Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Von Carl Sigismund Hilbert.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung hat eine ältere Geschichte und eine neuere. In der älteren Geschichte desselben handelt es sich, kurz gesagt, um die Beziehung einer mathematischen Formel zu ihrer metaphysischen Deutung, in der neueren Geschichte um seine Beziehung zum d'Alembert'schen Prinzip.

Es ist wesentlich das Verdienst von Hölder[1]) und Voss,[2]) nicht allein eine klare und bestimmte Formulierung des genannten Prinzipes gegeben zu haben, sondern auch gleichzeitig eine Gebrauchsanweisung für alle in der Mechanik denkbaren Fälle, sei es, dass die Zeit explicite in der Kräftefunktion oder in den Bedingungsgleichungen auftritt, oder dass keine Kräftefunktion existiert, oder dass die Bedingungsgleichungen durch einen Pfaff'schen Ausdruck gegeben sind, geliefert zu haben, alles dies auch für den Fall allgemeiner Koordinaten.

Von nicht geringerer Bedeutung für das Verständnis des Prinzipes sind die vorangegangenen Arbeiten über Variationsrechnung von A. Mayer, und die Anwendung derselben auf das Prinzip.

---

1) Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius, Göttinger Nachrichten 1896.

2) Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius, ibid. 1900.

Mayer[1]) und ein Jahr später Helmholtz[2]) im Anschlusse an ersteren gingen auf Lagrange zurück und zeigten in besonderen Fällen, die allerdings mechanisch nicht so allgemein sind, wie die Voraussetzungen, die Hölder und Voss machen, dass die Lagrange'schen Behauptungen tatsächlich richtig sind.

Damit wurde der Vorwurf auch entkräftet, den Jacobi, von dem die neuere Geschichte des Prinzipes datiert werden kann, gegen Lagrange erhob, indem er ein besonderes Prinzip formulierte, in welchem er bekanntlich aus dem Aktionsintegrale die Zeit gänzlich eliminierte.

Die folgende Arbeit wird das Lagrange'sche Resultat bestätigen, dass die gesamte Mechanik auf das Prinzip der kleinsten Wirkung gegründet werden kann. Wir werden dann in § 7 sowohl die Arbeiten von Hölder und Voss als diejenigen von Mayer und Helmholtz nochmals besprechen.

§ 1. Die Differentialgleichungen der Dynamik.

Wir betrachten die Bewegung eines Systemes von n Punkten mit den Massen m_i und den Koordinaten $x_i\, y_i\, z_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Diese Koordinaten seien wiederum dargestellt als Funktionen von $\mu = 3\,n$ neuen Variabelen q_i $(i = 1, 2, \ldots 3\,n)$.

Die halbe lebendige Kraft sei T und U die Kräftefunktion, die ausser den Koordinaten q noch die Zeit t explicit enthalten soll.

Was die Bedingungsgleichungen anbetrifft, so wollen wir zwei Fälle unterscheiden. Es soll sowohl der Fall betrachtet werden, dass die k Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht explicit enthalten und von der Form

---

[1]) Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Prinzips der kleinsten Aktion in der Dynamik entsprechen; Berichte der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Novb. 1886.

[2]) Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, März 1887; Gesammelte Abhandlungen Bd. 3, p. 249 ff.

$$\omega_i(q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0 \tag{1}$$

seien, als auch der andere Fall, dass die Bedingungsgleichungen t explicit enthalten:

$$\bar{\omega}_i(q_1, q_2, \ldots q_\mu, t) = 0. \tag{2}$$

Als die zweite Form der Lagrange'schen Differentialgleichungen der Bewegung, wenn keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, bezeichnen wir das System von $3n$ Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{3}$$

Durch dieselben Gleichungen wird aber auch noch die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen dargestellt, falls Bedingungsgleichungen der Form (1) oder der Form (2) vorhanden sind,[1]) dabei aber $\mu = 3n - k$ Koordinaten q so gewählt sind, dass die k Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sind. Die Anzahl der Gleichungen (3) ist dann $3n - k = \mu$.

Statt der Form (3) wollen wir uns auch der Form:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i}; \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}, \tag{4}$$

die sich nur in der Bezeichnungsweise von (3) unterscheidet, bedienen.

Ferner wollen wir uns auch der Hamilton'schen Form der Bewegungsgleichungen bedienen. Diese Form, welche aus den Lagrange'schen Gleichungen gefolgert wird, ist, wenn man $H = T - U$ setzt, und in dem Ausdrucke von T für die Grösse q_i' überall, die in (4) definierten Grössen p_i einführt, die folgende:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad H = T - U. \tag{5}$$

---

[1]) Für den Fall der Bedingungen (2) gab Vieille dies Resultat, 1849; vgl. die Darstellung von Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enzyklopädie der Mathematik, IV, 1, 1901.

Sind Bedingungsgleichungen der Form (1) oder (2) vorhanden und sind die q beliebig gegeben, so lautet die zweite Form der Lagrange'schen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial q_\varrho}. \tag{6}$$

§ 2. Die Analoga des Satzes der lebendigen Kraft.

Von dem Satze der lebendigen Kraft ist es üblich nur dann zu reden, wenn sowohl die Kräftefunktion U, wie auch die Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht explizit enthalten. Ist dieser Einschränkung nur in Bezug auf U nicht genügt, so wollen wir die Differentialgleichung

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

das Analogon I des Satzes von der lebendigen Kraft nennen. Diese Gleichung hat Jacobi aus den Gleichungen (4) in der neunten Vorlesung über Dynamik ausführlich bewiesen.[1])

In die Gleichung (7) gehen die Bedingungsgleichungen, falls dieselben die Zeit nicht enthalten, nicht ein.

Enthalten aber die Bedingungsgleichungen sowie auch U die Zeit explizit, so soll die Differentialgleichung:

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

das Analogon II des Satzes von der lebendigen Kraft genannt werden.

§ 3. Die Prinzipalfunktion.

Wir definieren die Funktion V durch die Gleichungen

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt; \quad \varphi = T + U, \tag{9}$$

wo wir in T uns wieder die p_i statt der q_i' eingeführt und somit φ als eine Funktion von $t, p_1, p_2, \ldots p_\mu, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ denken. Dann gelangt man in bekannter Weise, indem man

[1]) Ein neuer Beweis aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt am Schluss des § 6.

die Gleichungen (4) integriert, zu einer Bestimmungsweise der Funktion V, welche V als Funktion der Grössen

$$q_1, q_2, \ldots q_\mu, t, q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0, t_0$$

darstellt, wo die q_i dem Werte t der oberen Grenze des Integrales $\int_{t_0}^{t} \varphi\, d\, t$, die q_i^0 dem Werte t_0 entsprechen.

Die Variation dieser Funktion V, der Hamilton'schen Prinzipalfunktion, ist

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta V = & \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots \frac{\partial V}{\partial q_\mu} \delta q_\mu \\ & + \frac{\partial V}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \frac{\partial V}{\partial q_2^0} \delta q_2^0 + \cdots \frac{\partial V}{\partial q_\mu^0} \delta q_\mu^0 \\ & + \frac{\partial V}{\delta t} \delta t + \frac{\partial V}{\partial t_0} \delta t_0 . \end{aligned} \right.$$

§ 4. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Auf Grund insbesondere der Arbeiten von Hölder und Voss formulieren wir das Prinzip der kleinsten Wirkung folgendermassen:

Setzt man $\varphi = T + U$, und variiert man das Integral $V = \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\, t$ derart, dass nur Variationen δq_i den Koordinaten und die Variation δt der Zeit vorkommt, so soll der Integralbestandteil der auf diese Weise entwickelten Variation δV gleich Null gesetzt, die Differentialgleichungen der Mechanik ergeben, falls keine Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind.

Sind Bedingungsgleichungen vorgeschrieben, und bezeichnet man mit δJ den Integralbestandteil der Variation δV, so erhält man, wenn die Bedingungsgleichungen von der Form (1) sind, die Bewegungsgleichungen aus folgender Gleichung des Prinzipes der kleinsten Wirkung:

$$(11)\qquad \delta J + \int_{t_0}^{t_1} d\, t \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho = 0.$$

Die Gleichung des nämlichen Prinzipes lautet aber, wenn die Bedingungsgleichungen die Zeit explizit enthalten, wie folgt:

$$\partial J + \int_{t_0}^{t_1} d\,t \left(\Sigma\, \lambda_\varrho \frac{\partial\, \bar{\omega}_\varrho}{\partial\, q_\varrho}\, \delta\, q_\varrho + \delta\, t\, \Sigma\, \lambda_\varrho \frac{\partial\, \bar{\omega}_\varrho}{\partial\, t} \right) = 0. \tag{12}$$

Wir stellen sogleich das Variationsresultat an die Spitze und bemerken, dass wir dasselbe am Schlusse mit Hilfe der Einführung eines Parameters ausführlich entwickeln werden.

Die Variation lautet:

$$\begin{aligned} \delta\, V = \delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\,t = &\left[\Sigma \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, q_i'}\, \delta\, q_i + \left(\varphi - \Sigma \frac{\delta\, \varphi}{\partial\, q_i'}\, q_i' \right) \delta\, t \right]_{t_0}^{t_1} \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} d\,t\, \Sigma\, \delta\, q_i \left(\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, q_i} - \frac{d}{d\,t} \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, q_i'} \right) \\ &+ \int d\,t\, \delta\, t \left(\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, t} - \frac{d}{d\,t} \left(\varphi - \Sigma \frac{\delta\, \varphi}{\partial\, q_i'}\, q_i' \right) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Um das Raisonnement, welches sich an diese Gleichung anschliesst, kürzer ausdrücken zu können, schreiben wir auch statt (13)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\,t = \delta\, A + \delta\, B + \delta\, L + \delta\, M, \tag{14}$$

wo $\delta\, L$ und $\delta\, M$ die beiden Integralbestandteile der Gleichung (13) bezeichnen, $\delta\, A$ und $\delta\, L$ nur Variationen $\delta\, q_i$ und $\delta\, B$ sowie $\delta\, M$ nur die Variation $\delta\, t$ enthalten.

§ 5. Ableitung der Differentialgleichungen der Mechanik aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

I. Es seien zuerst keine Bedingungsgleichungen vorgeschrieben; dann folgt aus der Gleichung

$$\delta\, J = \delta\, L + \delta\, M = 0$$

des Prinzipes (da die $\delta\, q_i$ untereinander und von t unabhängig sind):

$$\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, q_i} - \frac{d}{d\,t} \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, q_i'} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) = 0 \tag{16}$$

Die Gleichung (15) ist aber identisch mit (3) und die Gleichung (16) ist identisch mit (7), und da, wie Jacobi gezeigt (7) eine Folge aus (4) und (4) gleichwertig mit (3), so ist (16) eine Folge von (15).

II. Sind Bedingungsgleichungen der Form (1) vorgeschrieben, so folgen aus der Gleichung (11) die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d t}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial q_\varrho} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) = 0. \tag{18}$$

Die Gleichung (17) ist identisch mit (6) und die Gleichung (18) wieder mit (7). Es folgt aber (7) aus (6) und mithin (18) aus (17).

III. Die Bedingungsgleichungen seien von der Form (2). Es folgen dann aus der Gleichung (12) des Prinzipes die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d t}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial q_\varrho} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

wo (20) mit (8) identisch ist, und also (20) wiederum aus (19) folgt. — Durch die Art, wie wir die Bedingungsgleichungen eingeführt haben, sind die δq_i untereinander und von t unabhängig.

§ 6. Ableitung der Ausgangsgleichungen der Hamilton-Jacobi'schen Theorie, aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

Setzen wir voraus, dass die Bedingungsgleichungen durch independente Koordinaten q_i identisch erfüllt seien, so erhält man infolge der Gleichung $\delta L = 0$ die Variation (10)

$$(10)\qquad \delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_i}\,\delta q_i + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_i^0}\,\delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t}\,\delta t + \frac{\delta V}{\delta t_0}\,\delta t_0.$$

$\delta L = 0$ ist das Hamilton'sche Prinzip. Wir haben aber gezeigt, dass die Gleichung $\delta L = 0$ die andere $\delta M = 0$ nach sich zieht. Mithin ist die Gleichung (10) eine Folge der Gleichung $\delta L + \delta M = 0$ des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Nun folgt aber weiter aus der letzten Gleichung die andere;

$$(21)\qquad \delta V = \delta A + \delta B$$

oder ausführlich

$$(22)\qquad \delta V = \left[\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i + \left(\varphi - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}\,q_i'\right)\delta t\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Aus (22) folgen aber in Verbindung mit (10) die Gleichungen:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = p_i = \dfrac{\partial V}{\partial q_i}, & -\dfrac{\partial \varphi^0}{\partial q_i'} = -p_i^0 = \dfrac{\partial V}{\partial q_i^0} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t} = \varphi - \Sigma p_i q_i', & \dfrac{\partial V}{\partial t_0} = \Sigma p_i^0 q_i^{0\prime} - \varphi^0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind mit den Gleichungen (4) und (5) der neunzehnten Vorlesung über Dynamik im Jacobi identisch.

Wir fügen hier noch eine neue Beweismethode der Differentialgleichung (7) hinzu, die Jacobi auf seine Art in der achten Vorlesung ableitet.

Wir haben zu zeigen, dass aus $\delta L = 0$ die Gleichung $\delta M = 0$ als identische Folge hervorgeht.

Wir transformieren den Ausdruck δM dadurch, dass wir die Funktion V einführen; man erhält dann, indem man $\varphi = \dfrac{dV}{dt}$ setzt und die aus $\delta L = 0$ folgenden Relationen (23) benutzt,

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta t\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{dV}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt} - \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right)\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \delta t\,dt \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{dV}{dt} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right) = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 7. Vergleichung mit früheren Arbeiten.

Wir haben im Voraufgegangenen von den allgemeineren Voraussetzungen Abstand genommen, dass erstens keine Kräftefunktion gegeben sei, und dass zweitens die Bedingungsgleichungen durch sogenannte Pfaff'sche Ausdrücke, oder, in Beziehung auf die Mechanik nach der Bezeichnung von Hertz, in nicht holonomer Form gegeben seien.

Den Arbeiten von Hölder und Voss über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius lagen die genannten allgemeinen Voraussetzungen zugrunde; die in dieser Arbeit abgeleiteten Resultate gehen aus Resultaten der genannten Autoren durch Spezialisierung hervor.

Der Unterschied in der Ableitung besteht darin, dass die gegenwärtigen Entwicklungen die Variationsgleichungen von Hölder und Voss in Differentialgleichungen ausdrücken.

Hierdurch dürfte das Prinzip der kleinsten Wirkung übersichtlicher und durchsichtiger erscheinen, unter den gemachten Voraussetzungen.

Andererseits haben die an die Gleichungen zwischen Variationen sich a. a. O. anschliessenden begrifflichen und geometrischen Deutungen der Gleichungen einen grossen Wert, abgesehen von der bereits erwähnten Allgemeinheit der Variationsbetrachtungen.

Um das eben Gesagte deutlich hervortreten zu lassen, gehe ich auf die Hölder'sche Relation

$$\delta T = \delta' U, \tag{24}$$

die Gleichung (8) der genannten Arbeit, mit einigen Worten ein.

Wie bekannt, fordert die Variationsrechnung eine stetige punktweise „Zuordnung" zwischen wirklicher und variierter Bewegung.

Während nun beim Hamilton'schen Prinzip derartig variiert wird, dass zugeordnete Systemlagen gleichzeitig durchschritten werden, findet dies beim Prinzip von Maupertius im Allgemeinen nicht statt. Die Forderung lautet hier, „dass der

Unterschied der lebendigen Kraft für entsprechende Zustände beider Bewegungen gleich sein soll der Arbeit, welche die wirkenden Kräfte für eine die entsprechenden Lagen verbindende Verrückung gemäss der Gleichung (24) leisten würden."

Aber während darauf, dass zugeordnete Systemlagen gleichzeitig durchlaufen werden, im Allgemeinen nicht gesehen wird, hat Hölder gezeigt, dass es stets ratsam und oft nötig ist, die Variationen so vorzunehmen, dass man von irgend einer Systemlage zur „zugeordneten" variierten Lage durch „virtuelle" Verschiebungen gelangte. Es ist dieses zwar nicht stets notwendig, allein man kann, insbesondere in zwei Fällen bei anderer Variationsart in Klippen geraten, dies sind die Fälle nicht holonomer Bedingungsgleichungen und solcher Bedingungsgleichungen, welche die Zeit explizit enthalten.

Im Falle nicht holonomer Bedingungsgleichungen sind virtuelle Variationen sowohl bei dem Prinzip von Hamilton als auch bei denjenigen der kleinsten Wirkung erforderlich. Enthalten die Bedingungsgleichungen die Zeit explizit, so ist die Erfüllung der genannten Forderung beim Hamilton'schen Prinzip erlässlich, beim anderen Prinzip ist darauf zu achten.

Diesen letzteren Fall will ich nun näher untersuchen, da hier Voraussetzungen zugrunde liegen, die in den Bereich dieser Arbeit gehören.

Aber dieser Fall erledigt sich sofort durch nähere Betrachtung der Gleichung (12).

Hier sind die Bedingungsgleichungen, welche die Zeit explizit enthalten, so in das Prinzip eingeführt, dass die $\delta \zeta_i$ keine virtuellen Verschiebungen sind; dennoch liefert das Prinzip die Differentialgleichungen der Mechanik.

Beim Hamilton'schen Prinzip hat Hölder bereits bemerkt, dass es gleichgiltig ist, ob wir setzen

$$\delta \omega_i = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \omega_i - \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \delta t = 0,$$

da $\delta t = 0$ wird und die letztere Gleichung sich auf die erstere reduziert.

Nunmehr sieht man klar, dass bei dem anderen Prinzip die δq_i nicht an virtuelle Verschiebungen zu binden sind. Hierauf zielt Hölder mit den Worten „In diesem Falle sind wirkliche und variierte Bewegung ungleichartig."

Trotz den verschiedenen Ausgangspunkten sind wir mit Hölder in Übereinstimmung, denn die Hölder'sche Relation

$$\delta T = \delta' U$$

ist nichts anderes, als unser Analogon des Satzes von der lebendigen Kraft. Unter dem gestrichenen δ' ist nämlich verstanden, dass die Variation so vorgenommen werden soll, dass die Verschiebungen virtuelle sind. Wir haben also

$$\delta' U = \frac{dU}{dt}\delta t - \frac{\partial U}{\partial t}\delta t.$$

Nun ist aber

$$\delta T = \frac{dT}{dt}\delta t.$$

Mithin erhält man aus $\delta T - \delta' U = 0$ die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

und dieses ist unsere Gleichung (7).

In der Einleitung hatte ich bemerkt, dass die Arbeiten von Mayer und Helmholz die von Jacobi angefochtene Lagrange'sche Begründung des Prinzipes der kleinsten Wirkung rechtfertigen.

A. Mayer legt eine Funktion zu Grunde, die analytisch genommen allgemeiner ist als die hier betrachtete Funktion $\varphi = T + U$, die aber mechanisch betrachtet weniger allgemein ist, insofern diese Funktion die Variabele t nicht explicit enthält.

Es wird von dem genannten Autor gezeigt, dass man eine Differentialgleichung, die im Speziellen der Satz der lebendigen Kraft ist, als Bedingungsgleichung vorschreiben kann, und dann mit Hülfe dsr Lagrange'schen Multiplikationsmethode[1]) durch

[1]) Wesentlich dieselbe Rechnungsweise wendet Helmholtz a. a. O. an.

Nullsetzen der Variation des betreffenden Integrals die dynamischen Differentialgleichungen erhält. Aber Mayer leitet letztere noch auf einem zweiten Wege ab, der mit dem von uns eingeschlagenen eine enge Verwandtschaft zeigt; hierbei richtet er die Variationen so ein, dass ein Parameter $\delta \vartheta$ eingeführt wird (vgl. unten § 8), wo dann δt nicht wie sonst gleich Null gesetzt werden darf. Als Faktor von δt ergibt sich vielmehr bei Ausführung der Variation derjenige Ausdruck, welcher infolge des Prinzipes von der lebendigen Kraft verschwindet,[1]) ganz wie es oben in Gleichung (13) der Fall war. Der Unterschied von unserer obigen Darstellung besteht darin, dass Mayer die Gleichung der lebendigen Kraft als erfüllt voraussetzt, während wir umgekehrt ihr Bestehen daraus schliessen, dass auch der Faktor der Variation δt verschwinden muss, und dann nachträglich bestätigen, dass sie auch eine Folge des Verschwindens der Faktoren der einzelnen Variationen δq_i ist.

Abgesehen hiervon ist unsere Entwicklung allgemeiner als diejenige von Mayer, da wir zulassen, dass die Zeit in der Kräftefunktion und in den Bedingungsgleichungen explizite vorkommt.

Diese Entwicklungen zusammenfassend, können wir das erlangte Resultat in folgender Weise aussprechen:

1) Die Grundlage der Dynamik bildet das d'Almbert'sche Prinzip,[2]) bei dem die vorkommenden Variationen als virtuelle (d. h. $\delta t = 0$) zu deuten sind.

[1]) Dieselbe Art der Variationsausführung findet sich übrigens auch bei Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist; Crelle's Journal, Bd. 74, 1874, p. 121 f. Königsberger (Über die Prinzipien der Mechanik, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Juli 1896) nimmt zwar auch δt von Null verschieden an, zieht aber die Glieder (mit Hilfe des Satzes von der lebendigen Kraft) anders zusammen, so dass das Glied mit δt nur ausserhalb des Integrals, nicht wie in (13) unter dem Integralzeichen vorkommt; Königsberger berücksichtigt aber die Annahme, dass U auch von dem Differentialquotienten der Koordinaten abhängt.

[2]) Die eventuelle Zurückführung desselben auf andere Grundvor-

2) Mit diesem Prinzipe sind diejenigen von Hamilton und Maupertius vollkommen äquivalent; auch in ihnen sind deshalb im Allgemeinen virtuelle Variationen anzuwenden.

3) Trotzdem ist es bei dem in § 4 formulierten Prinzipe der kleinsten Wirkung dann, wenn die Zeit explizite vorkommt, erforderlich, die Variationen als nicht virtuelle einzuführen; denn das Verschwinden des Faktors von δt in der Variation der Integrale ist nichts anderes als der Satz von der lebendigen Kraft, bezw. dessen Analogon.

Nichtholonome Bedingungen bedürfen indessen noch einer besonderen Behandlung.

§ 8. Ableitung der obigen Formel (13).

Um unseren Gedankengang nicht zu unterbrechen, haben wir die Formel (13) zunächst ohne Beweis hingestellt. Es erübrigt jetzt noch dieselbe zu begründen.

Sei $f(q_i, q_i', t)$ eine Funktion der μ Grössen $q_1, q_2, \dots q_\mu$, sowie der Grössen $q_1' = \frac{d q_1}{d t}$, $q_2' = \frac{d q_2}{d t}$, $\dots q_0' = \frac{d q_\mu}{d t}$ und der Grösse t explizit, so bestimmen wir die Variation

$$\delta \int f\, d t,$$

indem wir die Integrationsveränderliche t ebenfalls der Variation unterwerfen.

Dieser Fall ist bisher formell noch nicht vollständig durchgeführt worden. Man hat sich bisher in der vollständigen formellen Durchführung auf den Fall beschränkt, dass

$$\delta \int f\, d t = \int d t\, \delta f. \qquad \text{I)}$$

Wir untersuchen nun im Besonderen die Variation

$$\int \delta (f\, d t). \qquad \text{II)}$$

Durch Einführung eines Parameters, den wir mit τ be-

stellungen hat neuerdings Lindemann behandelt; vgl. p. 77 ff. des vorliegenden Bandes der Sitzungsberichte.

zeichnen wollen, kann man die Variation II) auf die Variation I) zurückführen.

Wir führen jetzt folgende Substitutionen ein:[1])

$$\left.\begin{aligned} & q_i = y_i(\tau) \quad , \quad t = z(\tau). \\ & \text{Hiernach setzen wir ferner} \\ & d q_i = y_i' \cdot d\tau \quad , \quad d t = z' d\tau, \\ \text{wo} \quad & y_i' = \frac{d y_i}{d\tau} \quad , \quad z' = \frac{d z}{\partial \tau}, \\ & q_i' = \frac{y_i' \, d\tau}{z' \, d\tau} = \frac{y_i'}{z'}. \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

Infolge dieser Substitution III) wird das zu variierende Integral $\int f\,dt$ in das Integral $\int f(y_i, y_i', z)\, z'\, d\tau$ transformiert. Setzen wir $f \cdot z' = F$, so schreibt sich das letztere Integral einfach $\int F\, d\tau$. Nunmehr aber ist die Variation $\int d\tau\, \delta F$ identisch mit der Variation II) nämlich mit $\int \delta(f\,dt)$, und wir haben mithin, um die letztere Variation II) zu bilden, nur die Variation $\int d\tau\, \delta F$ d. h. I) zu bilden.

Nach bekannter Methode setzen wir demnach:

$$\left.\begin{aligned} \int \delta(f\,dt) &= \int \delta F \cdot d\tau \\ &= \int_0^1 \Big[\Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \\ &\quad + \Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z' \Big] d\tau, \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Hierin setzen wir:

$$\delta y_i' = \frac{d}{d\tau} \delta y_i, \quad \delta z' = \frac{d}{d\tau} \delta z,$$

und indem wir nun partiell integrieren, kommt:

[1]) Vergl. Helmholtz a. a. O.

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \delta F d\tau = & \left[\Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial z'}\right]_0^1 \\ & + \int_0^1 \left[\Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i} \partial y_i - \Sigma \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) \delta y_i\right] d\tau \\ & + \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial z} \delta z \quad - \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) \delta z\right] d\tau.\end{aligned}\right\} \quad \text{V)}$$

Wir haben jetzt wieder die ursprüngliche Veränderliche $q_i\, q_i'$ und t in dieser Formel V) einzuführen.

Hiezu dienen folgende Rechnungen:

Wir betrachten die Veränderliche y_i' und z' als implizit in f, nämlich in dem q_i' vorkommend und sehen infolgedessen:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y_i'} = \frac{\partial f}{\partial q_i'} \frac{\partial q_i'}{\partial y_i'} \\ & \frac{\partial q_i'}{\partial y_i'} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{y_i'}{z'}\right) = \frac{1}{z'} \\ \text{ferner} \quad & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial q_i'} \frac{\partial q_i'}{\partial z'} \\ & \frac{\partial q_i'}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{y_i'}{z'}\right) = -\frac{y_i'}{z'^2}.\end{aligned}\right\} \quad \text{VI)}$$

Wir erhalten:[1])

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \delta(f\,dt) = & \left[\Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'} \delta q_i + \left(f - \Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'} q_i'\right) \delta t\right]_0^1 \\ & + \int_0^1 dt\, \Sigma\, \delta q_i \left(\frac{\partial t}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial q_i'}\right)\right) \\ & + \int_0^1 dt\, \delta t \left(\frac{\partial t}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(f - \Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'} q_i'\right)\right).\end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

Damit haben wir obige Formel (13) gewonnen.

---

[1]) Bei A. Voss (Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertius, Göttinger Nachrichten 1900, p. 33) findet sich eine ähnliche Formel; die Glieder werden aber anders zusammengezogen.