Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 12. Mai.)

Erster Teil.

Über unendlich kleine Deformationen allgemeinster Art, welche eine Fläche erfahren kann, habe ich bereits vor längerer Zeit einige ganz kurze Andeutungen gegeben,[1]) insbesondere auch damals die partielle Differentialgleichung aufgestellt, von der ebenso wie bei der isometrischen Deformation, die Bestimmung der charakteristischen Funktion der Deformation abhängt. Inzwischen hat auch Herr E. Danièle[2]) diesen Gegenstand behandelt. Die folgenden Betrachtungen deuten eine Reihe von hierauf bezüglichen Fragen an, die sich mit Erfolg behandeln lassen; sie geben insbesondere eine, wie ich glaube, neue Behandlung des allgemeinen Deformationsproblems, welche geeignet scheint, in besonders einfacher Weise mit den unendlich kleinen Deformationen projektive und endliche Umformungen durch „Biegung" zu verbinden.

---

[1]) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, p. 132 (1895).

[2]) Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estensibili, Acc. li Torino, serie 2, tom. 1, p. 26, 1900; es ist wohl natürlich, dass meine Darlegungen in mehreren Punkten mit denen des Herrn Daniele zusammentreffen.

§ 1.

Die allgemeine infinitesimale Flächendeformation.

Sind x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten der Punkte einer Fläche, die auf irgend ein System krummliniger Koordinaten u, v bezogen ist, und bezeichnet man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung durch e, f, g; E, F, G, die Richtungscosinus der Normale mit p, q, r, so bestehen bekanntlich die Gleichungen[1])

$$\text{A)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + A'\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gp, \end{aligned}$$

nebst den analogen, welche durch gleichzeitige Vertauschung von x, E, p mit y, F, q; z, G, r hervorgehen. Dabei ist, wenn

$$eg - f^2 = H$$

gesetzt wird,

$$\text{B)}\qquad \begin{aligned} 2A\ H &= g\frac{\partial e}{\partial u} - 2f\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial e}{\partial v} \\ 2A_1 H &= 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial e}{\partial u} \\ 2B\ H &= g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u} \\ 2B_1 H &= e\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial e}{\partial v} \\ 2C\ H &= 2g\frac{\partial f}{\partial v} - g\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial g}{\partial v} \\ 2C_1 H &= e\frac{\partial g}{\partial v} - 2f\frac{\partial f}{\partial v} + f\frac{\partial g}{\partial u}, \end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. z. B. diese Berichte 1892, p. 231; diese Formeln mussten hier angeführt werden, weil auf dieselben beständig Bezug genommen wird.

ferner

$$\text{C)}\quad \begin{aligned} &B\,F + B_1 G - C\,E - F C_1 + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \\ &B_1 F + B\,E - A_1 G - F A + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

und

$$\text{D)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial u} = L \frac{\partial x}{\partial u} + L_1 \frac{\partial x}{\partial v} \\ &\frac{\partial p}{\partial v} = M \frac{\partial x}{\partial u} + M_1 \frac{\partial x}{\partial v}; \\ &L\ H = Ff - Eg \\ &L_1\ H = Ef - Fe \\ &M\ H = Gf - Fg \\ &M_1 H = Ff - Ge, \end{aligned}$$

$$\text{E)}\quad \begin{aligned} &B + C_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} \\ &B' + A = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u}. \end{aligned}$$

Das Krümmungsmass $\dfrac{EG - F^2}{eg - f^2}$, welches mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung durch eine dritte Gleichung verbunden ist, sei k.

Wird die Fläche einer infinitesimalen Deformation unterworfen, so gehen x, y, z in $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$ über, wo ε eine unendlich kleine Konstante bedeutet. Das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

wird dann den Zuwachs δds^2 enthalten, wobei

$$\delta ds^2 = 2\varepsilon\left(du^2 \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + du\,dv \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + dv^2 \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

wird, falls unter

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \ldots$$

die Ausdrücke

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}, \text{ etc.}$$

verstanden werden. Soll nun die Deformation einen vorgeschriebenen Charakter haben, so setze man

$$\delta\, ds^2 = 2\,\varepsilon\,[P\,du^2 + 2\,Q\,du\,dv + R\,dv^2]\sqrt{H},$$

wobei also P, Q, R irgend welche gegebene Funktionen der u, v sind, oder

$$1)\quad \begin{aligned} &\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = P\sqrt{H} \\ &\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = (Q-\varphi)\sqrt{H} \\ &\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = (Q+\varphi)\sqrt{H} \\ &\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = R\sqrt{H}. \text{ [1]} \end{aligned}$$

Sind P, Q, R gleich Null, so hat man die infinitesimal isometrische Deformation, die infinitesimale Isometrie[2]) mit der charakteristischen Funktion φ; sind die P, Q, R die Fundamentralgrössen erster Ordnung proportional, oder $P = \lambda\, e$, $Q = \lambda f$, $R = \lambda\, g$, so hat man die infinitesimale konforme Deformation; sind die P, Q, R den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung proportional, so hat man

---

[1]) Dieses System von Differentialgleichungen für die ξ, η, ζ geht durch Vertauschung von u, v, P, Q, R, φ mit v, u, R, Q, P, $-\varphi$ in sich über; daher ist in den folgenden Formeln bei Untersuchung von u und v jedesmal φ mit $-\varphi$, P mit R zu vertauschen.

[2]) Zwei Flächen mit denselben Fundamentalgrössen erster Ordnung nenne ich zueinander isometrisch; häufiger werden dieselben als Biegungen voneinander bezeichnet; zu unterscheiden ist von der infinitesimalen Biegung der allgemeine Prozess der infinitesimal-isometrischen Deformation.

$$\delta\, d s^2 = 2\, \varepsilon\, \lambda\, (E\, d u^2 + 2\, F\, d u\, d v + G\, d v^2)$$

er

$$\delta\, d s = \frac{\varepsilon\, \lambda}{\varrho}\, d s$$

nn man mit ϱ den Krümmungshalbmesser des der Richtung ι, $d v$ zugehörigen Normalschnittes bezeichnet, u. s. w.

Die Bestimmung der Komponenten[1]) ξ, η, ζ d. h. der :htwinkeligen Projektionen des Verschiebungsvektors r η, ζ) auf die Koordinaten kann auf dieselbe Weise wie in m speziellen Falle der infinitesimalen Isometrie erfolgen, mlich durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen der fferentialgleichungen 1).

Dabei mag gleich bemerkt werden, dass die Deformationen n Charakter 2) sich sofort erledigen lassen. Setzt man mlich

$$\xi = -\lambda\, p\, \sqrt{H}$$
$$\eta = -\lambda\, q\, \sqrt{H}$$
$$\zeta = -\lambda\, r\, \sqrt{H}$$

o λ eine willkürliche Funktion von u, v ist, so wird

$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda\, E \sqrt{H}$$
$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda\, F \sqrt{H}$$
$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda\, G \sqrt{H}$$

Die Gleichungen 1)

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda\, E \sqrt{H}$$
$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 2\, \lambda\, F \sqrt{H}$$
$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda\, G \sqrt{H}$$

---

[1]) Deformationen mit verschiedenen Komponentensystemen setzen ich selbstverständlich durch Addition zusammen.

gehen daher über in

$$\sum \frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=0$$

$$\sum \frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

d. h. in dem speziellen Fall der isometrischen Deformation. Man erhält daher alle Transformationen vom Charakter 2)[1], wenn man mit einer völlig willkürlichen infinitesimalen Verrückung nach der Normale der Fläche die infinitesimalen isometrischen Deformationen zusammensetzt. Für die Kugel insbesondere, wo die E, F, G den e, f, g proportional sind, sind diese Transformationen konforme: Alle infinitesimalen konformen Deformationen der Kugel ergeben sich durch Zusammensetzung ihrer infinitesimalen isometrischen Deformationen mit einer willkürlichen Verschiebung im Radius.[2])

Die Gleichungen 1) führt man auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die charakteristische Funktion φ zurück. Man erhält durch Differentiation nach v und u aus der ersten und dritten

$$\sum \frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\sum\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial P}{\partial v}\sqrt{H}+P\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial v}$$

$$\sum \frac{\partial^2\xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\sum\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u}=\frac{\partial(Q+\varphi)}{\partial u}\sqrt{H}+(Q+\varphi)\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial u}$$

und durch Subtraktion, falls die zweiten Differentialquotienten der x, y, z nach den Gleichungen A) durch die ersten und zu-

[1]) Es sind dies zugleich diejenigen Deformationen, bei denen die Kurven der Haupttangenten der Fläche ihre Länge nicht ändern.

[2]) Eine Kugelfläche (Ebene) ist auch die einzige Fläche, welche eine infinitesimale konforme Deformation in der Richtung der Normale allein zulässt.

gleich die Werte der $\sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}$ etc. wieder vermöge der Gleichungen 1) ersetzt werden,

$$
3^{a})\qquad \frac{F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - E \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}}
= \frac{\partial P}{\partial v} + P C_1 + R A_1 - 2\, Q B_1 - \frac{\partial (Q + \varphi)}{\partial u},
$$

sowie durch Vertauschung von u und v

$$
3^{b})\qquad \frac{F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) - G \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}}
= \frac{\partial R}{\partial u} + R A + P C - 2\, Q B - \frac{\partial (Q - \varphi)}{\partial v}.
$$

Die beiden Gleichungen 3) drücken aus, dass die Ausdrücke

$$
\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\, \partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial u}
$$

$$
\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\, \partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial v},
$$

identisch verschwinden. Fügt man den Gleichungen 3) noch die Bedingung

$$
4)\qquad \frac{\partial \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\partial v} - \frac{\partial \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right)}{\partial u} = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u}\right)
$$

hinzu, so wird auch

$$
\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\, \partial u}\right) p = 0;
$$

d. h. die Integrabilitätsbedingungen für die Funktionen ξ, η, ζ sind identisch erfüllt (selbstverständlich unter der Voraussetzung $H \neq 0$), so dass dieselben durch Quadratur gefunden werden, sobald φ bestimmt ist. Man erhält aber aus 4) vermöge der Gleichungen D)

5)
$$\frac{\partial \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\varphi}{\sqrt{H}} (Eg + Ge - 2fF) - \frac{1}{\sqrt{H}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix},$$

und nun ergibt sich aus 3) und 4) die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ, sobald man die aus 3^a), 3^b) bestimmten Werte der $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial v}$ in die linke Seite von 5) einträgt.

Setzt man vermöge der Gleichungen E)
$$\frac{\partial P}{\partial v} + P C_1 + R A_1 - 2 Q B_1 - \frac{\partial Q}{\partial u}$$
gleich
$$\frac{\partial P}{\partial v} + P \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} - PB + RA_1 - QB_1 + QA - \frac{\partial Q}{\partial u} - Q \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u},$$
und führt an Stelle der $P\sqrt{H}$, $Q\sqrt{H}$, $R\sqrt{H}$ die Grössen P', Q', R' ein, so wird dieser Ausdruck
$$\frac{1}{\sqrt{H}} \left(\frac{\partial P'}{\partial v} - \frac{\partial Q'}{\partial u} - P' B + R' A_1 - Q' B_1 + Q' A\right).$$

Wird der Zähler desselben durch S bezeichnet, und definiert man dementsprechend
$$T = \frac{\partial R'}{\partial u} - \frac{\partial Q'}{\partial v} - Q' B - R' B_1 + P' C + Q' C_1,$$
so werden die Gleichungen 3^a), 3^b)
$$\frac{E \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) - F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{S}{\sqrt{H}},$$
$$\frac{G \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right)}{\sqrt{H}} = - \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{T}{\sqrt{H}}$$
oder, unter der Voraussetzung, dass k nicht Null ist,

$$6)\quad \begin{aligned}\Sigma\left(p\frac{\partial\xi}{\partial u}\right) &= \frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}}-\frac{SF+ET}{kH}\\ \Sigma\left(p\frac{\partial\xi}{\partial v}\right) &= \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}}-\frac{GS+TF}{kH},\end{aligned}$$

und die partielle Differentialgleichung wird nach 5)

$$7)\quad \frac{\partial\frac{\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}{k\sqrt{H}}}{\partial v}+\frac{\partial\frac{\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{k\sqrt{H}}}{\partial u}-\frac{\partial\frac{FS+ET}{kH}}{\partial v}+\frac{\partial\frac{GS+FT}{kH}}{\partial u}$$
$$=\frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg+Ge-2fF)-\frac{1}{H}\begin{vmatrix}P' & Q' & R'\\ E & F & G\\ e & f & g\end{vmatrix}.\ ^{1})$$

Die Ausdrücke S, T verschwinden, wie ein Blick auf die Codazzi'schen Gleichungen C) zeigt, sobald P' Q' R' durch die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung irgend einer der aus der Fläche F durch Isometrie hergeleiteten Flächen F' ersetzt werden. Von dieser Reduktion der partiellen Differentialgleichung 7), die zugleich eine Beziehung des Problems der infinitesimalen Deformationen mit dem der endlichen Isometrieen enthält, wird später[2]) Gebrauch gemacht werden; hier möge nur gleich ein spezieller Fall hervorgehoben sein. Ist nämlich F eine Fläche, die mit Erhaltung der Krümmungslinien gebogen werden kann, so führt die Aufgabe, alle infinitesimalen Deformationen derselben zu bestimmen, bei denen

$$\delta ds^2 = 2\varepsilon(E'du^2+G'dv^2)\quad ^{3})$$

[1]) Diese Gleichung in abgekürzter Form, Jahresberichte d. D. Math. a. a. O., p. 133, sodann bei Herrn Danièle, a. a. O., p. 53.

[2]) Siehe § 5.

[3]) E', G' sind die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung irgend einer der durch Biegung entstehenden Flächen; als Koordinatensystem der u, v ist das der Krümmungslinien ($f=0$, $F=0$) vorausgesetzt.

wird, auf die Weingarten'sche partielle Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ, welche aus 7) für

$$P' = Q' = R' = 0$$

folgt, aus welcher die Komponenten ξ, η, ζ durch Quadratur bestimmt werden.

§ 2.

Die infinitesimale Deformation der Developpabeln.

Ist die Fläche F developpabel, so lassen sich, da $EG - F^2 = 0$ ist, aus 3[a]) und 3[b]) die $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial v}$ nicht ausdrücken. Man erhält in diesem Falle keine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ. Wenn aber Darboux[1]) diesen Fall als unwesentlich ansieht, weil es sich um den isometrischen Deformationsprozess der Developpabeln handelt, für welche ja von vornherein alle endlichen Biegungen bekannt seien, so scheint mir diese Ausdrucksweise nicht ganz zutreffend. In der Tat müsste dann, da bei jeder endlichen Biegung die Developpabele in eine Developpabele, die Erzeugenden dabei in Erzeugende übergehen, auch bei der infinitesimalen Isometrie die Developpabele in eine unendlich benachbarte Developpabele übergehen, während die allgemeine isometrische infinitesimale Deformation sie in eine Regelfläche verwandelt.

Man kann in diesem Falle folgendermassen verfahren. Denkt man sich von vornherein die developpabele Fläche auf das System ihrer Erzeugenden $v =$ Konst bezogen, so sind E

---

[1]) Herr Darboux sagt, Leçons sur la theorie générale des surfaces, tom. IV, p. 28 geradezu: Comme on sait résoudre le problème de la déformation finie pour toute surface développable, on saura, par cela même résoudre aussi celui de la déformation infiniment petite. Herr Bianchi bezeichnet dagegen (Lezioni di geometria, ed. II, 1903, vol. II, p. 6, vgl. auch die Anm. auf p. 2) diesen Fall als privo d'interesse. Aber derselbe scheint gerade geeignet, den Unterschied zwischen unendlich kleiner Biegung und infinitesimaler Isometrie zu erläutern.

und F gleich Null. Die Gleichung 3[a]) § 1 bestimmt dann durch Quadratur die Funktion φ; da G nicht verschwindet, falls die Fläche nicht eine Ebene ist, folgt aus 3[b]) die Grösse $\sum\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)$.

Alsdann ergibt sich durch Quadratur aus der Gleichung 5) auch die Grösse $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial v}$, womit neben der bei der Integration für φ auftretenden willkürlichen Funktion von v eine zweite solche Funktion eingeführt wird. Alle infinitesimalen Deformationen einer Developpabelen eines vorgeschriebenen Charakters lassen sich daher durch Quadraturen bestimmen und enthalten — bei der vorausgesetzten Koordinatenbestimmung — noch zwei willkürliche Funktionen von v.

Hinsichtlich der weiteren Ausführung beschränke ich mich der Einfachheit halber auf die isometrische Deformation.

Bezeichnet man mit X, Y, Z die Koordinaten eines Punktes der Rückkehrkurve der Fläche, welche als Funktionen von v so angenommen sind, dass

$$\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2=1$$

ist, so sind die auf das aus den Erzeugenden und ihnen orthogonalen Trajektorien gebildete Koordinatensystem bezogenen rechtwinkligen Koordinaten der Developpabelen

$$x = X + (u-v)\frac{\partial X}{\partial v};$$

y und z haben die durch Vertauschung von X mit Y, Z hervorgehenden Werte. Es ist aber

$$1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (u-v)\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

mithin

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = (u - v)^2 h^2,$$

falls

$$h^2 = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}$$

gesetzt wird, und $\sqrt{H}$ ist gleich $h\,(u - v)$.

Die Richtungskosinus der Flächennormale sind ferner d
die Identität

$$h\,(c_1 p + c_2 q + c_3 r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

gegeben, in der die $c_1\, c_2\, c_3$ willkürliche Koeffizienten bede
Setzt man noch

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3 X}{\partial v^3} & \frac{\partial^3 Y}{\partial v^3} & \frac{\partial^3 Z}{\partial v^3} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

so erhält man

$$G = (u - v)\,\frac{\Delta}{h}.$$

Da nach 3^{a}) § 1, $\varphi = V$ wird, wo V eine willkür
Funktion von V ist, so folgt aus 3^{b})

$$\Sigma\, p\,\frac{\partial \xi}{\partial u} = -h^2\,\frac{V'}{\Delta},$$

wo V' den Differentialquotienten von V bedeutet. Au
folgt dann

$$-\frac{\partial}{\partial u}\,\Sigma\left(p\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = V\,\frac{\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2\, V'}{\Delta}\right);$$

mithin

$$2)\quad \begin{aligned} \Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial u} &= -h^2 \frac{V'}{\Delta} \\ \Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -(u-v)\left(\frac{V\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2 V'}{\Delta}\right)\right) + V_1, \end{aligned}$$

wo V_1 eine zweite willkürliche Funktion von v bedeutet. Hieraus folgt dann unter Benutzung der Gleichung 1) des § 1

$$3)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\frac{V}{h}\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} - h^2 \frac{V'}{\Delta} p \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= V(u-v)h\frac{\partial X}{\partial v} + p\left(V_1 - (u-v)\left(\frac{V\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2 V'}{\Delta}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Erzeugenden der Fläche $v =$ Konst auch bei der infinitesimalen Isometrie geradlinig bleiben, ξ, η, ζ sind lineare gerade Funktionen von u. Die aus den Koordinaten ξ, η, ζ gebildete Fläche, welche zu der Developpabeln in Moutard'scher Zuordnung steht, ist aber im allgemeinen eine Regelfläche, welche nur dann in eine Developpabele übergeht, wenn V oder V_1 verschwindet. Im ersten Falle aber ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = p\, V_1,$$

d. h. man hat eine singuläre Transformation, bei der die soeben genannte Fläche in eine Kurve degeneriert. Im zweiten Falle dagegen entsteht die infinitesimale Isometrie, bei der die Flächen x, y, z und ξ, η, ζ gleichzeitig Developpabele sind.

Ist die gegebene Fläche eine Kegelfläche, so muss die Betrachtung etwas anders geführt werden. Setzt man

$$1^a)\quad \begin{aligned} x &= u\,X \\ y &= u\,Y \\ z &= u\,Z, \end{aligned}$$

wo X, Y, Z Funktionen von v sind, welche die Gleichungen

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

befriedigen, so wird die Flächennormale bestimmt durch die Identität

$$c_1 p + c_2 q + c_3 r = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man wieder

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

so wird

$$G = u\varDelta,$$

und zugleich $e = 1$, $f = 0$, $g = u^2$, $\sqrt{H} = u$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2^a)\qquad \Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{V'}{\varDelta}$$

$$-\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = V\varDelta + V_1 + u\frac{\partial\left(\frac{V'}{\varDelta}\right)}{\partial v},$$

unter Beibehaltung der Bedeutungen von V, V', V_1. Es wird daher:

$$3^a)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -V\frac{\partial X}{\partial v} - p\frac{V'}{\varDelta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = uVX - p\left\{V_1 + V\varDelta + u\frac{\partial\left(\frac{V'}{\varDelta}\right)}{\partial v}\right\}.$$

Auch hier ist die Fläche ξ, η, ζ im allgemeinen eine Regelfläche, welche — abgesehen von dem singulären Falle $V = 0$ — in eine Kegelfläche übergeht, wenn V_1 gleich Null angenommen wird.

Für die infinitesimal deformierte Fläche der Developpabelen, deren Koordinaten nach § 1

$$x + \varepsilon\xi,\quad y + \varepsilon\eta,\quad z + \varepsilon\zeta$$

sind, ist nun selbstverständlich die Fundamentalgrösse E' gleich Null. Dagegen erhält man für F' den Ausdruck

$$\varepsilon \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

wobei von den Determinanten nur eine Vertikalreihe hingeschrieben ist. Werden die Differentialquotienten der ξ, η, ζ nach 3) eingesetzt, so ergibt sich

$$\varepsilon V_1 h,$$

d. h. die infinitesimal deformierte Fläche ist im allgemeinen eine Regelfläche und nur dann wieder developpabel, wenn $V_1 = 0$ angenommen wird. Der genauere Nachweis, dass in der Tat dieser Fall, wie es zu vermuten ist, der infinitesimalen Biegung der Developpabeln entspricht, scheint allerdings die explizite Biegung dieser Flächen zu erfordern; ich gehe auf diese Frage, die eine etwas andere Behandlung erfordert, hier nicht ein.

Developpabele Flächen ändern sich also bei infinitesimaler Isometrie auch nur so, dass ihre Erzeugenden geradlinig bleiben. Nur die Ebene ist bei den vorstehenden Betrachtungen ausgeschlossen. Setzt man aber in den Gleichungen 3) und 5) des § 1 die drei Fundamentalgrössen E, F, G gleich Null voraus, so ergibt sich:

Bei allen infinitesimalen Isometrieen der Ebene ist die charakteristische Funktion φ eine Konstante und alle Deformationen dieser Art ergeben sich, wenn man den Gleichungen 1) noch die Beziehungen

$$\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion von u und v, hinzufügt. Und in analoger Weise erhält man auch alle Deformationen der Ebene von vorgeschriebenem Charakter, doch ist zu bemerken, dass die P, Q, R in diesem Falle nicht vollkommen willkürlich angenommen werden dürfen, sondern den Gleichungen 3^a), 3^b) des § 1 zufolge selbst einer Bedingung genügen müssen, die besonders einfach ausfällt, wenn man z. B. die Koeffizienten e, f, g als Konstanten voraussetzt.

§ 3.

Die infinitesimale Isometrie der Flächen.

Für die Untersuchung derselben sind im wesentlichen drei Methoden entwickelt. Herr Darboux hat bereits 1882 in seinen Vorlesungen unter Zugrundelegung des Koordinatensystems der Haupttangentenkurven die betreffenden Untersuchungen in ausserordentlich eleganter und fruchtbarer Weise durchgeführt; Herr Weingarten hat 1886 bei der allgemeinsten Koordinatenbestimmung die Frage auf die Ermittelung der charakteristischen Funktion φ reduziert; Herr Bianchi, dem man insbesondere die wichtige Theorie der assoziierten Flächen verdankt, bestimmt endlich die Differentialgleichungen, denen die Änderungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung bei der infinitesimalen Isometrie genügen müssen.[1]) Jeder dieser Wege hat besondere Vorzüge, allen aber ist das gemeinsam, dass die eine Fläche F' mit den Koordinaten ξ, η, ζ als gesuchte, die andere F (x, y, z) als gegebene erscheint, während die völlige Reziprozität der beiden Flächen zurücktritt.

Stellt man sich auf den Standpunkt, dass F und Φ überhaupt zwei Flächen sind, welche in Moutard'scher Zuordnung stehen, derart, dass in korrespondierenden Punkten korrespondierende Richtungen einen rechten Winkel miteinander bilden,

[1]) Lezioni, Vol. II, p. 22.

so erscheint es zweckmässig, die beiden Flächen als völlig gleichberechtigt anzusehen.

Setzt man

$$1)\qquad \begin{aligned} &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\psi \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = +\psi \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$ [1]

so folgt durch Differentiation dieser Gleichungen nach u und v, wenn man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung für die Fläche F' (ξ, η, ζ) durch e', f', g'; E', F', G', die Normalenkosinus durch $\pi, \varkappa, \varrho$, die Christoffel'schen Koeffizienten $A, B, ..$ des § 1 durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet,

$$2)\qquad \begin{aligned}
&1)\quad (\alpha_1 - A_1)\psi + E'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + E\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\
&2)\quad (\beta_1 - B_1)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\
&3)\ -(\alpha + B_1)\psi + E'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial u} \\
&4)\ -(\beta + C_1)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial v} \\
&5)\quad (\beta_1 + A)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + E\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = +\frac{\partial \psi}{\partial u} \\
&6)\quad (\gamma_1 + B)\psi + G'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial v} \\
&7)\ (-\beta + B)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0 \\
&8)\ (-\gamma + C)\psi + G'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0;
\end{aligned}$$

[1] Zwischen ψ und den charakteristischen Funktionen φ und φ' für die beiden Flächen F und F' besteht daher die Bezeichnung

$$\psi = \varphi\sqrt{H} = \varphi_1\sqrt{H_1}.$$

dabei ist nach E) § 1

$$\beta + \gamma_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}, \quad \beta_1 + \alpha = \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial u}.$$

Durch Subtraktion von 2), 1) und 5), 4) und 7) ergeben sich die Gleichungen von Weingarten

$$3) \quad \begin{aligned} F\,\Xi_u - E\,\Xi_v &= -\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} \\ F\,\Xi_v - G\,\Xi_u &= +\frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} \\ F'\,X_u - E'\,X_v &= +\frac{\partial \psi}{\partial u} - \psi \frac{\partial \log \sqrt{H'}}{\partial u} \\ F'\,X_v - G'\,X_u &= -\frac{\partial \psi}{\partial v} + \psi \frac{\partial \log \sqrt{H'}}{\partial v}, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum p \frac{\partial \xi}{\partial u} = \Xi_u, \quad \sum p \frac{\partial \xi}{\partial v} = \Xi_v$$

$$\sum \pi \frac{\partial x}{\partial u} = X_u, \quad \sum \pi \frac{\partial x}{\partial v} = X_v$$

gesetzt wird.[1]) Aus den Gleichungen 3) ergibt sich wieder die partielle Differentialgleichung des § 2 für ψ.

Aus den Gleichungen 2) lässt sich der Satz folgern:

Für irgend zwei in Moutard'scher Zuordnung stehende Flächen F und F' besteht zwischen den

[1]) Bei Anwendung der Gleichungen E) des § 1 und der Gleichungen 3) nehmen die Gleichungen 2) 1, 2, 3 und 4, sowie 5 und 6, 7, 8 die völlig symmetrische Gestalt an

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - A_1)\,\psi + E'\,X_u + E\,\Xi_u &= 0 \\ (\beta_1 - B_1)\,\psi + F'\,X_u + F\,\Xi_u &= 0 \\ (\gamma_1 - C_1)\,\psi + G'\,X_u + G\,\Xi_u &= 0 \\ (A - \alpha)\quad \psi + E'\,X_v + E\,\Xi_v &= 0 \\ (B - \beta)\quad \psi + F'\,X_v + F\,\Xi_v &= 0 \\ (C - \gamma)\quad \psi + G'\,X_v + G\,\Xi_v &= 0. \end{aligned}$$

Fundamentalgrössen zweiter Ordnung derselben die Relation[1])

$$\Omega = E G' + G E' - 2 F F' = 0.$$

Zunächst erhält man für das Produkt der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \sqrt{H}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \pi \end{vmatrix} = \sqrt{H_1},$$

durch Multiplikation die Gleichung

$$4) \qquad \sqrt{H H_1} = \Xi_u X_v - \Xi_v X_u + \psi \cos \Theta,$$

welche zeigt, dass die rechte Seite, in der

$$\sum (p \pi) = \cos \Theta$$

gesetzt ist, wobei $\cos \Theta$ den Kosinus des Neigungswinkels der Normalen von F und F' bedeutet, niemals verschwinden kann, da H, H_1 nach Voraussetzung nicht Null sind.

Man differentiiere nun die beiden ersten Gleichungen 3) nach u und v. Alsdann folgt, wenn man wieder die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, sowie die ersten der p, q, r nach den Gleichungen A) und D) des § 1 durch die ersten Differentialquotienten ersetzt,

---

[1]) Diese Relation selbst ist für nicht developpabele Flächen eine Folge von dem Satze, dass dem System der Haupttangentenkurven von F ein konjugiertes System auf F' entspricht, welchen Darboux durch Benutzung der gegenwärtig als Lelieuvre's Formeln bezeichneten Transformation ableitet, Leçons, IV, p. 50. Die Betrachtung des Textes beweist diesen wichtigen Satz in der allgemeinsten Weise für irgend zwei Flächen F und F'; übrigens ist er in § 2 schon für die Developpabelen hergeleitet.

$$F(\beta\,\Xi_u + \beta\,\Xi_v) - E(\gamma\,\Xi_u + \gamma_1\,\Xi_v) + \Xi_u\frac{\partial F}{\partial v} - \Xi_v\frac{\partial E}{\partial v}$$

$$+ (F F' - E G')\cos\Theta + F\sum\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} - E\sum\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial v}$$

$$= -\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial u} + \psi\frac{\partial^2\log\sqrt{H}}{\partial u\,\partial v}$$

$$F(\beta\,\Xi_u + \beta_1\,\Xi_v) - G(\alpha\,\Xi_u + \alpha_1\,\Xi_v) + \Xi_v\frac{\partial F}{\partial u} - \Xi_u\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$+ (F F' - G E')\cos\Theta + F\sum\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} - G\sum\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}$$

$$= +\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial v} - \psi\frac{\partial^2\log\sqrt{H}}{\partial u\,\partial v},$$

also durch Addition

$$\Xi_u\left(2\beta F - \gamma E - \alpha G + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right) + \Xi_v\left(2\beta_1 F - \gamma_1 E - \alpha_1 G + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

$$= \Omega\cos\Theta + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial v};$$

oder, wenn

$$2\beta\ F - \gamma\ E - \alpha\ G + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = U$$

$$2\beta_1 F - \gamma_1 E - \alpha_1 G + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = V,$$

gesetzt wird,

$$5)\qquad \Xi_u U + \Xi_v V + \Omega\cos\Theta = \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial v}.$$

Aus den Gleichungen 2) 1, 2, 5, 6 folgt ferner durch Zuziehung von C) § 1

$$X_u\,\Omega + (E G - F^2)\,\Xi_u - \psi\,V = E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

$$X_v\,\Omega + (E G - F^2)\,\Xi_v - \psi\,U = F\frac{\partial\psi}{\partial v} - G\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit Ξ_v und Ξ_u und subtrahiert, so folgt

$$(X_u\,\Xi_v - X_v\,\Xi_u)\,\Omega - \psi\,(V\,\Xi_v + U\,\Xi_u)$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial v}(E\,\Xi_v - F\,\Xi_u) + \frac{\partial\psi}{\partial u}(G\,\Xi_u - F\,\Xi_v).$$

Ersetzt man hierin nach 5) den mit ψ multiplizierten Teil, so folgt unter Benutzung der beiden ersten Gleichungen 3)

$$(X_u\,\Xi_v - X_v\,\Xi_u + \psi\cos\Theta)\,\Omega = 0,$$

also nach der oben gemachten Bemerkung

$$\Omega = 0$$

und diese Gleichung gilt daher auch für den Fall, dass eine der Flächen F und F' oder beide, developpabel sind.[1])

Ist nun die nicht developpabele Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, d. h. $E = G = 0$, so ist auch $F' = 0$. Zugleich aber folgt aus den Gleichungen 2) 4 und 5

$$\beta + C_1 = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$
$$\beta_1 + A = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Nun ist aber nach den Gleichungen C) § 1

$$B - C_1 + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$
$$B_1 - A + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$
$$B + C_1 - \frac{\partial \log\sqrt{H}}{\partial v} = 0$$
$$B_1 + A - \frac{\partial \log\sqrt{H}}{\partial u} = 0,$$

---

[1]) Ist die Fläche F elliptisch gekrümmt, so kann man immer ein isotherm-konjugiertes Koordinatensystem $E = G$, $F = 0$ (vgl. Bianchi, Lezioni, Vol. I, p. 167) voraussetzen. Dann ist aber $E' + G' = 0$, also die Fläche F' negativ gekrümmt. Es folgt also: Ist die Fläche F positiv gekrümmt, so ist F' von negativer Krümmung; ist dagegen F negativ gekrümmt, so kann das Krümmungsmass von F' positiv, negativ oder auch Null sein.

also

$$2\,C_1 = \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial v}$$

$$2\,A = \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial u};$$

also

$$2\,\beta = \frac{\partial \log \dfrac{\psi^2}{F\sqrt{H}}}{\partial v}$$

$$2\,\beta_1 = \frac{\partial \log \dfrac{\psi^2}{F\sqrt{H}}}{\partial u}.$$

Das heisst: Bei zwei in Moutard'scher Beziehung stehenden Flächen entspricht dem System der Haupttangentenkurven der einen ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten der anderen.[1])

Andererseits folgt für das gemeinsame konjugierte System, welches die beiden Flächen F und F' besitzen

$$F = 0, \quad F' = 0,$$

mithin nach 2) 2 und 7

$$\beta = B, \quad \beta_1 = B_1.$$

Aber dies ist nur eine andere Ausdrucksweise für die bekannte Tatsache, dass die beiden Flächen mit den Koordinaten $x - \xi, \ldots, x + \xi, \ldots$ zu einander isometrisch sind, also auch in Bezug auf das gemeinsame konjugierte System derselben Laplace'schen Differentialgleichung genügen.

Aus den Gleichungen 2) können noch einige weitere Folgerungen gezogen werden. Ist die Fläche F developpabel und $E = 0$, $F = 0$, so ist notwendig $E' = 0$. Dann ist aber nach 2), 1 auch $\alpha_1 = A_1$. Da nun aber für die Erzeugende der Developpabeln auch $A_1 = 0$ ist, so folgt $\alpha_1 = 0$; d. h. die Fläche F' ist eine Regelfläche, wie in § 2 bereits erkannt

[1]) Vgl. Darboux, Leçons IV, p. 50.

wurde. Es gilt übrigens der allgemeine Satz: Stehen zwei Flächen in Moutard'scher Beziehung und entspricht dabei einer Schar von Haupttangentenkurven der einen Fläche wieder eine solche Schar auf der anderen, so ist die eine Fläche developpabel, die andere eine Regelfläche. Ist überhaupt auf der einen Fläche eine gerade Linie mit parabolischer Krümmung vorhanden, also längs derselben $F = 0$, $E = 0$, $A_1 = 0$, so entspricht ihr auf der anderen Fläche notwendig eine gerade Linie.

Durch Multiplikation der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \cos\Theta \sqrt{H_1}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \pi \end{vmatrix} = \cos\Theta \sqrt{H},$$

folgt

$$\psi^2 = \cos\Theta \sqrt{H H_1}.$$

Die Bestimmung von H_1 ergibt sich, wenn die Fläche F nicht developpabel ist, auf folgende Weise. Setzt man

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + \gamma p,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \alpha e + \beta f &= 0 \\ \alpha f + \beta g &= -\varphi \sqrt{H} = -\psi \\ \gamma &= \Xi_u . \end{aligned}$$

Man erhält daher für die Fundamentalgrössen erster Ordnung e', f', g' von F':

$$\begin{aligned} e' &= e\varphi^2 + \Xi_u^2 \\ f' &= f\varphi^2 + \Xi_u \Xi_v \\ g' &= g\varphi^2 + \Xi_v^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Und hieraus folgt mittelst der Gleichungen 3[a]), 3[b]) des § 1

$$H_1 = H\varphi^4 + \varphi^2 \Delta(\varphi),$$

wenn man unter $\Delta(\varphi)$ den ersten Differentialparameter der auf die sphärische Abbildung von F bezogenen charakteristischen Funktion φ versteht, mithin ist auch

$$\cos\Theta = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \Delta(\varphi)}}.$$

Man kann noch eine andere Gleichung für $\cos\Theta$ erhalten. Multipliziert man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \sqrt{H_1}\, X_u \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \sqrt{H},$$

so folgt

$$\sqrt{H H_1}\, X_u = \psi\,(f\,\Xi_u - e\,\Xi_v)$$
$$\sqrt{H H_1}\, X_v = -\,\psi\,(f\,\Xi_v - g\,\Xi_u)$$

und durch Vertauschung

$$\sqrt{H H_1}\, \Xi_u = \psi\,(e'\,X_v - f'\,X_u)$$
$$\sqrt{H H_1}\, \Xi_v = -\,\psi\,(g'\,X_u - f'\,X_v).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, wenn

$$\psi^2 = \omega\, H H_1 = \cos\Theta \sqrt{H H_1}$$

gesetzt wird, falls die Normalen der Flächen F, F' nicht zueinander parallel sind, also Ξ_u, Ξ_v Null sind, durch geeignete Kombination

$$\omega^2 H H_1 - \omega\,(e\,g' + g\,e' - 2\,f\,f'\,1) + 1 = 0,$$

wodurch die charakteristische Funktion resp. $\cos\Theta$ durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung von F und F' ausgedrückt ist.

Sind nun F und F' konform aufeinander bezogen, die Normalen aber in entsprechenden Punkten nicht zueinander parallel, so folgt wegen $e' = \lambda\, e$, $f' = \lambda\, f$, $g' = \lambda\, g$

$$\omega^2 \lambda^2 H^2 - 2\,\omega\,\lambda\,H + 1 = 0$$

oder

$$\omega = \frac{1}{\lambda H}, \quad \psi^2 = \lambda H, \quad \varphi^2 = \lambda.$$

Dann aber folgt aus den Gleichungen 6), dass Ξ_u, Ξ_v Null sein müssten, was der Voraussetzung widerspricht. Die konforme Beziehung erfordert also den Parallelismus der Normalen. Dann aber ist nach den Gleichungen 3) des § 1 die charakteristische Funktion notwendig eine Konstante, und dies kann nur eintreten, wenn F eine Minimalfläche ist. Dann ist aber auch F' eine Minimalfläche; die Beziehung überdies (wegen $\lambda =$ konst) eine Ähnlichkeit; man erkennt sofort, dass F und F' zwei adjungierte Minimalflächen (mit parallel zugeordneten Normalen) oder zu solchen ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Zwei in Moutard'scher Beziehung stehende Flächen, die nicht developpabel sind, können nur dann zugleich konform aufeinander bezogen sein, wenn sie adjungierte Minimalflächen (also auch isometrisch zueinander) oder zu solchen ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Die noch mögliche Ausnahme lässt sich leicht beseitigen. Ist nämlich F developpabel, so sind die Koeffizienten e', f', g' des Quadrates des Längenelementes von F' nach 3) § 2

$$\begin{aligned} e' &= V^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \frac{h^4}{\Delta^2} \\ g' &= V^2 h^2 (u - v)^2 + M^2 \\ f' &= \frac{h^2 M}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}, \end{aligned} \tag{7}$$

wo

$$M = V_1 - (u - v)\left(V \frac{\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}\right)\right).$$

Konform aber kann diese Beziehung nur sein, wenn auch $f' = 0$ ist, also entweder V konstant oder M gleich Null ist; hieraus würde aber in beiden Fällen $V_1 = 0$, $V = 0$ folgen. Eine konforme Beziehung kann also überhaupt nicht eintreten, wenn F developpabel ist.

Man kann endlich voraussetzen, dass die beiden Flächen F und F' auf das gemeinsame reelle System orthogonaler Koordinatenlinien bezogen sind. Dann ist notwendig nach 6)

$$\Xi_u \cdot \Xi_v = 0,$$

also, wenn etwa $\Xi_u = 0$ angenommen wird, auch $X_v = 0$, und man erhält

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\psi}{e} \frac{\partial x}{\partial u} + \gamma p$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{\psi}{g} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Es gibt daher immer ein System der Kurven $u =$ konst der ersten Fläche, denen Kurven $v =$ konst mit parallelen Tangenten in entsprechenden Punkten der zweiten Fläche entsprechen; eine besondere Vereinfachung scheint aber die Einführung dieses Koordinatensystems nicht mit sich zu bringen. — Ist F eine developpabele Fläche, so erfordert der Fall $f' = 0$, dass entweder $V =$ konst ist oder M verschwindet. Im ersten Falle ist F' noch eine Regelfläche, im zweiten Falle ist F' notwendig auch developpabel, und V ist aus der Differentialgleichung

$$\frac{V\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}\right) = 0$$

zu bestimmen.

§ 4.

Die konforme Transformation.

Bei der konformen Transformation ist

$$\delta\, d s^2 = 2\, \varepsilon \lambda\, d s^2,$$

oder

1) $$\delta\, d s = \varepsilon \lambda\, d s,$$

wie aus den Gleichungen

$$\delta e = 2\, \varepsilon \lambda e, \quad \delta f = 2\, \varepsilon f \lambda, \quad \delta g = 2\, \varepsilon g \lambda,$$

oder

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}$$

2) $$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} = 2\lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

hervorgeht. Die Transformation ändert (bis auf Glieder mit ε^2) die Länge Null der Minimalkurven der Fläche nicht, und kann auch durch diese Eigenschaft definiert werden. Für den Kosinus des Winkels zweier Richtungen d_1 und d_2 auf der Fläche

$$d_1 s\, d_2 s \cos\Theta = e\, d_1 u\, d_2 u + f(d_1 u\, d_2 v + d_2 u\, d_1 v) + g\, d_1 v\, d_2 v$$

folgt $$\delta \cos\Theta = 0.$$

Bei der konformen infinitesimalen Deformation bleiben also auch die Winkel ungeändert; isometrische Kurvensysteme bewahren ihren Charakter. Auch eine gewisse Analogie zur Moutard'schen Deutung der infinitesimalen Isometrie lässt sich hier festhalten. Setzt man

$$\xi - \lambda x, \quad \eta - \lambda y, \quad \zeta - \lambda z$$

in den Formeln 2) gleich Ξ, H, Z, so folgt:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Xi}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial r^2}{\partial u}$$

2ª) $$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Xi}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial r^2}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial r^2}{\partial v}\right)$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Xi}{\partial v} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial r^2}{\partial v},$$

wenn unter r^2 das Quadrat der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfang der Koordinaten verstanden wird. Das Quadrat des Längenelementes $d\sigma$ der Fläche mit den Koordinaten

$$x + t\,\Xi, \quad y + t\,H, \quad z + t\,Z$$

ist bei konstantem Werte von t nach 2ª)

$$d\sigma^2 = ds^2 - t\, d\lambda\, dr^2 + t^2(d\Xi^2 + dH^2 + dZ^2).$$

Die beiden Flächen mit den Koordinaten

$$x \pm t\,\Xi, \quad y \pm t\,H, \quad z \pm t\,Z$$

sind daher nicht mehr isometrisch zueinander — dies würde, abgesehen von dem Falle der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 =$ konst,[1]) nur für $\lambda =$ konst eintreten, d. h. für die mit einer Ähnlichkeitstransformation $\xi = c\,x$, $\eta = c\,y$, $\zeta = c\,z$ verbundene infinitesimale Isometrie, aber sie stehen in der Beziehung, dass längs der Kurven, welche durch die Beziehung

$$d\,r^2 = \text{konst}, \quad \text{oder auch} \quad \lambda = \text{konst}$$

auf den Flächen in Korrespondenz versetzt werden, die Längenelemente derselben gleich sind. Es sind das im allgemeinen zwei verschiedene Kurvensysteme, die nur dann zusammenfallen, wenn der Modulus λ der konformen Deformation selbst eine Funktion von r allein ist.[2])

Setzt man in den Formeln 3^a), 3^b) des § 1

$$P = \mu\,e, \quad Q = \mu\,f, \quad R = \mu\,g,$$

so ergeben sich für die rechten Seiten derselben

$$\frac{\partial P}{\partial v} + P\,C_1 + R\,A_1 - 2\,Q\,B_1 - \frac{\partial Q}{\partial u}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} + R\,A + P\,C - 2\,Q\,B - \frac{\partial Q}{\partial v},$$

nach den Gleichungen C) des § 1 die Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(e\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial v} - f\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial u}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(f\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial u} - g\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial v}\right),$$

---

[1]) Dieser Fall eines Paares zueinander isometrischer Flächen, welche noch von einer willkürlichen Funktion abhängen, dürfte eine etwas ausführlichere Behandlung verdienen.

[2]) Derartige Kurvensysteme (reell oder imaginär) gibt es selbstverständlich bei jeder Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Flächen; dieselben sind im vorliegenden Falle nur durch eine besonders einfache Beziehung ausgedrückt.

so dass, wenn $\mu\sqrt{H}=\lambda$ gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ die Form annimmt:

$$3)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{k\sqrt{H}}\right)+\frac{\partial\frac{\omega_1}{k}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{\omega_2}{k}}{\partial u}$$

$$=\frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg+Ge-2fF),$$

wenn man zur Abkürzung

$$4)\quad \begin{aligned} -\omega_1 H &= (gE-Ff)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(eF-fE)\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \\ -\omega_2 H &= (gF-fG)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(eG-fF)\frac{\partial\lambda}{\partial v} \end{aligned}$$

setzt. Für die Kugel, wo ω_1 und ω_2 identisch Null sind, reduziert sich die Gleichung 3) auf die der infinitesimalen Isometrie, wie nach § 1 zu erwarten war.

Dieser Umstand findet auch dann statt, wenn

$$5)\quad \frac{\partial\frac{\omega_1}{k}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{\omega_2}{k}}{\partial u}=0$$

wird. Nun ist aber nach § 1, D)

$$H\frac{\partial p}{\partial u}=(fF-gE)\frac{\partial x}{\partial u}+(fE-eF)\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$H\frac{\partial p}{\partial v}=(fG-gF)\frac{\partial x}{\partial u}+(fF-eG)\frac{\partial x}{\partial v}$$

und hieraus folgt, dass die Gleichungen

$$(fF-gE)\frac{\partial r^2}{\partial u}+(fE-eF)\frac{\partial r^2}{\partial v}=2H\frac{\partial}{\partial u}\Sigma(px)$$

$$(fG-gF)\frac{\partial r^2}{\partial u}+(fF-eG)\frac{\partial r^2}{\partial v}=2H\frac{\partial}{\partial v}\Sigma(px)$$

bestehen. Für diejenigen Flächen, bei denen, wie z. B. bei den Flächen konstanter Krümmung, den Rotationsflächen etc. das Krümmungsmass k eine Funktion der Entfernung der Tangentialebene vom Anfang ist, kennt man daher eine partikuläre konforme infinitesimale Deformation, bei der $\lambda = r^2$ gewählt ist.

Etwas ähnliches findet statt, wenn das Krümmungsmass k in den gleichen Punkten einen konstanten Wert hat, wo die Neigung der Flächennormale gegen eine feste Richtung eine konstante Grösse besitzt. Denn es ist auch

$$(fF - gE)\frac{\partial \sum c x}{\partial u} + (fE - eF)\frac{\partial}{\partial v}\sum c x = H\frac{\partial}{\partial u}\sum c p$$

$$(fG - gF)\frac{\partial \sum c x}{\partial u} + (fF - eG)\frac{\partial \sum c x}{\partial v} = H\frac{\partial}{\partial v}\sum c p,$$

so dass man wieder eine partikuläre Lösung erhält, wenn

$$\lambda = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

genommen wird.

Die Flächen, bei denen das Krümmungsmass eine Funktion des Winkels ist, den die Normale mit einer festen Richtung, etwa mit der Z Axe des rechtwinkligen Koordinatensystems bildet, lassen sich auf folgende Weise finden. Man nehme an, dass das Krümmungsmass nicht konstant sei und wähle die Kurven konstanten Krümmungsmasses zu Kurven $u =$ konst; die Kurven $v =$ konst seien ihre senkrechten Trajektorien. Die sphärische Abbildung dieses Kurvensystems besteht dann in den Parallelkreisen und Meridianen der Einheitskugel, und aus dieser sphärischen Abbildung ist umgekehrt die Fläche herzuleiten.

Setzt man demgemäss

$$p = \cos v \sin u$$
$$q = \sin v \sin u$$
$$r = \cos u,$$

so ergeben sich die Koordinaten der zugehörigen Fläche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -E \cos v \cos u + F \frac{\sin v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -E \sin u \cos u - F \frac{\cos v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \quad E \sin u,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -F \cos v \cos u + G \frac{\sin v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -F \sin v \cos u - G \frac{\cos v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \quad F \sin u,$$

wobei

$$E G - F^2 = \sin^2 u \, U$$

vorauszusetzen ist, und die von u allein abhängige Funktion U das reziproke Krümmungsmass bedeutet. Die vorstehenden Gleichungen müssen nun noch den Integrabilitätsbedingungen genügen. Setzt man

$$E \sin u = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$F \sin u = \frac{\partial z}{\partial v},$$

so sind dieselben, wie eine einfache Rechnung zeigt

6) $$E \sin u = \frac{\partial z}{\partial u}$$
$$F \sin u = \frac{\partial z}{\partial v},$$

7) $$\frac{\partial \frac{G}{\sin u}}{\partial u} = \operatorname{cotg} u \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\sin^2 u},$$

wo

8) $$\frac{G}{\sin u} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial z}{\partial u} \sin u} + \frac{\sin^2 u \, U}{\frac{\partial z}{\partial u}}$$

zu setzen ist. Man erhält also die Differentialgleichung zweiter Ordnung für z durch Einsetzen von 8) in 7).[1]) Da sie nicht allgemein lösbar scheint, beschränke ich mich auf die Betrachtung eines speziellen Falles.

Nimmt man $\frac{\partial z}{\partial v} = c = \text{konst}$ an, so ist E eine Funktion von u allein

$$E = \frac{1}{\cos u}\frac{\partial U_1}{\partial u};$$

dann aber wird nach 7)

$$G = (U_1 + c_1)\sin u,$$

weil G nach 8) nicht von v abhängen kann. Die Gleichung 8) dient dann zur Bestimmung der Funktion U. Es folgt daher

$$\begin{aligned} x &= -(U_1 + c_1)\cos v - c\sin v \operatorname{cotg} u \\ y &= -(U_1 + c_1)\sin v + c\cos v \operatorname{cotg} u \\ z &= c\,v + \int \frac{\partial U_1}{\partial u}\operatorname{tg} u\,du, \end{aligned}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} c \operatorname{cotg} u &= \lambda \sin \varepsilon \\ U_1 + c_1 &= \lambda \cos \varepsilon \end{aligned}$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} x &= -\lambda\cos(v - \varepsilon) \\ y &= -\lambda\sin(v - \varepsilon) \\ z &= c(v - \varepsilon) + c\,\varepsilon + \int \frac{\partial U_1}{\partial u}\operatorname{tg} u\,du. \end{aligned}$$

---

[1]) Einfache Eigenschaften dieser Flächen sind folgende. Da

$$dz = \sin u\,(E\,du + F\,dv),$$

so sind die Kurven $z = \text{konst}$ konjugiert zu den Kurven $v = \text{konst}$. Ferner ist das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = (E\,du + F\,dv)^2 + \left(\frac{F\,du + G\,dv}{\sin^2 u}\right)^2,$$

d. h. die zu den Kurven $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$ konjugierten Kurven bilden ein Orthogonalsystem.

Da λ und z nur Funktionen von u sind, erkennt man in dieser Darstellung die Schraubenflächen, im speziellen Falle $c = 0$ die Rotationsflächen.

Bei der Aufstellung der Gleichungen 7), 8) ist indessen vorausgesetzt, dass $\frac{\partial z}{\partial u}$ oder E nicht Null ist. Für den Fall, dass die Kurven $v =$ konst Haupttangentenkurven der gesuchten Fläche werden, erhält man aber aus den aufgestellten Gleichungen

$$z = cv + c_1$$

$$F = \frac{c}{\sin u},$$

während die Integrabilitätsbedingungen liefern

$$G = V \sin u,$$

wenn V eine willkürliche Funktion von v ist, und somit

$$\begin{aligned} x &= -c \sin v \operatorname{cotg} u + \int V \sin v \, dv \\ y &= +c \cos v \operatorname{cotg} u - \int V \cos v \, dv \\ z &= \quad cv + c_1, \end{aligned}$$

d. h. eine Regelfläche mit dem Krümmungsmass

$$-\frac{\sin^4 u}{c^2};$$

in dem speziellen Falle $V = 0$ entsteht die gewöhnliche Schraubenfläche.

Verlangt man, alle konformen infinitesimalen Deformationen zu bestimmen, bei denen λ einen vorgeschriebenen Wert hat, so ist natürlich die partielle Differentialgleichung für φ zu lösen. Will man aber überhaupt nur konforme Deformationen finden, so kann man auch in dieser Gleichung λ als Unbekannte ansehen; kann man sie dann in der allgemeinsten Weise befriedigen, so gelingt es, alle konformen Deformationen zu bestimmen, jedoch nicht so, dass man nun auch schon alle solchen Deformationen eines vorgeschriebenen Charakters gewonnen hätte. In diesem Sinne lässt sich z. B.

für die Minimalflächen das Problem der infinitesimalen konformen Deformationen vollständig lösen.

Bezieht man eine (reelle) Minimalfläche auf ihre Krümmungslinien u, v, so sind die beiden Fundamentalgrössen E (G) nach den Codazzi'schen Gleichungen § 1, D) Funktionen von u (v) allein. Da keine derselben verschwinden darf, so kann man dieselben gleich $+1$, resp. -1 annehmen; dann ist aber die Fläche durch ihre Krümmungslinien in infinitesimale Quadrate geteilt, denn aus der für Minimalflächen charakteristischen Gleichung

$$Eg + Ge = v$$

folgt jetzt $g = e$. Da nun das Krümmungsmass $k = -\frac{1}{e^2}$ wird, nimmt die Gleichung 3) die einfache Form

$$\frac{\partial}{\partial v} e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)$$

an. Setzt man jetzt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion an u, v ist, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \Omega(u, v),$$

welche Gleichung in bekannter Weise auf die durch Quadratur zu lösende

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1 \partial v_1} = \Omega_1(u_1, v_1)$$

zurückgeführt wird. Alle konformen infinitesimalen Deformationen der Minimalflächen lassen sich daher durch Quadraturen bestimmen.

Ich erwähne, um ein weiteres Beispiel zu geben, noch die Cycliden. Führt man überhaupt in die Gleichung 3) die

Voraussetzung ein, dass die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen ist, so erhält sie wegen

$$f = 0, \quad F = 0$$

die Form

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{eg}}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{eg}}{E}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g}{G}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e}{E}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)$$
$$+ \varphi \frac{Eg + Ge}{\sqrt{eg}} = 0.$$

Ist also $\frac{e}{E}$ nur von v, $\frac{g}{G}$ nur von u abhängig, so wird der λ enthaltende Teil von der Form

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v}\left(\frac{g}{G} - \frac{e}{E}\right),$$

so dass λ durch Quadratur gefunden werden kann. Es sind dies aber diejenigen Flächen, bei denen die beiden Schalen der Zentralfläche sich auf zwei Kurven reduzieren, d. h. die Dupin'schen Cycliden. Alle infinitesimalen konformen Deformationen dieser Cycliden sind demnach durch Quadraturen bestimmbar; ich übergehe die leicht auszuführenden Integrationen, durch welche man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer solchen auf ihre Krümmungslinien bezogenen Cyclide aus den Codazzi'schen Gleichungen zu bestimmen hat.

Wir fragen nun nach den infinitesimalen konformen Deformationen der Fläche in sich. Lässt sich die Fläche in dieser Weise in sich verschieben, so gibt es für jeden Punkt eine gewisse Richtung der Verschiebung; die von diesen Richtungen umhüllten Kurven seien die Kurven $v =$ konst. Wenn diese Kurven nicht gerade zugleich Minimalkurven der Fläche sind, kann man das System ihrer Orthogonalkurven zu Kurven $u =$ konst wählen. Unter dieser Voraussetzung aber werden die Komponenten des Verschiebungsvektors

$$\xi = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\eta = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\zeta = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Wegen der Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\mu}{2e\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} - \frac{\mu}{2e\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e}{\partial v}$$

ist daher zu setzen

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} \sqrt{e} = \lambda e,$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{e}} \frac{\partial g}{\partial u} = \lambda g,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} \sqrt{e} - \frac{\mu}{2\sqrt{e}} \frac{\partial e}{\partial v} = 0.$$

Dies liefert aber

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial u} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial v} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log e}{\partial v};$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log \frac{e}{g}}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Man erhält daher die allgemeine Auflösung der Aufgabe, alle konformen infinitesimalen Deformationen der Fläche in sich zu bestimmen, durch die Bestimmung aller isothermen Systeme derselben. Setzt man demgemäss

$$e = g$$

voraus, so wird $\mu = e$ konst und die Komponenten der Verschiebung sind einfach der Grösse des Längenelements an der betreffenden Stelle proportional, die Funktion λ hat den Wert $\frac{1}{2}\frac{\partial \log e}{\partial u}$.

Ist aber das System der Kurven $v =$ konst aus Minimalkurven der Fläche gebildet, was freilich nur bei imaginären Verschiebungen möglich ist, so gilt die vorstehende Betrachtung nicht mehr, weil diese Kurven kein Orthogonalsystem besitzen. Durch Einführung der zweiten Schar von Minimalkurven $u =$ konst erhält man jetzt für die Bedingungen einer konformen Deformation

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = \lambda f,$$

welche durch den Ansatz

$$\xi = \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.}$$

zu befriedigen sind. Hieraus folgt aber

$$f \frac{\partial \nu}{\partial u} = 0, \quad f \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0,$$

daher ist die allgemeine Lösung

$$\xi = U \frac{\partial x}{\partial u} + V \frac{\partial x}{\partial v}$$

nebst den analogen Werten für η, ζ, und für λ folgt

$$\lambda = \frac{1}{f}\left\{\partial \frac{(Uf)}{\partial u} + \partial \frac{(Vf)}{\partial v}\right\}.$$

Im allgemeinen erhält man hier selbstverständlich nur die isothermen Systeme wieder. Aber hievon abgesehen ist es auch noch zulässig, z. B. die willkürliche Funktion V von v gleich Null zu setzen; man hat dann eine Verschiebung längs der Minimalkurve. Nur in dem Falle, wo die Funktion λ

gleich Null sein, d. h. eine infinitesimale isometrische Deformation entstehen soll, ist diese Annahme im allgemeinen nicht mehr gestattet. Denn es müsste dann Uf von u unabhängig, also die Fundamentalgrösse f selbst von der Form $\frac{V}{U}$ sein. Dann aber wäre die Fläche developpabel; ein Fall, den man gewöhnlich ausschliesst.[1])

§ 5.

Neue Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation.

Anstatt die Differentialquotienten der Verschiebungskoordinaten ξ, η, ζ zu suchen, aus denen durch Quadratur dann die Werte der ξ, η, ζ selbst hergeleitet werden, kann man auch darauf ausgehen, diese Komponenten direkt darzustellen.[2]) Setzt man zu diesem Zwecke

1)
$$\begin{aligned}\xi &= \lambda\frac{\partial x}{\partial u} + \mu\frac{\partial x}{\partial v} + \nu p\\ \eta &= \lambda\frac{\partial y}{\partial u} + \mu\frac{\partial y}{\partial v} + \nu q\\ \zeta &= \lambda\frac{\partial z}{\partial u} + \mu\frac{\partial z}{\partial v} + \nu r,\end{aligned}$$

so wird

1[a])
$$\begin{aligned}\Sigma\left(\xi\frac{\partial x}{\partial u}\right) &= \lambda e + \mu f\\ \Sigma\left(\xi\frac{\partial x}{\partial v}\right) &= \lambda f + \mu g\\ \Sigma(\xi p) \quad &= \nu.\end{aligned}$$

Es sind also

$$\frac{\lambda e + \mu f}{\sqrt{e}}, \quad \frac{\lambda f + \mu g}{\sqrt{g}}, \quad \nu$$

---

[1]) So auch Bianchi, Lezioni vol. II, p. 60; die Flächen mit infinitesimaler Isometrie in sich sind zu Rotationsflächen isometrisch.

[2]) Dieser Ansatz findet sich, indessen unter Voraussetzung eines Orthogonalsystems der u, v auch bei Herrn Daniële, a. a. O., p. 28.

die Projektionen des Verschiebungsvektors ξ, η, ζ auf die Tangenten der Kurven v und u, und die Flächennormale. Aus den Bedingungen für eine beliebige Deformation, die wir jetzt

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = P$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 2\,Q$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = R,$$

schreiben, erhält man durch Einführung der Funktion ψ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&e\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u} + f\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = \nu E + P \\
&f\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right) + g\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F - \psi + Q \\
2)\quad &e\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} + f\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \nu F + \psi + Q \\
&f\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial g}{\partial u} + g\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = \nu G + R.
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung

$$g, \quad -f, \quad -f, \quad e$$

und addiert, so ergibt sich

$$3)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda\sqrt{H}}{\partial u} + \frac{\partial \mu\sqrt{H}}{\partial v} \\
&= \nu\left(\frac{Eg + Ge - 2fF}{\sqrt{H}}\right) + \frac{Pg - 2\,Qf + Re}{\sqrt{H}}.
\end{aligned}$$

Durch eine etwas andere Kombination kann man die Gleichungen 2) in die Form

$$2') \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda A + \mu B = \frac{\nu (Eg - Ff) + \psi f + Pg - Qf}{H} \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda B + \mu C = \frac{\nu (Fg - Gf) + \psi g + Qg - Rf}{H} \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} + \lambda A' + \mu B' = \frac{\nu (Fe - Ef) - \psi e + Qe - Pf}{H} \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} + \lambda B' + \mu C_1 = \nu (Ge - Ff) - \psi f + \frac{Re - Qf}{\sqrt{H}}
\end{aligned}$$

bringen, in denen linker Hand nur die Christoffel'schen Koeffizienten vorkommen. Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

$$-F, \quad E, \quad -G, \quad F,$$

so entsteht, wenn man die Codazzi'schen Gleichungen C) hinzuzieht:

$$4) \quad \partial \frac{(\lambda E + \mu F)}{\partial v} - \partial \frac{(\lambda F + \mu G)}{\partial u} = \frac{\psi}{H}(Eg + Ge - 2fF) - \frac{1}{H}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix}.$$

Ferner folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1^a):

$$5) \quad \begin{aligned}
&\partial \frac{\lambda e + \mu f}{\partial v} - \partial \frac{\lambda f + \mu g}{\partial u} = 2\psi \\
&\frac{\partial \nu}{\partial u} = \sum p \frac{\partial \xi}{\partial u} - (\lambda E + \mu F) \\
&\frac{\partial \nu}{\partial v} = \sum p \frac{\partial \xi}{\partial v} - (\lambda F + \mu G),
\end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen man auch 4) hätte direkt finden können, nach § 1, 5). — Bildet man ferner die Integrabilitätsbedingungen des Systemes 2), so ergibt sich, wenn man wieder die Codazzi'schen Gleichungen beachtet,[1])

[1]) Selbstverständlich ergeben sich diese Gleichungen auch aus den in § 3 bestimmten Werten der Ξ_u, Ξ_v nach 5).

$$6) \qquad -\mu = -\frac{E\frac{\partial \nu}{\partial v} - F\frac{\partial \nu}{\partial u}}{k H} - \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{S}{k H}$$

$$-\lambda = \frac{G\frac{\partial \nu}{\partial u} - F\frac{\partial \nu}{\partial v}}{k H} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{T}{k H},$$

wo $\frac{\psi}{\sqrt{H}} = \varphi$ die charakteristische Funktion bedeutet, und S und T durch die Bezeichnungen

$$S = \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} + A_1 R - B_1 Q + A Q - B P$$

$$T = \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial v} + C P - B Q + C_1 Q - B_1 R$$

des § 1 definiert sind.

Bildet man nun aus 6) die Gleichungen

$$-(\lambda E + \mu F) = \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{ES + FT}{k H}$$

$$-(\lambda F + \mu G) = \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{FS + GT}{k H},$$

so ergibt sich wieder durch Elimination von ν die partielle Differentialgleichung, der die Funktion φ zu genügen hat, in der Form

$$7) \quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{k\sqrt{H}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)}{k\sqrt{H}} + \partial\frac{\frac{ES+FT}{kH}}{\partial v} - \partial\frac{\frac{FS+GT}{kH}}{\partial u}$$

$$= -\frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg + Ge - 2fF) + \begin{pmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix}\frac{1}{H},$$

welche vollständig mit der in § 1 gegebenen übereinstimmt.

Die Gleichungen 2) und 6) bilden daher unter Voraussetzung von 7) ein System von sechs unbeschränkt integrabelen Differentialgleichungen, aus denen man die λ, μ, ν bestimmen kann, sobald die Werte derselben für irgend einen

Punkt beliebig festgesetzt sind.[1]) An und für sich wird dadurch freilich die Bestimmung der Transformation, welche nach Lösung von 7) nach § 1 nur noch Quadraturen verlangt, sobald die Fläche gegeben ist, nicht vereinfacht. Denn die Integration dieses Systems ist selbst wieder eine neue Aufgabe, die im wesentlichen auf die hinauskommt, die Koordinaten einer Fläche aus ihren sechs Fundamentalgrössen herzuleiten. Die wahre Bedeutung dieses Systems besteht vielmehr darin, dass durch dasselbe die Komponenten des Verschiebungsvektors auf eine von jeder Koordinatenbestimmung unabhängige Weise ausgedrückt sind, sobald man nur diese Fundamentalgrössen kennt.

In dem besonderen Falle der infinitesimalen Isometrie hat man übrigens an Stelle von 3), 4) und 6)

$$3') \qquad \frac{\partial \lambda \sqrt{H}}{\partial u} + \frac{\partial \mu \sqrt{H}}{\partial v} = \nu \frac{E g + G e - 2 f F}{\sqrt{H}},$$

$$4') \qquad \frac{\partial (\lambda E + \mu F)}{\partial v} - \frac{\partial (\lambda F + \mu G)}{\partial u} = \frac{\varphi}{\sqrt{H}} (E g + G e - 2 f F),$$

$$6') \qquad \begin{aligned} -\mu &= \frac{E \frac{\partial \nu}{\partial v} - F \frac{\partial \nu}{\partial u}}{k H} - \frac{1}{k \sqrt{H}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ -\lambda &= \frac{G \frac{\partial \nu}{\partial u} - F \frac{\partial \nu}{\partial v}}{k H} + \frac{1}{k \sqrt{H}} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, nehme man an, die Fläche sei eine Minimalfläche. Dann ist nach 3')

$$\lambda \sqrt{H} = \frac{\partial \varrho}{\partial v}$$

$$\mu \sqrt{H} = -\frac{\partial \varrho}{\partial u},$$

und nach Gleichung 5) wird

[1]) Vgl. auch einige Bemerkungen bei Herrn Danièle, a. a. O., p. 45.

$$2\varphi = \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial \dfrac{\left(e\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} - f\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}}}{\partial v} + \frac{\partial \dfrac{\left(g\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} - f\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right)}{\sqrt{H}}}{\partial u}\right);$$

d. h. bei den Minimalflächen ist die charakteristische Funktion[1]) der zweite Differentialparameter der Funktion ϱ, deren partielle Differentialquotienten die Grössen λ, μ bestimmen.

Andererseits ist nach 4')

$$\lambda E + \mu F = \frac{\partial \Theta}{\partial u}$$

$$\lambda F + \mu G = \frac{\partial \Theta}{\partial v},$$

oder, durch Auflösung nach den λ, μ

$$k H \lambda = G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$k H \mu = E\frac{\partial \Theta}{\partial v} - F\frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Setzt man diese Werte der λ, μ in die Gleichung 3') ein, so folgt

$$\frac{\partial \dfrac{G\dfrac{\partial \Theta}{\partial u} - F\dfrac{\partial \Theta}{\partial v}}{k\sqrt{H}}}{\partial u} + \frac{\partial \dfrac{E\dfrac{\partial \Theta}{\partial v} - F\dfrac{\partial \Theta}{\partial u}}{k\sqrt{H}}}{\partial v} = 0.$$

Dies aber sagt nach 7) aus, dass Θ wieder eine charakteristische Funktion für die gegebene Minimalfläche ist. Aus jeder infinitesimalen isometrischen Deformation einer Minimalfläche mit der charakteristischen Funktion lässt sich daher eine zweite mit der charakteristischen Funktion Θ durch Quadratur herleiten.

Da endlich auch noch nach 7)

---

[1]) Bis auf den Faktor $1/2$.

$$\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k\sqrt{H}} = \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

$$\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}} = -\frac{\partial \omega}{\partial v},$$

so folgt wegen

$$0 = \lambda E + \mu F + \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

$$0 = \lambda F + \mu G + \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

die Beziehung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0,$$

also

$$\Theta + \nu + \omega = \text{konst.}$$

Eine zweite Anwendung lässt sich auf die Flächen konstanter Krümmung machen. Multipliziert man die Gleichungen 6') mit $\sqrt{H}$ und bildet dann die Relation 3'), so folgt

$$-\nu\frac{(Eg + Ge - 2fF)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial \frac{E\frac{\partial \nu}{\partial v} - F\frac{\partial \nu}{\partial u}}{k\sqrt{H}}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{G\frac{\partial \nu}{\partial u} - F\frac{\partial \nu}{\partial v}}{k\sqrt{H}}}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

Besteht also eine Relation

$$F(\varphi, k) = 0,$$

so genügt die Funktion v, d. h. die Normalkomponente des Verschiebungsvektors wieder der partiellen Differentialgleichung 7), ist also eine charakteristische Funktion. Insbesondere ist diese Bedingung für die Flächen konstanter Krümmung von selbst erfüllt, und so folgt:

Aus jeder infinitesimalen Isometrie einer Fläche konstanter Krümmung mit der charakteristischen Funktion φ ergibt sich durch Quadraturen eine zweite, deren charakteristische Funktion die Normalkomponente des Verschiebungsvektors ist.[1])

Mit Hilfe der angegebenen Formeln lässt sich auch die Frage nach denjenigen Flächen, welche eine infinitesimale Isometrie in sich besitzen, ohne Anwendung eines speziellen Koordinatensystems entscheiden. Die Fläche wird in sich verschoben, wenn die Normalkomponente v des Vektors ξ, η, ζ Null ist; dann ist aber nach 3')

$$\lambda\sqrt{H} = \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$\mu\sqrt{H} = -\frac{\partial \eta}{\partial u},$$

und nach 6')

$$\lambda\sqrt{H} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\mu\sqrt{H} = +\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -k\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -k\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

folgt, dass φ und η Funktionen des Krümmungsmasses k allein sind. Die Gleichung

$$5)\qquad \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial \dfrac{e\dfrac{\partial \eta}{\partial v} - f\dfrac{\partial \eta}{\partial u}}{\sqrt{H}}}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \dfrac{g\dfrac{\partial \eta}{\partial u} - f\dfrac{\partial \eta}{\partial v}}{\sqrt{H}}}{\partial u}\right) = 2\varphi,$$

1) Auf einem ganz anderen Wege habe ich die beiden Sätze über Deformation von Minimalflächen und Flächen konstanter Krümmung bereits in diesen Berichten 1897, p. 269 hergeleitet.

in der η und φ Funktionen von k allein sind, sagt jetzt aus, dass der zweite Differentialparameter einer Funktion des Krümmungsmasses wieder eine Funktion desselben ist. Aber diese Beziehung ist noch nicht hinreichend; um eine zweite zu finden, entwickeln wir eine allgemeine Formel, die auch sonst Verwendung finden kann.

Für den Quadrat des Verschiebungsvektors

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

erhält man nach 1) den Wert

$$r^2 = \nu^2 + e\lambda^2 + 2f\lambda\mu + g\mu^2.$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen 2) aber folgt

$$2\lambda e\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda^2\frac{\partial e}{\partial u} + 2\lambda f\frac{\partial\mu}{\partial u} + \lambda\mu\frac{\partial e}{\partial v}$$

$$+ 2\mu f\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda\mu\left(2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v}\right) + 2\mu g\frac{\partial\mu}{\partial u} + \mu^2\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$= 2\nu(\lambda E + \mu F) - 2\mu\varphi\sqrt{H},$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = \nu(\lambda E + \mu F) - \mu\varphi\sqrt{H} + \nu\frac{\partial\nu}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = \nu(\lambda F + \mu G) + \lambda\varphi\sqrt{H} + \nu\frac{\partial\nu}{\partial v};$$

also nach 6')

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = -\mu\varphi\sqrt{H} - \frac{\nu}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = +\lambda\varphi\sqrt{H} + \frac{\nu}{k\sqrt{H}}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

In dem besonderen Falle, wo $\nu = 0$ sein soll, ist daher

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = -\frac{\varphi}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = -\frac{\varphi}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial v};$$

also auch r^2 eine Funktion von k allein. Demgemäss ist

$$r^2 = \lambda^2 e + 2\mu\lambda f + \mu^2 g$$

$$= \frac{e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{H},$$

d. h. der erste Differentialparameter einer Funktion von k wieder eine Funktion von k allein. Dies aber bildet mit der vorhin gefundenen Beziehung die Bedingung dafür, dass die Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch sein muss.

§ 6.

Umformung der Gleichungen des § 5.

Man kann die Gleichungen 2) des § 5 in eine viel übersichtlichere Form bringen, wenn man die Grössen $\lambda e + \mu f$, $\lambda f + \mu g$, welche durch $\sqrt{e}$, $\sqrt{g}$ dividiert die Projektionen des Verschiebungsvektors r auf die Tangenten der Kurven $v =$ konst, $u =$ konst sind, in sie einführt. Um eine kurze Ausdrucksweise zu haben, seien

$$1)\qquad \begin{aligned} \varrho &= \lambda e + \mu f \\ \sigma &= \lambda f + \mu g \end{aligned}$$

die auf die Koordinatenlinien reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors, die reduzierten Vektorkomponenten, genannt. Vermöge 1) nehmen die Gleichungen 2) des § 5 die Form an

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = \nu E + P \\
&\frac{\partial\varrho}{\partial v} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F + \psi + Q \\
&\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F - \psi + Q \\
&\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = \nu G + R.
\end{aligned}$$

Aber es bestehen die Gleichungen

$$\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u}\right)-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u}=-\varrho A-\sigma A_1$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\qquad\qquad=\quad\varrho B+\sigma B_1$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v}=-\varrho C-\sigma C_1,$$

so dass die Gleichungen des § 5 nun auch folgende Form annehmen

$$\text{2)}\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial \varrho}{\partial u}-\varrho A-\sigma A_1=\nu E+P\\
&\frac{\partial \varrho}{\partial v}-\varrho B-\sigma B_1=\nu F+Q+\psi\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial u}-\varrho B-\sigma B_1=\nu F+Q-\psi\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial v}-\varrho C-\sigma C_1=\nu G+R,
\end{aligned}$$

welche sich in manchen Fällen als besonders vorteilhaft erweist.

Ist die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, so wird wegen $E=G=0$ die erste und letzte Gleichung 2) von ν ganz unabhängig. Man hat daher zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung von ϱ und σ, ferner aus

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v}+\frac{\partial \sigma}{\partial u}-2(\varrho B+\sigma B_1)=2(\nu F+Q)$$

die Funktion ν. Hierdurch ist aber die Lösung des Problems auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt, denn nach Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$\text{3)}\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial u}-A\varrho-A_1\sigma=P$$

$$\text{4)}\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v}-C\varrho-C_1\sigma=R$$

ergeben sich die infinitesimalen Deformationen nach § 5, 1) ohne weitere Quadratur.

Ist insbesondere die Fläche eine auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Regelfläche, deren Erzeugende die Kurven $v =$ konst sind, so ist auch noch A_1 gleich Null. Man erhält also aus 3) die Funktion ϱ, wobei eine willkürliche Funktion V von v allein eingeführt wird, sodann aus 4) die Funktion σ, wobei eine willkürliche Funktion U von u allein eintritt. Dabei kann man noch bemerken, dass wegen der Gleichungen E) und C) des § 1

$$A = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - B_1; \quad 2 B_1 = -\frac{\partial \log \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial u},$$

mithin

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial v}$$

wird. Es werden daher bei beliebigen Werten der P und R, zur Integration von 3) und 4) nur zwei Quadraturen erfordert, da A und C_1 schon selbst Differentialquotienten bekannter Grössen sind, und man hat den Satz:

Alle infinitesimalen Deformationen einer Regelfläche von vorgeschriebenem Charakter lassen sich durch zwei Quadraturen bestimmen, sobald die Fläche in Bezug auf ihre Haupttangentenkurven völlig gegeben ist. Insbesondere ergeben sich also auch alle infinitesimalen Isometrieen der Regelflächen, wenn man setzt

$$\sqrt{F\sqrt{H}} = \Theta,$$

aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u}\Theta - \varrho \frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0$$

$$\frac{1}{\Theta^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\Theta - \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = C \frac{\varrho}{\Theta}.$$

Hiernach wird, wenn unter U, V wieder willkürliche Funktionen ihres entsprechenden Argumentes bedeuten

$$\varrho = \Theta V$$
$$\sigma = \Theta \int C V d v + U,$$

in welchen Gleichungen nur noch eine Quadratur vorkommt. Alle infinitesimalen isometrischen Deformationen lassen sich daher vermöge einer einzigen Quadratur unter der obigen Voraussetzung bestimmen.

Ist endlich die Regelfläche eine Fläche zweiten Grades, so hat man, da nun auch C gleich Null ist, ohne jede Quadratur für den Fall der Isometrie

$$\varrho = V\Theta$$
$$\sigma = U\Theta,$$

und im allgemeinen

$$\varrho = \Theta\left(V + \int \frac{P}{\Theta}\,du\right)$$
$$\sigma = \Theta\left(U + \int \frac{R}{\Theta}\,dv\right)$$

zu setzen.

Nimmt man andererseits in den Gleichungen 2) ν gleich Null an und setzt voraus, dass das System der Kurven $v =$ konst aus geodätischen Linien der Fläche gebildet sei, so findet man wegen $A_1 = 0$ aus der ersten Gleichung 2) durch Quadratur die Funktion ϱ; durch zwei weitere Quadraturen aus der letzten aber σ. Aus den beiden mittleren Gleichungen ergeben sich dann die Werte von φ und Q. Das heisst:

Man kann durch drei Quadraturen und zwei willkürliche Funktionen U, V alle infinitesimalen Verschiebungen einer Fläche in sich bestimmen, bei denen die Längenelemente der Kurven eines gegebenen Koordinatensystems, dessen eine Schar aus geodätischen Linien der Fläche besteht, in vorgeschriebener Weise deformiert werden.

Man kann die Gleichungen 1) noch weiter vereinfachen durch die Voraussetzung, dass auf der Fläche bereits das Koordinatensystem der u, v so gewählt sei, dass die Tangenten der Kurven $u =$ konst senkrecht zum Verschiebungsvektor stehen. Dann ist die reduzierte Komponente σ gleich Null und man hat

$$
5)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varrho A &= \nu E + P \\
\frac{\partial \varrho}{\partial v} - \varrho B &= \nu F + \psi + Q \\
- \varrho B &= \nu F - \psi + Q \\
- \varrho C &= \nu G + R.
\end{aligned}
$$

Die Kurven $u =$ konst sind auf der Fläche durch den Umstand charakterisiert, dass bei der betrachteten Deformation keine Verschiebung in der Richtung ihrer Tangenten stattfindet, sie sind die Kurven ohne Verschiebung, ihre orthogonalen Trajektorien sind dann als Verschiebungskurven zu bezeichnen, weil ihre Tangenten von den Projektionen des Verschiebungsvektors auf die zugehörige Tangentialebene der Fläche gebildet werden. Beschränkt man sich hier der Einfachheit halber auf den Fall der isometrischen Deformation $P = Q = R = 0$, so ergibt sich aus 5) durch Elimination von ψ und ν

$$
6)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} &= A - C \frac{E}{G} \\
\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} &= 2\left(B - C \frac{F}{G}\right).
\end{aligned}
$$

Sind also die Kurven $u =$ konst Kurven ohne Verschiebung bei irgend einer infinitesimalen Isometrie, so muss für die zugehörigen Fundamentalgrössen der Fläche die Beziehung stattfinden

$$
7)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(A - C \frac{E}{G}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial u}\left(B - C \frac{F}{G}\right)
$$

und umgekehrt sind alle Koordinatensysteme auf der Fläche, deren eine Schar $u =$ konst von Kurven ohne Verschiebung bei einer isometrischen infinitesimalen Deformation gebildet sein kann, durch diese Beziehung völlig charakterisiert; auch ist die zugehörige reduzierte Komponente ϱ dann jedesmal bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Diese Betrachtung gilt nur dann nicht, wenn $G = 0$ ist, d. h. wenn die Kurven ohne Verschiebung Haupttangentenkurven sein könnten. In diesem Falle muss nach der letzten Gleichung 5) notwendig auch C gleich Null sein, d. h. die Fläche ist eine Regelfläche. Das heisst:

Die einzigen Flächen, bei denen die Kurven ohne Verschiebung aus den Haupttangentenkurven einer Schar der Fläche gebildet sein können, sind die Regelflächen, jene Kurven selbst ihre Erzeugenden.

Und ebenso folgt für $C = 0$, falls nicht auch v gleich Null ist, also die Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch ist, dass auch $G = 0$ sein muss, d. h.:

Die einzigen Flächen, bei denen die Kurven ohne Verschiebung eine Schar von geodätischen Linien bilden, sind die Regelflächen, jene Kurven selbst ihre Erzeugenden, — mit Ausnahme der zu Rotationsflächen isometrischen Flächen. In der Tat gestatten ja auch die letzteren eine infinitesimale Verschiebung in sich, deren Richtung überall senkrecht steht zu den Bildern der Meridiane der korrespondierenden Rotationsfläche.

In der Gleichung 7) kann das System der Kurven $v =$ konst immer noch ganz willkürlich angenommen werden. Setzt man voraus — unter Ausschluss des soeben betrachteten Ausnahmefalles — dass die Kurven $v =$ konst zu den Kurven ohne Verschiebung konjugiert liegen, so ist nach den Gleichungen D) des § 1, wegen $F = 0$

$$B_1 G - C E - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

also

$$A - C\frac{E}{G} = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - 2 B_1 + \frac{\partial \log G}{\partial u},$$

und an Stelle der Bedingung 5) tritt nunmehr

8) $$\frac{\partial^2 \log G \sqrt{H}}{\partial u \, \partial v} = 2\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u}\right).$$

Andererseits kann man voraussetzen, dass die Kurven u, v das aus den Kurven ohne Verschiebung und den Verschiebungskurven gebildete Orthogonalsystem bilden. Dann ist in 7) die Fundamentalgrösse $f = 0$ zu setzen. Damit sind durch die Gleichung 7) und durch die Codazzi'schen Gleichungen diese charakteristischen Koordinatensysteme auf einer Fläche durch Eigenschaften der zugehörigen Fundamentalgrössen völlig definiert.

Ausgezeichnet ist hier der Fall der Kugel. Ist $f = 0$, so ist auch $F = 0$ und $E = k e$, $G = k g$, wo k das Krümmungsmass bezeichnet.

Die Gleichung 8), welche jetzt giltig sein muss, liefert aber, wenn man die B, B_1 nach A) § 1 einsetzt,

$$\frac{\partial^2 \log \frac{e}{g}}{\partial u \, \partial v} = 0 .$$

Auf der Kugel sind daher die Scharen der Kurven ohne Verschiebung von allen Kurvensystemen gebildet, welche die eine Schar eines isothermen Systemes zu bilden geeignet sind. Die zugehörige Schar des betreffenden isothermen Systems stellt dann die Verschiebungskurven vor. Auch ergibt sich aus der konjugierten Beziehung der beiden Kurvenscharen eines isothermen Systems, dass zu jeder infinitesimal isometrischen Deformation der Kugel eine zweite gehört. Und integriert man endlich die Gleichungen 6) unter der Voraussetzung

$$e = g, \quad E = G = k e,$$

so folgt

$$\varrho = \gamma e, \quad \nu = \frac{\gamma}{k} \frac{\partial \log e}{\partial u},$$

falls γ eine willkürliche Konstante bedeutet. Hierdurch sind alle infinitesimalen Isometrieen der Kugel in der anschaulichsten Weise bestimmt.

In den meisten Fällen wird allerdings, wie es scheint, die Beziehung zwischen den Fundamentalgrössen für die charakteristischen Orthogonalsysteme nicht einfach. Ich bemerke nur noch, dass für die Minimalflächen ($f = 0$, $Eg + Ge = 0$) die Gleichung 7) durch Integration die Form

$$4\,C\frac{F}{G} = \frac{\partial}{\partial v}\log(g\,e) + U,$$

wo U eine willkürliche Funktion von u, annimmt.

Diejenigen Flächen, auf denen, wie bei der Kugel, Kurven ohne Verschiebung aus einer Schar von Krümmungslinien gebildet sein können, sind übrigens ganz spezieller Natur. Man erhält zunächst unter der Annahme $f = 0$ aus der Gleichung 8) durch Integration

$$G = U\,V \cdot \sqrt{eg}$$

oder, indem man an Stelle der Variabeln u, v neue Funktionen desselben so einführt, dass die nur von u (v) abhängigen Funktionen U (V) in Konstanten übergeführt werden,

$$G = \gamma\sqrt{eg}.$$

Nach C) § 1 ist dann

$$\frac{\partial \log g}{\partial u} G + \frac{E}{2e}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

oder

$$E = \gamma\frac{\frac{\partial e}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\sqrt{eg}.$$

Aber diese beiden Ausdrücke für E und G müssen nun noch den zwei nicht berücksichtigten Codazzi'scheu Gleichungen genügen, woraus sich zwei partielle Differentialgleichungen für die e, g ergeben, die eine einfache Deutung nicht zu gestatten scheinen.

Die Gleichungen 2) haben ferner eine ausgezeichnete projektive Eigenschaft. Ich habe bei einer anderen Gelegenheit gezeigt,[1]) dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einer Fläche und die Christoffel'schen Koeffizienten bei einer allgemeinen projektiven Transformation der Fläche sich in folgender Weise ändern, dass, wenn man die entsprechenden Grössen für die projektiv verwandte Fläche durch in Klammern gesetzte Ausdrücke bezeichnet

$$(E) = \frac{\lambda}{t} E, \quad (F) = \frac{\lambda}{t} F, \quad (G) = \frac{\lambda}{t} G;$$

$$\begin{aligned}
(A) &= A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m E \\
(A_1) &= A_1 - \lambda n E \\
(B) &= B - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m F \\
(B_1) &= B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F \\
(C) &= C - \lambda m G \\
(C_1) &= C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda n G
\end{aligned}$$

wird. Dabei ist t der gemeinsame Nenner in den Transformationsgleichungen der Koordinaten

$$(x) = \frac{\xi}{t}, \quad (y) = \frac{\eta}{t}, \quad (z) = \frac{\zeta}{t},$$

während die Grössen λ, m, n einfach definiert werden können.[2])

Bezeichnet man nun die Grössen ϱ, σ, ν, P, Q, R für die transformierte Fläche F' durch ϱ_1, σ_1, ν_1, P_1, Q_1, R_1, so ist nach 2) und den angeführten Gleichungen

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Mathemat. Annal., Bd. 39, p. 177.

[2]) a. a. O., p. 191.

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} - \varrho_1\left(A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m E\right) - \sigma_1 (A_1 - \lambda n E) = \nu_1 \frac{\lambda}{t} E + P_1$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - \varrho_1\left(B - \frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda m F\right) - \sigma_1\left(B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F\right)$$
$$= \nu_1 \frac{\lambda}{t} F + \psi' + Q_1$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} - \varrho_1\left(B - \frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda m F\right) - \sigma_1\left(B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F\right)$$
$$= \nu_1 \frac{\lambda}{t} F - \psi' + Q_1$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \varrho_1 (C - \lambda m G) - \sigma_1\left(C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda n G\right) = \nu_1 \frac{\lambda}{t} G + R_1.$$

Setzt man nun

$$\varrho_1 t^2 = \varrho_2$$
$$\sigma_1 t^2 = \sigma_2$$
$$t \nu_1 \lambda - \lambda m \varrho_1 t^2 - \lambda n \sigma_1 t^2 = \nu_2$$
$$t^2 \psi'_1 - \sigma_1 t \frac{\partial t}{\partial u} + \varrho_1 t \frac{\partial t}{\partial v} = \psi_2,$$

so ergibt sich, wenn man die eben erhaltenen Gleichungen mit t^2 multipliziert und in geeigneter Weise zusammenzieht

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} - \varrho_2 A - \sigma_2 A_1 = \nu_2 E + t^2 P_1$$

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} - \varrho_2 B - \sigma_2 B_1 = \nu_2 F + t^2 Q_1 + \psi_2$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} - \varrho_2 B - \sigma_2 B_1 = \nu_2 F + t^2 Q_1 - \psi_2$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \varrho_2 C - \sigma_2 C_1 = \nu_2 G + t^2 R_1.$$

Das sind aber gerade die Gleichungen 2) für die gegebene Fläche, falls man die $t^2 P_1$, $t^2 Q_1$, $t^2 R_1$ durch P, Q, R ersetzt. Hieraus ergibt sich ein, wie es scheint, sehr fruchtbarer Satz:

Man erhält alle infinitesimalen Deformationen des vorgeschriebenen Charakters P_1, Q_1, R_1 einer durch projektive Transformation aus F hervorgegangenen

Fläche F' aus den Deformationen der gegebenen Fläche F vom Charakter $P_1 t^2$, $Q_1 t^2$, $R_1 t^2$.

Dabei bestehen für die reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors die Gleichungen

$$\varrho_1 t^2 = \varrho$$
$$\sigma_1 t^2 = \sigma,$$

welche für den Fall der Affinität $t =$ konst besonders merkwürdig erscheinen. Insbesondere aber findet bei allen projektiven Transformationen die Beziehung[1])

$$\frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

statt. Endlich hat man für die zu den charakteristischen Funktionen der betreffenden Funktionen gehörigen Funktionen ψ_1 und ψ die Gleichung

$$t^2\left(\psi_1 - \tfrac{1}{2}\left(\varrho_1 \frac{\partial \log \sigma_1}{\partial v} - \sigma_1 \frac{\partial \log \varrho_1}{\partial u}\right)\right) = \psi - \tfrac{1}{2}\left(\varrho \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} - \sigma \frac{\partial \log \varrho}{\partial u}\right).$$

Aus der soeben angegebenen Gleichung folgt für $\sigma = 0$ auch $\sigma_1 = 0$; mithin:

Bei allen projektiven Transformationen bleiben die Kurven ohne Verschiebung einer Fläche invariant.

Für die infinitesimale Isometrie kann man diesen Satz auch unmittelbar aus der Gleichung 7) entnehmen, welche die Kurven ohne Verschiebung charakterisiert. Denn diese Gleichung hat selbst einen absolut invarianten Charakter bei projektiven Transformationen, sie geht geradezu in die folgende

$$\frac{\partial}{\partial v}\left((A) - (C)\frac{(E)}{(G)}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left((B) - (C)\frac{(F)}{(G)}\right)$$

---

[1]) In Bezug auf dasjenige Koordinatensystem, für welches

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = e_1\,du^2 + 2f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2$$

wird, gilt dieser Satz von den wirklichen Komponenten. Aber dieses System ist nicht immer reell.

über, sowie man an Stelle der $A, B, C \ldots$ die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke substituiert. Man erkennt daraus zugleich in Rücksicht auf die frühere Bemerkung über die Verschiebungskurven der Kugel den geometrischen Charakter der Verschiebungskurven auf den Flächen zweiten Grades.

Eine andere Anwendung lässt sich auf diejenigen Flächen F' machen, welche einer gegebenen Fläche F überhaupt mit Erhaltung der Längenelemente entsprechen oder zu ihr isometrisch sind. Es wird dabei einer Richtung auf F, der ein Normalschnitt mit dem Krümmungshalbmesser R entspricht, eine Richtung auf F' zugeordnet sein, welcher der Krümmungshalbmesser R_1 des zugehörigen Normalschnittes zukommt. Bei diesem Prozesse gehen die Fundamentalgrössen E, F, G von F in die entsprechenden E', F', G' von F' über, während die $A, B, C \ldots$ völlig ungeändert bleiben. Wird nun verlangt, die gegebene Fläche F mit dem Charakter

$$\nu' E', \quad \nu' F', \quad \nu' G'$$

zu deformieren, so sind die Gleichungen 2)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} - A\varrho - A_1 \sigma - \nu E - \nu' E' = 0$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} - B\varrho - B_1 \sigma - \nu F - \nu' F' - \psi = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} - B\varrho - B_1 \sigma - \nu F - \nu' F' + \psi = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} - C\varrho - C_1 \sigma - \nu G - \nu' G' = 0.$$

Dieselben sind aber völlig symmetrisch in den Grössen, welche sich auf die eine oder die andere Fläche beziehen. Daraus entspringt der folgende Reziprozitätssatz:

Sind ϱ, σ, ν die (reduzierten) Komponenten des Verschiebungsvektors für die gegebene Fläche bei derjenigen Deformation, welche das Längenelement derselben nach dem Gesetze

$$\delta\, d s = \varepsilon\, \nu' \frac{d s}{R_1}$$

umformt, so sind ϱ, σ, ν' zugleich die reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors für die isometrische Fläche, welche nach dem Gesetze

$$\delta\, d s = \varepsilon\, \nu \frac{d s}{R}$$

deformiert wird.

Um von diesem sehr allgemeinen Satze wenigstens eine Anwendung zu machen, sei jetzt F eine Fläche positiver konstanter Krümmung und F′ diejenige Kugel, welche zu ihr auf irgend eine Weise in isometrische Beziehung versetzt ist. Alsdann sind die Koeffizienten $E'\ F'\ G'$ den e, f, g selbst proportional; d. h. man hat eine konforme infinitesimale Deformation von F. Diese lässt sich aber ausführen, wenn man die Kugel in vorgeschriebener Weise deformieren kann, und letztere Aufgabe ist in diesem Paragraph vollständig gelöst. Kennt man aber eine Transformation, welche die Fläche konstanter Krümmung auf die Kugel isometrisch bezieht, so kennt man auch alle Transformationen dieser Art, und so ergibt sich schliesslich der Satz:

Kennt man für eine Fläche konstanter positiver Krümmung irgend eine Transformation, durch welche sie isometrisch auf die Kugel bezogen ist, so lassen sich auch alle konformen infinitesimalen Deformationen der Fläche ermitteln.
