der beiden Serien von doppelt berührenden Kreisen eines Kegelschnitts k komplexe Punkte eines zu k „fokalen" Kegelschnitts repräsentiert.

33. Der Punkt M_0, der in der reellen Repräsentation $(\sigma, M_0\, M)$ der Minimalgeraden $[\sigma]$ auftritt, ist, wie man durch Rechnung oder durch die weiter unten (Nr. 49) angestellte Überlegung findet, der „Striktionspunkt" der reellen Geraden, auf der σ liegt, d. h. durchläuft σ eine reelle Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}$ des konfokalen Systems, so beschreibt M_0 die Striktionslinie von $\mathfrak{R}$. Aus Nr. 32 ergibt sich also folgende einfache Konstruktion der Striktionslinie einer Regelschar II. Ordnung: Ist P_0 der Punkt, wo eine beliebige Erzeugende h der Schar eine der Hauptebenen e schneidet, Q_0 der auf dem Durchmesser $O\, P_0$ liegende

Geraden $(\sigma\, \bar{\sigma})$ in Bezug auf k, unter P_0 den Schnittpunkt der Geraden $(\sigma\, \bar{\sigma})$ mit der Ebene (O, g) versteht. Dann ist $[Q_0\, Q]$ der Punkt, wo die Minimalebene (σ) die Fläche k berührt.

Punkt, der von P_0 durch den in e liegenden Fokalkegelschnitt harmonisch getrennt wird, so ist der Striktionspunkt von h der Fusspunkt der von Q_0 auf h gefällten Senkrechten.

Dieser Satz liefert, auf eine Tangente der Fokalellipse oder -hyperbel angewendet, als Spezialfall die bekannte Tatsache, dass die Tangente und zugehörige Normale eines Kegelschnitts jedes seiner Brennpunktepaare harmonisch trennt.

34. Ist von einer involutorischen Speertransformation $\mathfrak{R}$ einer der Doppelspeere σ gegeben, so kann man sofort beliebig viele weitere Speerpaare von $\mathfrak{R}$ angeben. Denn entsteht $\sigma^{(i)}$ aus σ durch die Transformation $\mathfrak{A}_i$ (Nr. 15), und ist $(\sigma^{(i)}, \underset{\circ}{M^{(i)}} M^{(i)})$ die reelle Repräsentation der Minimalgeraden $[\sigma^{(i)}]$, so ist der Begleitspeer τ' eines gegebenen Speers τ in Bezug auf die Regelschar $\mathfrak{R}$ der zweite gemeinsame Speer der nach Nr. 8 zu konstruierenden Zyklen oder komplexen Punkte, wonach die Minimalebene (τ) die Minimalgeraden $(\sigma^{(i)}, \underset{\circ}{M^{(i)}} M^{(i)})$ schneidet.

Die umgekehrte Aufgabe, von einer Regelschar $\mathfrak{R}$, die durch ein gegebenes Speerpaar definiert ist, die Doppelspeere zu bestimmen, ist trivial, wenn es sich um eine ovale Fläche handelt.

Liegt aber $\mathfrak{R}$ auf einem einschaligen Hyperboloid des konfokalen Systems Σ, so bestimme man zunächst zwei Speere σ, τ, die sich vermöge $\mathfrak{R}$ entsprechen und die negative x-Achse senkrecht schneiden (Nr. 24 und 26), also Argumentwerte der Form $i\varphi''$, $i\psi''$ besitzen. Die Argumentwerte derjenigen beiden Doppelspeere von $\mathfrak{R}$, die ebenfalls die negative x-Achse senkrecht treffen, haben dann die Form $i\chi''$, bezw. $i(\chi'' + K')$, und es ist χ'' durch die Beziehung

$$\varphi'' + \psi'' = 2\chi'' \ (\text{mod. } 2K') \tag{2}$$

definiert. Setzt man nun

$$\varphi_1'' = -\varphi'', \quad \psi_1'' = -\psi'' + K',$$

so gehen die Speere σ_1, τ_1, die den Argumentwerten $i\varphi_1''$ resp.

$i\psi_1''$ entsprechen, aus σ bezw. τ durch Spiegelung an der Ebene $y = 0$ bezw. $z = 0$ hervor, und die Gleichung (1) geht über in:

$$i\varphi_1'' + i\psi_1'' + 2i\chi'' + iK' \equiv 0,$$

d. h. das Speerpaar $i\chi''$, $i(\chi'' + K')$ liegt mit dem Paar $\sigma_1\tau_1$ zyklisch, wird also nach Nr. 27 konstruiert.

Man kann statt dessen auch direkt die zu den Nabelpunkten des einschaligen Hyperboloids H gehörigen Pfeile und dann durch Umkehrung des Verfahrens der Nr. 31 die Doppelspeere von H ermitteln. Ist nämlich k' der Kegelschnitt, den die Fläche H aus der Ebene des einteiligen Fokalkegelschnitts k ausschneidet, so existiert innerhalb des konfokalen Systems, das k' zum Fokalkegelschnitt hat, eine ovale Fläche H', die aus der Ebene von k' den Kegelschnitt k ausschneidet, und die nach Nr. 32 zu konstruierenden, in der Ebene von k liegenden komplexen Nabelpunkte von H' sind mit denen der Fläche H identisch.

35. Um endlich einen Doppelspeer χ der Regelschar $\mathfrak{R}$ zu finden, die durch die Sperre σ, τ mit den Argumentwerten

$$\varphi = \varphi' + i\varphi'', \quad \psi = \psi' + i\psi''$$

definiert ist, konstruiere man nach Nr. 25 zunächst die nach oben orientierten Tangenten σ', τ' der Fokalhyperbel mit den Argumenten φ', ψ', und den einen der beiden nach oben orientierten Doppelspeere der Regelschar, die die komplexe Gerade (σ', τ') enthält, also auf dem durch den Schnittpunkt von σ' und τ' gehenden Ellipsoid des Systems Σ gelegen ist. Bedeutet χ' den (reellen) Argumentwert dieses Doppelspeeres, so hat man

$$\varphi' + \psi' \equiv 2\chi' \pmod{4K}.$$

Ferner ermittele man nach Nr. 25 die Speere σ'' und τ'', die zu den Argumenten $i\varphi''$ und $i\psi''$ gehören, also die negative x-Achse senkrecht schneiden, und bestimme für die reelle Regelschar $i(\varphi'' + \psi'')$ nach Nr. 34 den Doppelspeer, der die negative x-Achse senkrecht schneidet, dessen Argument also die Form $i\chi''$ hat und der Relation (2) genügt. Aus den

Speeren χ' und $i\chi''$ lässt sich dann nach Nr. 25 der Speer mit dem Argument $\chi = \chi' + i\chi''$ sofort konstruieren; dieser ist wegen

$$\varphi + \psi \equiv 2\chi$$

einer der gesuchten Doppelspeere der Regelschar $\mathfrak{R}$.

Die Aufgabe, die Doppelspeere und Nabelpunkte einer vorgegebenen reellen oder komplexen Fläche II. Ordnung unseres konfokalen Systems zu finden, ist durch die Entwickelungen dieses Paragraphen in allen Fällen erledigt.

§ 6. Zyklische Quadrupel und Vierseite.

36. Jeder Zyklus hat mit dem Speersystem Σ vier Speere, ein „zyklisches Quadrupel" gemein; durch irgend drei Speere des Systems ist ein zyklisches Quadrupel bestimmt, dessen vierter Speer nach Nr. 16 gefunden wird. Die zyklischen Quadrupel zerfallen in folgende Kategorien:

a) vier verschiedene Speere;
b) ein doppelt zählender und zwei einfach zählende Speere;
c) zwei je doppelt zählende Speere;
d) ein dreifach und ein einfach zählender Speer;
e) ein vierfach zählender Speer.

37. Die ∞^2 Quadrupel der Kategorie d) definieren die komplexen Punkte, die auf der Rückkehrkante γ der Minimaldeveloppabeln Γ gelegen sind; sie werden in § 7 betrachtet. Die 16 Quadrupel der Kategorie e) werden bezw. durch die 16 ausgezeichneten Speere (Nr. 13) dargestellt. Ist σ insbesondere Scheiteltangente eines Fokalkegelschnitts, P_0 der betreffende Scheitel, k der Fokalkegelschnitt, auf dessen Ebene der Speer σ im Punkte P_0 senkrecht steht, so ist der Zyklus, der mit Σ den vierfach zählenden Speer σ gemein hat, nichts anderes als der Berührpunkt der Minimalebene (σ) mit dem Kegelschnitt k; der Anfangspunkt Q_0 des zugehörigen Pfeils ist also der auf $O\,P_0$ liegende Punkt, der von P_0 durch k harmonisch getrennt wird, während sein Endpunkt Q nach Nr. 31 konstruiert wird.

Ist dagegen σ auf einer Asymptote der Fokalhyperbel gelegen, so ist der Punkt, dessen (ausgearteter) Zyklus mit Σ den Speer σ vierfach zählend gemein hat, der unendlich ferne Berührpunkt der Minimalebene (σ) mit dem Kreis $\varkappa_\infty$.

38. Die ∞^2 Zyklen der Kategorie c) sind die Punkte der vier Fokalkegelschnitte (den Kreis $\varkappa_\infty$ eingerechnet); die zwei verschiedenen Speere eines solchen Zyklus schneiden sich also auf je einer Hauptebene oder sie sind syntaktisch; die zugehörigen Pfeile ergeben sich durch die Konstruktion der Nr. 31.

Die ∞^4 Zyklen b) repräsentieren die Punkte der Minimaldeveloppabeln Γ. Die beiden einfach zählenden Speere σ_1 σ_2 eines solchen Zyklus sind die Begleitspeere des doppelt zählenden Speers σ in Bezug auf zwei adjungierte Regelscharen des konfokalen Systems. Liegt die komplexe Gerade (σ_1 σ_2) auf der Regelschar $\mathfrak{R}$, so ist σ Doppelspeer der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Regelschar $\mathfrak{R}'$. Hält man σ fest, und lässt σ_1 σ_2 nach der obigen Regel variieren, so erhält man die ∞^2 komplexen Punkte der Minimalgeraden [σ] (Nr. 30); lässt man dagegen σ variieren und wählt für σ_1 σ_2 die Begleitspeere von σ in Bezug auf irgend eine feste Fläche II. Ordnung des Systems, so ergeben sich die ∞^2 Punkte der Kurve IV. Ordnung, längs welcher jene Fläche II. Ordnung von den unendlich benachbarten Flächen des Systems geschnitten, also von der Developpabeln Γ berührt wird.

39. Da drei oder vier Speere, die in derselben reellen Ebene liegen, nur dann einem Zyklus angehören, wenn sie den Äquator desselben berühren, so erhält man aus der Annahme, dass die vorhin genannten Speere σ σ_1 σ_2 denselben einteiligen Fokalkegelschnitt berühren, die Regelscharen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ also auf einer ovalen Fläche des Systems liegen, folgenden Satz:

Berührt ein Kreis einen Kegelschnitt k im Punkte M_0, so schneiden sich die beiden übrigen Tangenten, die er mit k gemein hat, auf dem durch M_0 gehenden, zu k konfokalen Kegelschnitt.[1])

40. Sind zwei Flächen II. Ordnung F und G unseres Systems bezw. mit den Argumentwerten $\pm C$ und $\pm D$ gegeben, so existieren ∞^2 Systeme von je vier Speeren $\sigma_1 \ldots \sigma_4$, deren Argumente $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ den Relationen[2])

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varepsilon C; \quad \varphi_2 + \varphi_3 = \eta D; \quad \varphi_3 + \varphi_4 = -\varepsilon C; \quad \varphi_4 + \varphi_1 = -\eta D \quad (1)$$

genügen, wo ε und η unabhängig voneinander die positive oder negative Einheit bedeuten; nach willkürlicher Wahl von σ_1 oder φ_1 erhält man noch vier verschiedene Quadrupel dieser Art. Diese ∞^2 Quadrupel sind zyklisch und repräsentieren die Punkte der Raumkurve IV. Ordnung, wonach sich die Flächen F und G schneiden; lässt man F mit G zusammenfallen, so erhält man die Quadrupel der Nr. 38 wieder.

41. Sind F und G insbesondere ovale Flächen des Systems Σ, so schneiden sich je zwei im Zyklus $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ aufeinanderfolgende Speere eines solchen Quadrupels, und je zwei entgegengesetzte dieser Quadrupel liegen auf demselben räumlichen Vierseit. Man bestätigt jetzt leicht folgende Tatsachen:

Zu zwei konfokalen ovalen Flächen zweiter Ordnung F und G gibt es immer ∞^2 windschiefe Vierseite, von denen je einfach unendlich viele auf jedem zu F und G konfokalen einschaligen Hyperboloid liegen und welche sich auf die Fläche F und G stützen, d. h. je zwei auf F und zwei auf G liegende Gegenecken besitzen. Es gibt immer zwei verschiedene Vierseite dieser Art, welche einen gegebenen reellen Punkt von F oder G zum Eckpunkt haben.

Jedes dieser Vierseite ist auf je einem einschaligen Rotationshyperboloid gelegen;[3]) die ∞^2 Fokalkreise

[1]) Die Punkte, wo diese zwei Tangenten die im Punkte M_0 an k gezogene Tangente treffen, liegen auf einem zweiten zu k konfokalen Kegelschnitt (Nr. 42).

[2]) A. Harnack, a. a. O.

[3]) Es gibt unter diesen Vierseiten einfach unendlich viele, die auf

dieser Hyperboloide sind die Laguerre'schen Repräsentanten für die komplexen Punkte der Raumkurve IV. Ordnung, wonach sich die gegebenen Flächen F und G schneiden.

Damit ein windschiefes, einem dreiachsigen Hyperboloid H angehörendes Vierseit auf einem Rotationshyperboloid[1]) gelegen sei, ist notwendig und hinreichend, dass eines der Gegeneckenpaare auf einer zu H konfokalen (ovalen) Fläche II. Ordnung liege; dann liegt das andere Gegeneckenpaar von selbst auf einer zweiten zu H konfokalen Fläche.

Auf jedem dreiachsigen einschaligen Hyperboloid liegen ∞^3 solcher Vierseite; wird nämlich eine Ecke P_1 und auf einer der durch P_1 gehenden Erzeugenden eine zweite Ecke P_2 willkürlich angenommen, so gibt es noch vier verschiedene Vierseite der genannten Art.

42. Betrachtet man die Schnittkurven unserer ovalen Flächen F und G mit der Ebene der Fokalellipse oder -hyperbel, so erhält man als Spezialfälle der vorstehenden Resultate die folgenden Sätze:

Die drei Gegeneckenpaare des Vierseits, das von den gemeinsamen Tangenten eines Kegelschnitts k und eines Kreises gebildet wird, liegen bezw. auf drei zu k konfokalen Kegelschnitten k_1 k_2 k_3.[2]) Umgekehrt,

---

je zwei verschiedenen Rotationshyperboloiden liegen; durch jedes Gegeneckenpaar eines solchen Vierseits gehen dann je ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid des Systems Σ hindurch. Die Anfangsspeere φ_1, welche zu solchen Vierseiten führen, verteilen sich auf 16 Ketten 2. Art. Vgl. übrigens die dualen Sätze bei Voss und Harnack a. a. O.

[1]) Das windschiefe Vierseit auf dem Rotationshyperboloid ist als Verallgemeinerung des Tangentenvierseits eines Kreises zu betrachten; z. B. gilt für jenes wie für dieses der Satz, dass die Summen der Gegenseitenpaare gleich sind. Für beliebige zyklische Speerquadrupel liefert der Begriff der „Doppeldifferenz" einen allgemeineren Satz (vgl. meine Arbeit, Lpz. Ber., 1903, p. 402 ff.).

[2]) Dieser von Th. Reye (Zürich, Viert. 41 (1895), p. 68 f., Geom. der Lage, p. 181 f.) aufgestellte Satz enthält den der Nr. 39 als Grenzfall; vgl. auch E. Müller, Deutsche Math.-Ver., Ber. 12 (1903), p. 105.

liegen zwei Gegenecken eines Tangentenvierseits von k auf demselben zu k konfokalen Kegelschnitt, so gilt dasselbe von den zwei anderen Eckenpaaren, und das Vierseit ist einem Kreise umschrieben.[1])

Sind ein einteiliger Kegelschnitt k und zwei zu ihm konfokale einteilige Kegelschnitte $k_1\ k_2$ gegeben, von denen keiner ganz im Innern von k liegt, so existieren einfach unendlich viele reelle Kreisvierseite, die k umschrieben sind und sich auf k_1 und k_2 stützen, d. h. je ein auf k_1 liegendes und ein auf k_2 liegendes Gegeneckenpaar besitzen. Zu jedem im Äussern von k liegenden, auf k_1 oder k_2 willkürlich angenommenen Punkt P gibt es zwei verschiedene reelle Vierseite dieser Art, die P zur Ecke haben. Das dritte Gegeneckenpaar liegt dann jedesmal auf einem zu k konfokalen Kegelschnitt k_3, der mit k gleichartig oder ungleichartig ist, je nachdem k_1 mit k_2 ungleichartig oder gleichartig ist, und zwar durchläuft k_3 alle dieser Bedingung genügenden, nicht ganz im Innern von k liegenden Kegelschnitte des konfokalen Systems, wenn das Vierseit die genannte Serie beschreibt.

Aus der Tatsache, dass drei ovale konfokale Flächen II. Ordnung stets acht verschiedene, paarweise konjugiert komplexe Schnittpunkte besitzen, folgt jetzt sofort:

Sind vier einteilige konfokale Kegelschnitte $k_1 k_2 k_3 k_4$ gegeben, worunter drei und nicht mehr gleichartige, und ist keiner der Kegelschnitte $k_1\ k_2\ k_3$ ganz innerhalb k_4 gelegen, so gibt es vier dem Kegelschnitt k_4 umschriebene Kreisvierseite der Eigenschaft, dass die drei Gegeneckenpaare eines jeden derselben bezw. den Kegelschnitten $k_1\ k_2\ k_3$ angehören. Diese Vierseite gehen aus einem unter ihnen durch Spiegelung an den Achsen

---

[1]) M. Chasles, Paris, C. R. 17 (1843), p. 841; das Vierseit kann auch ein Parallelogramm sein, der Kreis also in ein Paar unendlich ferner Punkte ausarten.

hervor. Unter jeder anderen Annahme über die einteiligen konfokalen Kegelschnitte $k_1 \ldots k_4$ gibt es kein reelles Tangentenvierseit der genannten Art.

43. Die Gleichungen

$$\varphi_1 + \varphi_2 = C;\ \varphi_2 + \varphi_3 = -C;\ \varphi_3 + \varphi_4 = C;\ \varphi_4 + \varphi_1 = -C$$

sind nur dann verträglich, wenn $4\,C \equiv 0$. Für eine Voss'sche Fläche (Nr. 20) und nur für eine solche[1]) gibt es also ∞^2 nichtzyklische Quadrupel $\sigma_1 \ldots \sigma_4$ derart, dass je zwei anstossende Speere $\sigma_i\,\sigma_{i+1}$, desselben eine Erzeugende der Fläche repräsentieren. Insbesondere existieren innerhalb des Systems Σ für jede der beiden ovalen Voss'schen Flächen ∞^2 Speervierseite, deren Ecken alle auf der betreffenden ovalen Fläche liegen. Jedes dieser Vierseite ist auf zwei verschiedenen Rotationshyperboloiden gelegen; durch jedes seiner Gegeneckenpaare geht ausser der betrachteten Voss'schen Fläche noch je eine zweite ovale Fläche des konfokalen Systems hindurch, und die Punkte jedes Paares liegen hinsichtlich der z-Achse symmetrisch.

44. Bezeichnet man die Fokalellipse bezw. -hyperbel mit e und h, die Ellipse, die das Voss'sche Ellipsoid aus der xy-bezw. xz-Ebene ausschneidet, mit e', e'', endlich die Hyperbel, die das zweischalige Voss'sche Hyperboloid mit der xy- bezw. der xz-Ebene gemein hat, mit h' resp. h'', so erhält man aus der vorigen Nummer folgende Sätze:

Es gibt ∞^1 Parallelogramme, die der Ellipse e umschrieben und der Ellipse e' eingeschrieben sind, ebenso ∞^1 Parallelogramme, die der Ellipse e umschrieben und der Hyperbel h' eingeschrieben sind. Die Tangenten der Ellipse e in den Punkten, wo sie von h' getroffen wird, sind zu den Asymptoten von h' parallel.

Es gibt ∞^1 Tangentenvierseite der Hyperbel h,

[1]) A. Voss, A. Harnack, a. a. O.

der Eigenschaft, dass je zwei Gegeneckenpaare eines solchen Vierseits auf der Ellipse e'' liegen; und ∞^1 Tangentenvierseite von h, welche die analoge Eigenschaft in Bezug auf die Hyperbel h'' besitzen. Die z-Achse ist Symmetrieachse aller dieser Vierseite und enthält die dritten Gegeneckenpaare derselben. Die Tangenten der Hyperbel h in den Punkten, wo sie von der Ellipse e'' getroffen wird, schneiden sich paarweise in den auf der z-Achse liegenden Scheiteln von e''.

Da durch Angabe der Fokalellipse oder Fokalhyperbel das konfokale System und damit auch die Voss'schen Flächen desselben eindeutig bestimmt sind, so folgt nebenbei der Satz, dass zu jeder Ellipse e (bezw. Hyperbel h) ein und nur ein Paar konfokaler Kegelschnitte $e'h'$ (bezw. $e''h''$) mit den angegebenen Eigenschaften existiert.[1]) Die Kegelschnitte $e'h'$ sind dem von den vier Scheiteltangenten der Ellipse e gebildeten Rechteck umschrieben; die Kegelschnitte e'' und h'' gehen durch die vier Punkte, in denen die Scheiteltangenten der Hyperbel h deren Asymptoten schneiden.

§ 7. Schmiegungsspeer, Striktionsfläche und Mittelfläche.

45. Unter dem „Schmiegungsspeer" eines gegebenen Speers σ mit dem Argument φ verstehen wir den Speer τ mit dem Argumentwert -3φ, also den vierten Speer des zyklischen Quadrupels, welches den Speer σ dreifach zählend enthält. Der Schmiegungsspeer ist stets von σ verschieden, ausser wenn σ mit einem der 16 ausgezeichneten Speere (Nr. 13) zusammenfällt, und schneidet den Speer σ dann und nur dann, wenn dieser Tangente der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist. Der Schmiegungsspeer des Schmiegungsspeers τ koinzidiert

---

[1]) Wegen des Zusammenhangs dieser Resultate mit bekannten Schliessungssätzen vgl. das Referat von F. Dingeldey, Enc. d. math. Wiss., III, C, 1, Nr. 69 u. Fussn. 420.

dann und nur dann mit σ, wenn dieser letztere (und infolgedessen auch τ) Doppelspeer einer der 12 Voss'schen Regelscharen des Systems ist; es gibt also 24 Paare von Speeren, von denen jeder der Schmiegungsspeer des andern ist.[1])

46. Ist (σ, $M_0\, M$) die reelle Repräsentation der Minimalgeraden [σ], längs welcher die Minimalebene (σ) die Developpable Γ berührt (Nr. 30) und kennt man den Schmiegungsspeer τ, so kann der Punkt, in dem die Gerade [σ] von der Minimalebene (τ) geschnitten wird, nach Nr. 8 konstruiert werden; es ist dies der Punkt, wo die Minimalebene (σ) die Rückkehrkante γ der Developpabeln Γ oskuliert, und die Minimalgerade [σ] diese Rückkehrkante berührt.

47. Unter den verschiedenen Methoden, den Schmiegungsspeer τ eines gegebenen Speers σ zu konstruieren, heben wir die folgenden hervor:

a) Sind $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{R}_i'$ beliebige adjungierte Regelscharen des konfokalen Systems Σ, τ_i und τ_i' die Begleitspeere von σ in Bezug auf $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{R}_i'$, ω_i' der Begleitspeer von τ_i in Bezug auf $\mathfrak{R}_i'$, ω_i der von τ_i' in Bezug auf $\mathfrak{R}_i$, so ist der gesuchte Schmiegungsspeer τ der zweite gemeinsame Speer aller Zyklen (σ, ω_i, ω_i').[2]).

Dieser Satz enthält als Spezialfall den folgenden:

b) Ist $\mathfrak{R}$ die Regelschar, die den gegebenen Speer σ zum Doppelspeer hat (Nr. 28), $\mathfrak{R}'$ die dazu adjungierte, so ist τ der Begleitspeer von σ in Bezug auf $\mathfrak{R}'$.

Hieraus folgt insbesondere noch die nachstehende spezielle Konstruktion:

c) Bedeuten $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ die Speere, die aus σ, und $M_0^{(i)}\, M^{(i)}$ die drei Punktepaare, die aus $M_0\, M$ durch Umwendung um die drei Koordinatenachsen hervorgehen, und konstruiert man (nach Nr. 8) die Zyklen der Punkte, in denen die Minimalebene (σ) die drei

[1]) Schröter, a. a. O., p. 80 f.

[2]) H Schröter, „Grundzüge", § 3.

Minimalgeraden $(\sigma_i, M_0^{(i)} M^{(i)})$ trifft, so ist τ der zweite gemeinsame Speer dieser drei Zyklen.

d) Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungsweise ist τ der vierte Speer, den der Zyklus $(\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3)$ mit dem Speersystem Σ gemein hat.

48. Wenn der Speer σ den einteiligen Fokalkegelschnitt k im Punkte M_0 berührt, so ist der Äquator des Zyklus, der mit dem Speersystem Σ den dreifach zählenden Speer σ gemein hat, offenbar nichts anderes, als der zu dem Punkte M_0 gehörige, mit σ übereinstimmend orientierte Krümmungskreis des Kegelschnitts k. Daher liefert jeder der Sätze a) — d) der vorigen Nummer ein entsprechendes Theorem über die Krümmungskreise eines Kegelschnitts.

Zwei Speere, die in der Ebene eines Kegelschnitts k' liegen und sich in einem Punkte P desselben treffen, sollen „gleichartig" heissen, wenn sie im Punkte P beide aus k' austreten oder beide in k' eintreten. Dann gelten die Sätze:

a) Der Speer σ berühre den Kegelschnitt k im Punkte M_0, und es sei $\varkappa$ der mit σ homolog orientierte, zum Punkte M_0 gehörige Krümmungskreis von k. Durch die Punkte $P'\, P''$, in denen σ einen beliebigen zu k konfokalen Kegelschnitt k' schneidet, lege man die zu σ gleichartigen Speere τ' und τ'', die den Kegelschnitt k berühren und k' zum zweitenmal in Q' bezw. Q'' schneiden mögen, ferner durch Q' resp. Q'' die zu τ' bezw. τ'' gleichartigen Speere ω', ω'', die den Kegelschnitt k ebenfalls berühren. Bedeutet dann $\varkappa'$ den orientierten Kreis, der die Speere $\sigma, \omega', \omega''$ zu Tangenten[1]) hat, so ist die vierte gemeinsame Tangente des Kreises $\varkappa'$ und des Kegelschnitts k unabhängig von der Wahl des dazu konfokalen Kegelschnitts k' und identisch mit der einfach zählenden

[1]) Berührung wird dabei in dem Sinne verstanden, dass die Orientierungen der Geraden und des Kreises in dem gemeinsamen Punkte übereinstimmen.

Tangente τ, die der Krümmungskreis $\varkappa$ mit dem Kegelschnitt k ausser σ noch gemein hat.

b) Die dreifach zählende Tangente σ und die einfach zählende Tangente τ, welche der Kegelschnitt k mit seinem im Punkte M_0 oskulierenden Krümmungskreis gemein hat, schneiden sich auf dem durch M_0 gehenden Kegelschnitt, der zu k konfokal ist.

Dieser Satz ist auch in dem Reye'schen Satze der Nr. 42 bezw. in dem der Nr. 39 als Grenzfall enthalten.

c) Der Speer σ berühre den Zentralkegelschnitt k im Punkte M_0, und es seien $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ die Speere, $M_1 M_2 M_3$ die Punkte, die aus σ bezw. M_0 durch Spiegelung an den Achsen von k und an dem Zentrum O hervorgehen. Bezeichnet man dann mit $\varkappa_i$ den orientierten Kreis, der den Speer σ_i im Punkte M_i und den Speer σ berührt,[1]) so haben die drei Kreise $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3$ eine gemeinsame orientierte Tangente τ, welche auch den Kegelschnitt k und den zu M_0 gehörigen, mit σ übereinstimmend orientierten Krümmungskreis $\varkappa$ desselben berührt.

d) Der vorhin genannte Speer τ berührt auch den orientierten Kreis, der die Speere $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ zu Tangenten hat.

Diese Sätze liefern für den Krümmungskreis eines Kegelschnitts Konstruktionen, die an Einfachheit hinter den bekannten nicht zurückstehen.

49. Es sei σ ein beliebiger Speer des Systems Σ, $(\sigma, M_0 M)$ die reelle Repräsentation der Minimalgeraden $[\sigma]$, ferner $[P_0 P]$ der nach Nr. 46 zu konstruierende Pfeil des komplexen Punktes Π, in dem die Gerade $[\sigma]$ die Rückkehrkante γ der Developpabeln Γ berührt. Dann liegen die Punkte P_0 und P bezw. in den reellen Ebenen e_0 und e, die in M_0 bezw. M auf dem Speer σ senkrecht stehen. Durchläuft σ alle Speere des Systems

[1]) Vgl. die vorige Anmerkung.

Σ, so beschreibt der Striktionspunkt M_0 eine Fläche s, die „Striktionsfläche", und P_0 eine Fläche m, die „Mittelfläche" des konfokalen Systems Σ.

Bedeuten σ, σ' zwei unendlich benachbarte Speere desselben Zyklus, so bestätigt man entweder durch Rechnung oder durch direkte Überlegung aufs leichteste, dass der auf σ liegende Fusspunkt der kürzesten Entfernung zwischen σ und σ' mit dem Punkte identisch ist, wo σ die Äquatorebene des Zyklus schneidet. Daraus folgt, dass jede Regelschar, die aus Speeren des Zyklus gebildet wird, die Kurve, wonach sie die Äquatorebene schneidet, zur Striktionslinie hat.

Nun ist der obengenannte Punkt Π der Schnittpunkt dreier aufeinanderfolgender Minimalebenen der Developpabeln Γ, d. h. der Zyklus $[P_0\, P]$ hat mit jeder reellen Regelschar, die aus ∞^1 Speeren des Systems Σ besteht und den Speer σ enthält, drei aufeinanderfolgende Speere $\sigma\, \sigma'\, \sigma''$ gemein. Die Äquatorebene unseres Zyklus enthält also den auf σ liegenden Fusspunkt M_0 der kürzesten Entfernung von σ und σ', sowie den auf σ' liegenden Fusspunkt M'_0 der kürzesten Entfernung zwischen den Speeren σ' und σ''. Damit ist nicht nur die früher aufgestellte Behauptung bewiesen, dass M_0 mit dem „Striktionspunkt" des Speeres σ zusammenfällt, sondern es ist weiterhin gezeigt: „Durchläuft der Speer σ innerhalb des Systems Σ eine beliebige Regelschar, so beschreibt der zugehörige Punkt M_0 die Striktionslinie derselben, m. a. W.: die Striktionskurven aller aus dem System Σ herausgegriffenen reellen Regelscharen liegen auf der Striktionsfläche s."

Die Äquatorebene des Zyklus $[P_0\, P]$ ist mit der Tangentialebene der Striktionsfläche s im Punkte M_0 identisch.

Da sonach die Punkte M_0, M'_0 auf der Aquatorebene des Zyklus $[P_0\, P]$ liegen, so muss nicht nur die Ebene e_0, sondern auch die Ebene e'_0, die im Punkte M'_0 auf dem Speer σ' senkrecht steht, durch das Zentrum P_0 unseres Zyklus hindurchgehen; also folgt:

Die Ebene e_0 ist die Tangentialebene der **Mittelfläche** m im Punkte P_0; d. h. die Mittelfläche ist die Enveloppe der ∞^2 reellen Ebenen, die auf den Speeren des Systems Σ bezw. in deren Striktionspunkten senkrecht stehen.

Die Striktionsfläche s und die Mittelfläche m sind also in folgender Weise umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen: Bedeuten M_0, P_0 zwei entsprechende Punkte auf s bezw. m, so geht die Ebene, die die Fläche s im Punkte M_0 berührt, durch P_0, und die Ebene, die m in P_0 berührt, durch M_0 hindurch.

Die Begriffe „Striktionsfläche" und „Mittelfläche", sowie alle Sätze dieser Nummer lassen sich, wie man sofort erkennt, auf jedes System von ∞^2 Speeren übertragen, welche die oskulierenden Minimalebenen einer ganz beliebigen Minimalkurve γ repräsentieren.

50. Die Striktionsfläche s besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned}
N x &= (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)(a^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(b^2 - c^2);\\
N y &= 2\lambda(\lambda^2 + 1)(b^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(c^2 - a^2);\\
N z &= -2 i \lambda(\lambda^2 - 1)(c^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(a^2 - b^2);\\
N &= (a^2 - \varrho)(c^2 - b^2)(\lambda^2 + 1)^2 + 4\lambda^2(b^2 - a^2)(c^2 - \varrho).
\end{aligned}$$

worin ϱ und λ die beiden unabhängigen Parameter bedeuten. Dabei sind die Kurven $\varrho = C$ die Striktionslinien der ∞^1 Regelscharen II. Ordnung des konfokalen Systems, die Kurven $\lambda = C$ dagegen die der ∞^1 Henricíflächen (Ketten 2. Art). Die Gleichung von s ergibt sich auch durch Elimination von ϱ aus den beiden Relationen:

$$\begin{aligned}
&S y^2 z^2 (a^2 - \varrho)^3 (b^2 - c^2)^2 = 0,\\
&S x^2 (b^2 - \varrho)(c^2 - \varrho) = (a^2 - \varrho)(b^2 - \varrho)(c^2 - \varrho).
\end{aligned}$$

Von der Resultante dieser Gleichungen lässt sich der unwesentliche Faktor $x^2 y^2 z^2$ abspalten. Die Fläche s ist daher von der XII. Ordnung und hinsichtlich der drei Hauptebenen symmetrisch. Jeder der drei Fokalkegelschnitte ist eine Rückkehrkante von s; die Rückkehrtangentialebene in jedem Punkte eines solchen Kegelschnitts ist mit der betreffenden Hauptebene identisch. Die drei Koordinatenachsen sind Doppellinien der Fläche; die vier Punkte, welche jede der drei Achsen mit den Fokalkegelschnitten gemein hat, sind „Klemmpunkte". Ausserdem enthält die Fläche s noch die Asymptoten jedes der drei Fokalkegelschnitte. Der vollständige Schnitt der Fläche s mit einer Hauptebene besteht also aus dem dreifach zählenden Fokalkegelschnitt, dem einfach zählenden Asymptotenpaar und den beiden je doppelt zählenden Achsen desselben.

Die Mittelfläche m ist eine algebraische Minimalfläche und zwar eine sogenannte Doppelfläche;[1]) sie ist nämlich der Ort der Mitten je zweier konjugiert komplexer Punkte der Minimalkurve γ, und hat die Evoluten der drei Fokalkegelschnitte zu geodätischen Linien.[2]) Daraus folgt die von R. Townsend[3]) konstatierte Tatsache, dass die Vertikalprojektion der Kurve γ auf eine Hauptebene mit der Evolute des betreffenden Fokalkegelschnitts identisch ist.

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur la th. gén. des surfaces 1, p. 349.

[2]) Die Resultate der vorliegenden Arbeit lassen sich natürlich sehr leicht auch für das System reeller konfokaler Paraboloide aussprechen; die Mittelfläche m wird in diesem Fall identisch mit der Henneberg'schen Minimalfläche, die die Neil'sche Parabel zur geodätischen Linie hat (vgl. Darboux, a. a. O., Bd. I, p. 352).

[3]) Mess of Math (2), I, 491 (1872).