

# Sitzungsberichte

der

**mathematisch-physikalischen Klasse**

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu **München.**

---

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

---



**München.**

Verlag der K. Akademie.

1905.

---

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

## Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes.

Von **Siegfried Guggenheimer.**

(Eingelaufen 6. Februar.)

Seit C. Neumann im Jahre 1864 seine „Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe“<sup>1)</sup> veröffentlichte, ist der Ring Gegenstand mannigfacher mathematischer Untersuchungen geworden. Der grössere Teil dieser Arbeiten beschäftigt sich mit den Attraktions- resp. Potentialproblemen eines Ringes von kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt, sei es im ruhenden Zustande oder bei seiner Bewegung in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Hierher gehören die Arbeiten von Gödecker,<sup>2)</sup> Hicks,<sup>3)</sup> Lindskog,<sup>4)</sup> Halphen,<sup>5)</sup> Züge,<sup>6)</sup> Hübschmann,<sup>7)</sup> Basset,<sup>8)</sup> Gegenbauer,<sup>9)</sup> Dyson<sup>10)</sup> und Dixon.<sup>11)</sup> Ein kleinerer Teil von Arbeiten beschäftigt sich mit den Schwingungen eines Ringes, welche den akustischen entsprechen. Die erste Arbeit auf diesem Gebiete lieferte Hoppe,<sup>12)</sup> dem Arbeiten von Michell<sup>13)</sup> und Love<sup>14)</sup> folgten.

<sup>1)</sup> Halle 1864.    <sup>2)</sup> Göttingen 1879. Im Wesentlichen eine Ausführung eines Riemann'schen Planes. (S. Riemanns Werke S. 431.)

<sup>3)</sup> Phil. Trans. A. 179, S. 609, 1882.    <sup>4)</sup> Universität Upsala 1885.

<sup>5)</sup> C. R. 103, S. 363, 1886.    <sup>6)</sup> J. f. Math. 184, S. 89, 1888. Progr. Gym. Lingen 1889.    <sup>7)</sup> Prog. Gym. Chemnitz 1889.

<sup>8)</sup> Americ. J. of Math. 11. S. 172.    <sup>9)</sup> Wien. Ber. 100, S. 745, 1891.

<sup>10)</sup> Phil. Trans. A. 184, S. 43 und S. 1014, 1893.

<sup>11)</sup> Proc. Lond. Math. Soc. 28, S. 439, 1897.

<sup>12)</sup> Crelle's Journal 73, S. 158, 1871.

<sup>13)</sup> Messenger of Mathematics, 19, 1889.    <sup>14)</sup> Proc. of Lond. Math. Society, 24, S. 18, 1893.

Siehe auch Love, Treatise on Elasticity, Kap. 13; auch Rayleigh, Sound I. S. 383.

Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, die Eigenschwingungen eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem inkompressiblen Medium zu finden, also die universellen Schwingungen eines Kreisringes, wie sie die Berechnungsweise von A. Korn<sup>1)</sup> ergibt. Diese Untersuchung hat wegen einer vielleicht möglichen späteren Anwendung derselben auf die Theorie des Saturnringes ein besonderes Interesse.

Wir betrachten mit Korn ein System von schwach kompressiblen Teilchen in einer unendlichen inkompressiblen Flüssigkeit. Damit eine Schwingung der Form

$$u = U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v = V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w = W \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

möglich ist, muss, nach den Grundgesetzen der Hydrodynamik, ein Schwingungspotential  $\Phi$  vorhanden sein, so dass

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und  $\Phi$  den Gleichungen genügt

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{im Aussenraum,} \\ \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad \text{im Innenraum.}$$

Bezüglich der Beweise für die Existenztheoreme der universellen Funktion  $\Phi$  und deren Eigenschaften verweise ich auf die zitierten Abhandlungen von A. Korn.

Der Radius des Polarkreises des zu betrachtenden Ringes sei  $= a$ , und wir nehmen an, dass die Kompressibilität des Ringes umgekehrt proportional ist dem Quadrate seines Abstandes von der Rotationsachse, da, wie wir später sehen werden, durch diese Annahme die Rechnung wesentlich vereinfacht und für sehr dünne Ringe das Problem in erster

---

<sup>1)</sup> Korn: Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, Dümmler, 1901. Derselbe: Le probleme mathematique des vibrations universelles. Bull. de la Soc. math. de Charkow. Charkow 1903. Les vibrations universelles de la metiere. Ann. de l'école norm. sup. (3). 20. 1903.

Annäherung nicht verändert wird.<sup>1)</sup> Wir haben daher die Aufgabe zu lösen, eine Funktion  $\Phi$  zu finden, die im Innenraum der Gleichung:

$$(1) \quad \Delta \Phi + \frac{a^2 k^2}{\eta^2} \Phi = 0,$$

im Aussenraume der Gleichung:

$$(2) \quad \Delta \Phi = 0$$

genügt, und für die an der Grenze gilt:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_a, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} &= \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}, \end{aligned}$$

wenn  $\nu$  die Richtung der äusseren Normalen auf die Trennungsfläche vorstellt.

Dazu beschreiten wir zunächst einen Weg, der von C. Neumann angegeben worden ist.<sup>2)</sup>

An Stelle der Koordinaten  $x y z$  werden die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme eingeführt, von denen zwei Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Achse sind, während das dritte durch die Meridianebenen dieser Rotationsflächen dargestellt wird.

Die X-Achse sei die Rotationsachse, und die YZ-Ebene sei die Äquatorebene.

Wir führen die nämlichen Bezeichnungen ein, wie Neumann, nur dass wir für den Winkel, den eine beliebige Meridianebene mit der festen XY-Ebene bildet, zur Vermeidung von Verwechslungen mit unserer universellen Funktion  $\Phi$  das Zeichen  $\psi$  setzen.

In jeder Meridianebene sei eine Achse  $\xi$ , die mit der Rotations- d. h. X-Achse zusammenfällt, und eine andere

<sup>1)</sup> Wenn nämlich  $a$  der Radius des Polarkreises ist, wird  $\frac{a^2}{\eta^2}$  in 1. Annäherung für das Ringinnere konstant = 1 sein.

<sup>2)</sup> C. Neumann: Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ring. Halle 1864.

Achse  $\eta$ , die in der Äquatorebene liegt. Jede Meridianebene sei auf der einen Seite von der Rotationsachse begrenzt. Soll die Ebene alle Stellen des Raumes durchlaufen, so muss  $\psi$  von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  wachsen.  $\xi$  erstreckt sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ,  $\eta$  nur von  $0$  bis  $+\infty$ , und wir haben

$$\begin{aligned}x &= \xi, \\y &= \eta \cos \psi, \\z &= \eta \sin \psi.\end{aligned}$$

Zwischen  $\xi, \eta$  und zwei andern Variablen  $\vartheta, \omega$  bestehe die Beziehung:

$$(4) \quad \xi + i \eta = f(\vartheta + i \omega),$$

die auch dargestellt werden kann durch

$$(5^a) \quad \xi = f(\vartheta, \omega), \quad \eta = \chi(\vartheta, \omega)$$

oder

$$(5^b) \quad \vartheta = \vartheta(\xi, \eta), \quad \omega = X(\xi, \eta).$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$(6^a) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta},$$

$$(6^b) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi},$$

also auch:

$$(7) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0;$$

die Gleichungen (5<sup>a</sup>) und (5<sup>b</sup>) stellen also zwei orthogonale Kurvensysteme in den Meridianebenen dar, falls für  $\vartheta, \omega$  beliebige Konstanten gesetzt werden. Die  $x, y, z$  lassen sich also darstellen durch

$$(8) \quad \begin{aligned}x &= f(\vartheta, \omega), \\y &= \chi(\vartheta, \omega) \cos \psi, \\z &= \chi(\vartheta, \omega) \sin \psi.\end{aligned}$$

Setzt man .

$$(9) \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega}\right)^2 = \varrho,$$

so ergibt eine einfache Rechnung:

$$(10) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varrho (d\vartheta^2 + d\omega^2) + \eta^2 d\psi^2.$$

Ist nun  $\Phi$  eine Funktion in  $x, y, z$  und transformiert man

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

nach Jacobi auf die dreifach orthogonalen Koordinaten  $\vartheta, \omega, \psi$ , so ergibt sich:

$$(11) \quad \varrho \eta \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right) + \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2},$$

und schliesslich nach einigen einfachen Umformungen für den Aussenraum:

$$(12) \quad \varrho V \bar{\eta} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2} \left[ \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \psi^2} + \frac{\varphi V \bar{\eta}}{4} \right] = 0,$$

und für den Innenraum:

$$(13) \quad \varrho V \bar{\eta} \left[ \Delta \varphi + \frac{a^2 k^2}{\eta^2} \varphi \right] \\ = \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2} \left[ \frac{\partial^2 (\varphi V \bar{\eta})}{\partial \psi^2} + \varphi V \bar{\eta} \left[ 1 + \frac{4 a^2 k^2}{4} \right] \right] = 0.$$

Es handelt sich jetzt darum, diese allgemeinen dreifach orthogonalen Koordinaten derart zu spezialisieren, dass sie besonders zur Lösung des Problems der Ringfläche geeignet sind. Wir wählen mit Neumann die Gleichung (4) folgendermassen:

$$(14) \quad \eta + i \xi = + a \frac{1 + \lambda e^{-i\omega}}{1 - \lambda e^{-i\omega}} \\ (\lambda = e^{-\vartheta}),$$

dann haben  $\lambda$  und  $\omega$  die folgende Bedeutung:

Die Flächen  $\lambda = \text{Konst.}$  stellen ein System von ineinander geschachtelten Ringflächen dar, nämlich ein System von Ringflächen, deren Meridiankurven aus ineinander geschachtelten Kreisen bestehen. Der Wert von  $\lambda$  sei stets ein echter Bruch.

Fig. 1.

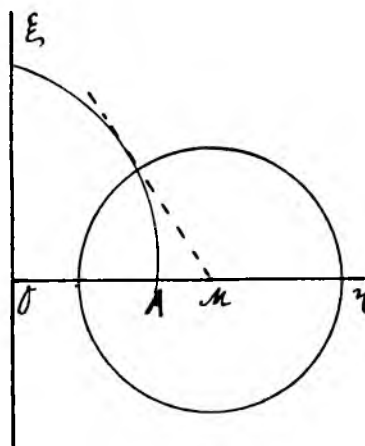
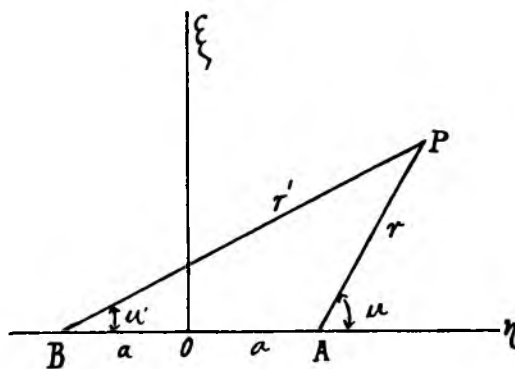


Fig. 2.



( $\lambda = \frac{r}{r'}$ ; siehe Figur 2).  $\lambda$  variiert zwischen den Werten 0 und 1. Die innerste Ringfläche wird dargestellt durch  $\lambda = 0$

und stellt den Polarkreis dar; die äusserste durch  $\lambda = 1$  und fällt mit der Rotationsachse zusammen. Die Flächen  $\lambda = \text{Konst.}$  schneiden das System von Bogen resp. Kugelkalotten  $\omega = \text{Konst.}$  stets orthogonal. ( $\omega = u - u'$ ). Diese Kugelkalotten werden sämtlich vom Polarkreis eingerandet. Die Werte von  $\omega$  variieren zwischen 0 und  $2\pi$ . Unter  $\omega$  sei der Winkel  $ABP$  selber oder seine Ergänzung zu  $2\pi$  verstanden. Für alle Punkte oberhalb  $AB$  variere  $\omega$  von 0 bis  $\pi$ ; für alle Punkte unterhalb  $AB$  von  $\pi$  bis  $2\pi$ .

Die Gleichungen  $\psi = \text{Konst.}$  stellen das System der Meridianebenen dar.  $\psi$  variiert ebenfalls von 0 bis  $2\pi$ .

Durch Sonderung des Reellen und Imaginären erhält man aus Gleichung (14)  $\xi$  und  $\eta$  wie folgt:

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = a \frac{2\lambda \sin \omega}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}, \\ \eta = a \frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}; \end{cases}$$

$x, y, z$  lassen sich durch diese neuen Koordinaten folgendermassen ausdrücken:

$$(16) \quad \begin{cases} x = a \frac{2\lambda \sin \omega}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}, \\ y = a \frac{(1 - \lambda^2) \cos \psi}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}, \\ z = a \frac{(1 - \lambda^2) \sin \psi}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}. \end{cases}$$

Für  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  ergibt sich:

$$(17) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4a^2\lambda^2(d\vartheta^2 + d\omega^2) + a^2(1 - \lambda^2)d\psi^2}{(1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2},$$

und weil

$$\vartheta = \log \frac{1}{\lambda}$$

gesetzt wurde

$$(18) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(2a d\lambda)^2 + (2a\lambda d\omega)^2 + (a(1 - \lambda^2)d\psi)^2}{(1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2},$$



und schliesslich erhalten wir für den Innenraum des Ringes die Gleichung:

$$(19) \quad e V \bar{\eta} \left[ \Delta \varphi + \frac{a^2 k^2}{\eta^2} \varphi \right] \\ = \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{(\partial \log \lambda)^2} + \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{\partial \omega^2} + \left( \frac{2 \lambda}{1 - \lambda^2} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{\partial \psi^2} + \frac{\varphi V \bar{\eta} (1 + 4 a^2 k^2)}{4} \right] = 0,$$

und für den Aussenraum:

$$(20) \quad e V \bar{\eta} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{(\partial \log \lambda)^2} + \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{\partial \omega^2} + \left( \frac{2 \lambda}{1 - \lambda^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi V \bar{\eta}}{\partial \psi^2} + \frac{\varphi V \bar{\eta}}{4} \right) = 0,$$

wo

$$(21) \quad e = \left( \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right)^2 = \frac{4 a^2 \lambda^2}{(1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}.$$

Wir setzen nun:

$$(22) \quad \Phi V \bar{\eta} = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_p \sum_q (F_p^q \cos p \omega \cos q \psi),$$

wo die  $F_p^q$  nur Funktionen von  $\lambda$  sind. Dass eine derartige Reihenentwicklung möglich ist, resp. dass diese Reihen konvergent sind, geht aus den von Korn loc. cit. bewiesenen Existenztheoremen für die universellen Funktionen<sup>1)</sup>  $\Phi$  hervor. Setzen wir den Wert von  $\Phi$  aus (22) in (19) und (20) ein, so ergeben sich für die  $F_p^q$  die folgenden Differentialgleichungen:

$$(23) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{d^2 \sqrt{1 - \lambda^2} F}{(d \log \lambda)^2} = p^2 F + (4 q^2 - 4 a^2 k^2 - 1) \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right)^2 F$$

im Innenraum,

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{d^2 \sqrt{1 - \lambda^2} F}{(d \log \lambda)^2} = p^2 F + (4 q^2 - 1) \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right)^2 F$$

im Aussenraum.

Der Beweis ergibt sich aus Neumann S. 21, wenn wir statt  $\Phi V \bar{\eta} = \chi \sqrt{1 - \lambda^2}$  setzen, und unsere Bedingung für den

<sup>1)</sup> Und zwar, weil bewiesen ist, dass diese Funktionen im ganzen Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind.

Innenraum beachten. Die Lösungen, die brauchbar sind, werden (Neumann loc. cit. S. 32)

für den Innenraum:

$$(25) \quad F_p^q = C_{I_p^q}^{p,q} \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p \Theta d\Theta}{(1-2\lambda \cos \Theta + \lambda^2)^{\frac{1}{2}\sqrt{q^2-a^2k^2+1}}},$$

$$= C_{I_p^q}^{p,q} I_p^q;$$

für den Aussenraum:

$$(26) \quad F_p^q = C_{A_p^q}^{p,q} \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q \Theta d\Theta}{\left(\sin \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}},$$

wobei, wenn  $I_p^q$  resp.  $A_p^q$  die Ableitungen von  $I_p^q$  resp.  $A_p^q$  nach  $\lambda$  darstellen, an der Grenze unter Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_a, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} &= -\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{an der Ringfläche} \\ \lambda = c \end{array}$$

sein muss.

$$(27) \quad \begin{aligned} C_{I_p^q}^{p,q} I_p^q(c) &= C_{A_p^q}^{p,q} A_p^q(c), \\ C_{I_p^q}^{p,q} I_p^q(c) &= C_{A_p^q}^{p,q} A_p^q(c), \end{aligned}$$

dass also, wenn für bestimmte  $p, q$  die  $C_{I_p^q}^{p,q}$  überhaupt  $\neq 0$  sind, die Gleichung

$$(28) \quad I_p^q(c) A_p^q(c) - A_p^q(c) I_p^q(c) = 0$$

bestehen muss.

Dann sind

$$(29) \quad \Phi_p^q = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} C_{p,q} I_p^q(\lambda) \cos p \omega \cos q \psi$$

im Innenraum und

$$(30) \quad \Phi_p^q = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} C_{p,q} \frac{I_p^q(c)}{A_p^q(c)} A_p^q(\lambda) \cos p \omega \cos q \psi$$

im Aussenraum.

Lösungen des Problems.  $C_p^q$  ist eine beliebige Konstante.

Es werde nun die Voraussetzung eingeführt, dass  $c$  sehr klein sei.

Wir schreiben zunächst:

$$F_p^q = C_i^{pq} \frac{(1 - \lambda^2)^{\sqrt{q^2 - a^2 k^2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p \Theta d\Theta}{(1 - 2\lambda \cos \Theta + \lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2 - a^2 k^2} + 1}{2}}}$$

$$= C_i^{pq} I_p^q$$

und betrachten die Grundschiwingung  $p = 0, q = 0$ . Wir untersuchen nun das bestimmte Integral, indem wir zunächst den Ausdruck unter dem Integralzeichen nach Potenzen von  $\lambda$  entwickeln.

Es ist, wenn  $m$  irgend eine Zahl ist:

$$\frac{1}{(1 - 2\lambda \cos \Theta + \lambda^2)^m} = (1 - \lambda e^{-i\Theta})^{-m} (1 - \lambda e^{i\Theta})^{-m},$$

$$(31) \quad = 1 + 2m\lambda \cos \Theta + (m(m+1)\cos 2\Theta + m^2)\lambda^2 + \dots,^1)$$

also, wenn man bereits Grössen vernachlässigt, die gegen  $k^2 \lambda^2$  klein sind:

$$(32) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1 - 2\lambda \cos \Theta + \lambda^2)^m} = 2\pi (1 + m^2 \lambda^2),$$

wo wir

$$m = \frac{2\sqrt{-a^2 k^2} + 1}{2}$$

zu setzen haben.

Es ist also für den Innenraum bei Vernachlässigung von Grössen, die gegen  $k^2 \lambda^2$  klein sind

$$(33) \quad F_p^q = C_i^{pq} \frac{(1 - \lambda^2)^{\sqrt{-a^2 k^2}}}{2\pi} 2\pi (1 + m^2 \lambda^2).$$

Es ist also bei derselben Vernachlässigung

<sup>1)</sup> Die Reihenentwicklung ist jedenfalls möglich, wenn  $m\lambda$ , d. i.  $k\lambda$ , sehr klein ist, wie sich dies später tatsächlich herausstellt.

$$I_p^q = \left[ 1 + \left( \frac{2\sqrt{-a^2 k^2} + 1}{2} \right)^2 \lambda^2 \right] [1 - \sqrt{-a^2 k^2} \lambda^2],$$

oder

$$(34) \quad I_p^q = 1 + \frac{1 - 4 a^2 k^2}{4} \lambda^2.$$

Zur Bestimmung von  $k$  bedürfen wir, wie aus der oben entwickelten Determinantengleichung ersichtlich, des Wertes von  $I_p^q$ . Dazu ist  $I_p^q$  nach  $\lambda$  zu differenzieren. Es wird

$$(35) \quad I_p^q = \frac{1 - 4 a^2 k^2}{2} \lambda.$$

Für den Aussenraum erhielten wir:

$$(36) \quad F_p^q = C_p^{q p} \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q \Theta d \Theta}{\left( \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right)^{\frac{p+1}{2}}} = C_a^{p q} A_p^q.$$

Für die Grundschwingung ist  $p = 0, q = 0$ , also

$$(37) \quad A_p^q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d \Theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}}.$$

Eine direkte Auswertung des Integrals für  $\lambda = 0$  ist diesmal nicht möglich, da eine solche den unbestimmten Wert  $(\infty - \infty)$  liefern würde. Wir betrachten daher den Ausdruck

$$(38) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d \Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}} \quad \text{für kleine } \lambda.$$

Wir setzen  $\frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ; dann wird

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \sin \varphi; \quad \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \cos^2 \varphi$$

und

$$d \Theta = -2 d \varphi.$$

Das zwischen den Grenzen 0 und  $2\pi$  genommene Integral verwandelt sich dann in das Integral

$$(39) \quad 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2) \sin^2 \varphi}} = 4K,$$

wo

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}},$$

und

$$\kappa^2 = 1 - \lambda^2$$

ist.

Es folgt daraus sofort für die  $A_p^q$  und  $A_p'^q$

$$(40) \quad A_p^q = \frac{2}{\pi} K,$$

$$(41) \quad A_p'^q = \frac{2}{\pi} \frac{dK}{d\lambda}.$$

Es folgt weiter aus

$$-\lambda = \kappa \frac{d\kappa}{d\lambda},$$

dass

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{dK}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\lambda},$$

$$\frac{dK}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{\kappa} \frac{dK}{d\kappa},$$

und somit

$$(41^*) \quad A_p'^q = -\frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{dK}{d\kappa}.$$

Zur Berechnung von  $k$  fanden wir die Determinantengleichung (28):

$$I_p^q(c) A_p^q(c) - A_p'^q(c) I_p^q(c) = 0.$$

Aus

$$\frac{I_p^q(c)}{I_p^1(c)} = \frac{A_p^q(c)}{A_p^1(c)}$$

folgt, wenn wir berücksichtigen, dass für die beiden elliptischen Integrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

die Beziehungen gelten:<sup>1)</sup>

$$\kappa \frac{dE}{d\kappa} = E - K,$$

und

$$(1 - \kappa^2) \frac{d(K - E)}{d\kappa} = E\kappa;$$

$$\frac{\frac{dK}{d\kappa}}{K} = \frac{E - K(1 - \kappa^2)}{\kappa K(1 - \kappa^2)},$$

$$\frac{\frac{1 - 4a^2 k^2}{2} \lambda}{1 + \frac{1 - 4a^2 \kappa^2}{4} \lambda^2} = - \frac{\frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{dK}{d\kappa}}{\frac{2}{\pi} K},$$

und bei Vernachlässigung von  $\lambda^2$

$$(42) \quad \frac{1 - 4a^2 k^2}{2} = - \frac{\frac{dK}{d\kappa}}{\frac{K}{\pi}}$$

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques* I. S. 353.

Daraus erhalten wir also:

$$k^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \frac{dK}{d\kappa} \frac{1}{K},$$

und durch Einsetzen des Wertes von  $\frac{dK}{d\kappa}$ :

$$(43) \quad \begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{E}{\kappa(1-\kappa^2)K} - \frac{1}{\kappa} \right], \\ &= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{E}{\kappa \lambda^2 K} - \frac{1}{\kappa} \right]. \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\lim_{\kappa=1} E = 1.$$

Also wird in erster Annäherung:

$$k^2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2 K} \quad ^1)$$

und für  $\lambda = c$ :

$$(44) \quad k^2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{K_c \cdot c^2},$$

wo

$$K_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - c^2) \sin^2 \varphi}}.$$

Sei beispielsweise:

$$c = \frac{1}{50},$$

also

$$c^2 = \frac{1}{2500},$$

und bei Vernachlässigung von  $c^4$  u. s. w.

<sup>1)</sup>  $K$  wird  $\infty$  von der Art  $\log \lambda$ , wenn  $\lambda$  zu 0 abnimmt.

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 - \frac{1}{5000} \\ &= 0,9998 \end{aligned}$$

und

$$\text{arc sin } \kappa = 88^\circ 51' 10''.$$

Daraus ergibt sich  $K^1) =$  ungefähr 5,33301 und

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{2500}{5,33301} \\ (45) \quad k &= \frac{50}{a} \sqrt{\frac{1}{10,66602}}. \end{aligned}$$

Für  $a = 1$ , wird  $k^2 c^2$  sehr nahe  $= \frac{1}{10}$ .

Es ist nun noch unsere Aufgabe, die gefundenen Werte für die  $I_p^q$  und  $A_p^q$  in den Ausdruck einzusetzen, der für die Funktion  $\Phi$  aufgestellt wurde. Wir fanden

$$\Phi \sqrt{\eta} = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_p \sum_q (F_p^q \cos p \omega \cos q \psi).$$

Daraus ergibt sich der Wert von  $\Phi_i$  für die Grundschwingung folgendermassen:

Wir fanden für die  $F_0^0$ , d. h. für die  $I_p^q$  in Gl. (34)

$$F_0^0 = C_0 I_0^0 = C_0 \left( 1 + \frac{1 - 4a^2 k^2}{4} \lambda^2 \right).$$

Nun ist aber

$$(46) \quad \Phi_i = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{\eta}} F_0^0 = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{\eta}} C_0 \left[ 1 + \frac{1 - 4a^2 k^2}{4} \lambda^2 \right].$$

Um nun über die Bewegung des Ringes an seiner Oberfläche, d. h. über seine Eigenschwingung Aufschluss zu erhalten, haben wir für  $\lambda = c \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$  und  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma}$  zu bilden, wenn wir unter  $\nu$  die Richtung der äusseren Normalen verstehen, und unter  $\sigma$

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen, S. 279.



die zu  $\nu$  in den einzelnen Meridianebenen senkrechte Richtung verstehen.

Es ist

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}.$$

Für  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$  ergibt sich:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = -2 \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} C_0 a^3 k^3 \lambda = -2 C_0 a^3 k^3 c,$$

bei Vernachlässigung von Grössen die klein sind gegen  $C_0 k^3 c$ .

Für  $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$  ergibt sich (siehe Neumann l. c. S. 14)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}{2 a},$$

somit

$$(47) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{2 a} = -C_0 a^3 k^3 c.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma}.$$

Für  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}$  ergibt sich nach (46):

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega} = C_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{\eta^3}} 2 \lambda \sin \omega \right],$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \frac{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}{2 a \lambda}. \quad (\text{Neumann l. c. S. 14.})$$

Somit

$$(48) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma} = \frac{C_0}{2} \left( \frac{1 - \sin \omega}{\sqrt{a^3}} \right).$$

Da  $k c$  ausserordentlich gross ist gegen 1 (von der Ordnung  $\frac{1}{K_c \cdot c}$ ), so zeigt sich, dass das Wesentliche der Schwingung eine Pulsation ist.

Führen wir für die willkürliche Konstante  $C_0$  eine andere willkürliche Konstante  $a$  ein durch die Substitution:

$$(49) \quad \pi a C_0 = K_c a = \frac{a}{2 a^2 k^2 c^2},$$

so wird

$$(50) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} = -\frac{a}{2 \pi c a^2}, \quad \int_{\text{über die Ringfl.}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} d\omega = -4 \pi a.$$

Betrachten wir nun irgend einen Punkt  $P$ , der von irgend einem Punkte des Ringes oder vom Mittelpunkte des Ringes durch die grosse Entfernung  $R$  getrennt ist.

Die Potentialfunktion der Fläche in Bezug auf diesen Punkt wird nun dargestellt durch

$$\Phi = -\frac{1}{4 \pi R} \int_{\omega} \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} d\omega, \quad 1)$$

wenn  $d\omega$  ein Oberflächenelement der Oberfläche bedeutet, über die das Integral zu nehmen ist.

Es wird

$$\Phi = -\frac{1}{4 \pi R} \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} d\omega = \frac{a}{R},$$

d. h. einem in der grossen Entfernung  $R$  vom Ringe befindlichen Punkt  $P$  gegenüber verhält sich der Ring wie eine pulsierende Kugel.

1) In der Formel

$$\Phi = -\frac{1}{4 \pi} \int_{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4 \pi} \int_{\omega} \Phi \frac{\cos r v}{r^2} d\omega$$

kann das zweite Glied für grosse  $r$  gegen das erste vernachlässigt werden.