Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ueber eine der Fourierschen Regel verwandte Zeichenregel für die Anzahl der Nullstellen in einem offenen Intervall.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. November 1935.

1. Bei der Erweiterung, die zuerst A. Hurwitz[1] für die bekannte nach Fourier oder Budan benannte Zeichenregel — unter Ausdehnung auf reelle in $a \leqq x \leqq b$ analytische Funktionen $f(x)$ — gegeben hat, handelt es sich um eine Aussage über die Anzahl $N_{a,b}$ der Nullstellen von $f(x)$ im halboffenen Intervall $a < x \leqq b$: es wird für $N_{a,b}$ eine obere Schranke aufgestellt, von der sich $N_{a,b}$ nur um eine gerade Zahl unterscheiden kann[2]. Diese Schranke ist natürlich auch obere Schranke für die Anzahl $N^*_{a,b}$ der Nullstellen von $f(x)$ im offenen Intervall $a < x < b$. Eine unter Umständen[3] bessere Schranke für $N^*_{a,b}$ gibt eine von K. Petr sowie auch von F. Giudice mitgeteilte Zeichenregel, wobei wieder der Unterschied dieser Schranke von $N^*_{a,b}$ eine gerade Zahl sein muß[4]. Der in diesen Sitzungsberichten (l. c.[2]) dargelegte auf dem Satz von Rolle beruhende Beweis der Fourierschen (sowie der Descartesschen) Regel läßt sich nun, wie ich inzwischen an anderer Stelle angegeben habe[5],

---

[1] A. Hurwitz, Math. Ann. 71 (1912) S. 584—591.

[2] Vgl. hierzu diese Siztungsberichte Jahrg. 1935 S. 367, Nr. 8, Satz III und III a.

[3] Nämlich in gewissen Fällen, wo in der Folge $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, ... Nullen auftreten, denen von Null verschiedene Zahlen nachfolgen.

[4] K. Petr, Časopis Mathemat. a Fysik. 36 (1907) S. 49—54 (l. c.[2] Anm. 26 wurde irrtümlich Bd. 26 statt 36 angegeben); F. Giudice, Giornale di Matemat. di Battaglini (3) 3 = 50 (1912) S. 188—190.

[5] In dem demnächst erscheinenden Wirtinger-Festband der Monatshefte für Math. und Phys., Bd. 43 (1936).

noch etwas vereinfachen[6], und so ist es vielleicht von Interesse, daß sich nach dem gleichen vereinfachten Verfahren auch die von Petr und Giudice aufgestellte Zeichenregel (s. unten Satz I) beweisen läßt.

2. Sei zunächst eine Bemerkung über Zeichenwechsel vorausgeschickt, die zu einer reellen Zahlenfolge

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots \tag{1}$$

gehören, von der wir voraussetzen, daß sie nicht aus lauter Nullen besteht. Wenn es in (1) — an einer oder an mehreren Stellen — vorkommt, daß vor einer von Null verschiedenen Zahl c_h eine oder mehrere Nullen stehen, etwa $c_{h-\nu} = 0$ für $1 \leqq \nu \leqq m$, dann werde aus (1) eine neue Zahlenfolge

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots \tag{2}$$

so gebildet, daß an Stelle jeder solchen Zahl $c_{h-\nu}$ eine Zahl $C_{h-\nu}$ gesetzt wird, deren Vorzeichen gleich dem von c_h ist; sowie eine weitere Zahlenfolge

$$C_0^*,\ C_1^*,\ C_2^*,\ \ldots\ldots \tag{3}$$

so, daß an Stelle jeder Zahl $c_{h-\nu}$ eine Zahl $C^*_{h-\nu}$ gesetzt wird, deren Vorzeichen gleich dem von $(-1)^\nu\ c_h$ ist. (Für jedes $c_\nu \neq 0$ sei $C_\nu = C_\nu^* = c_\nu$). Die Zahlenfolgen (2) und (3) enthalten dann entweder überhaupt keine Nullen oder keine Nullen bis zu einer gewissen Stelle und von da ab lauter Nullen.

Wird für (1) die Folge

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots\ldots \tag{4}$$

genommen, so werde unter W_a bzw. W_a^* die Anzahl der Zeichen-

[6] Bei diesem Verfahren wird der Beweis der Fourierschen Regel noch einfacher als der der Descartesschen Regel, während für den l. c. [2] dargelegten Beweis gerade das Umgekehrte gilt.

wechsel in der zugehörigen Folge (2) bzw. (3) verstanden[7]; offenbar ist $W_a^* \geqq W_a$.

3. Die zu beweisende Regel lautet dann:

Satz I. Die Anzahl $N_{a,b}^*$ der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen, die die in $a \leqq x \leqq b$ analytische reelle und nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ im offenen Intervall $a < x < b$ aufweist, ist $\leqq W_a - W_b^*$ und es ist $W_a - W_b^* - N_{a,b}^*$ eine gerade Zahl. Dabei wird W_a als endlich vorausgesetzt, woraus die Endlichkeit von W_b^* folgt[8].

Aus den Überlegungen der Anm. 7 und 8 und daraus, daß sich bei a und b Nullstellen von $f(x)$ nicht häufen können, kann man schließen, daß man zwei positive Zahlen ρ und σ ($< \frac{1}{2}(b-a)$) so klein wählen kann, daß 1. für jedes zwischen a und $a+\rho$ liegende a_1 die Folge $f(a_1), f'(a_1), f''(a_1), \ldots$ die gleichen Vorzeichen aufweist wie die Folge (2), hierbei unter (1) die Folge $f(a), f'(a), f''(a), \ldots$ verstanden, woraus $W_a = W_{a_1}$ folgt; 2. für jedes zwischen $b-\sigma$ und b liegende b_1 die Folge $f(b_1), f'(b_1), f''(b_1), \ldots$ die gleichen Vorzeichen aufweist wie die Folge (3), hierbei unter (1) die Folge $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b), \ldots$ verstanden, woraus $W_b^* = W_{b_1}$ folgt; 3. für derartige a_1, b_1 alle zwischen a und b gelegenen Nullstellen von $f(x)$ dem Bereich $a_1 < x \leqq \leqq b_1$ angehören, woraus $N_{a,b}^* = N_{a_1,b_1}$ folgt. Die Aussage des Satzes I, daß $W_a - W_b^* - N_{a,b}^* = W_{a_1} - W_{b_1} - N_{a_1,b_1}$ eine nicht-negative gerade Zahl ist, läßt sich also auch zurückführen auf die Fouriersche Zeichenregel (l. c. [2]), wenn diese auf das Intervall $a_1 < x \leqq b_1$ angewendet wird.

4. Die Richtigkeit von Satz I ist unmittelbar ersichtlich im Falle $W_a = 0$, in dem sich (analog wie $W_b = 0$, vgl. l. c. [2] Nr. **9**) auch $W_b^* = 0$, sowie $N_{a,b}^* = 0$ ergibt. Um auf diesen Fall den Fall $W_a > 0$ zurückzuführen, beweisen wir zunächst

---

[7]) Jede der Zahlen C_ν aus (2) hat dann das Vorzeichen, das $f^{(\nu)}(x)$ in $a < x < a + \rho_\nu$ für genügend kleines positives ρ_ν hat; analog jede Zahl C_ν^* aus (3) das Vorzeichen von $f^{(\nu)}(x)$ in $a - \sigma_\nu < x < a$. Übrigens fällt W_a mit der Anzahl der (unter Weglassung der Nullen gezählten) Zeichenwechsel in (4) zusammen.

[8] Denn aus der Endlichkeit von W_a folgt die Existenz eines $f^{(\lambda)}(x)$, so daß $f^{(\lambda)}(a) \neq 0$, $f^{(\lambda)}(a) f^{(\lambda+\nu)}(a) \geqq 0$ für $\nu \geqq 1$. Dabei kann man annehmen, daß nicht von einer gewissen Stelle an alle $f^{(\lambda+\nu)}(a)$ Null sind, da in diesem Falle (in dem $f(x)$ ein Polynom ist) von der gleichen Stelle an alle $f^{(\lambda+\nu)}(b)$ Null sind und die Endlichkeit von W_b^* unmittelbar einleuchtet. Zu jedem $f^{(\lambda+\nu)}(a)$ existiere also ein $f^{(\lambda+\nu+\varkappa)}(a) \neq 0$ ($\varkappa \geqq 1$). Ist nun z. B. $f^{(\lambda)}(a) > 0$, so sind alle $f^{(\lambda+\nu)}(x)$ ($\nu \geqq 0$) monoton-wachsende Funktionen, somit alle $f^{(\lambda+\nu)}(b) > 0$ ($\nu \geqq 0$) und W_b^* endlich.

Satz II. Ist $f(x)$ eine den Voraussetzungen des Satzes I (einschließlich der Endlichkeit von W_a) genügende, nicht konstante Funktion und haben W'_a, W'^*_b, $N'^*_{a,b}$ für $f'(x)$ die gleiche Bedeutung wie W_a, W^*_b, $N^*_{a,b}$ für $f(x)$, dann ist

$$\Delta^*_{a,b} = N'^*_{a,b} - N^*_{a,b} + W_a - W'_a - W^*_b + W'^*_b$$

eine nicht-negative gerade Zahl.

Beim Beweis benützen wir die Formel

$$\Delta^*_{a,b} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \Delta^*_{x_\nu, x_{\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \Gamma_{x_\nu}, \tag{5}$$

in der $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ $(m \geqq 1)$ angenommen wird (für $m = 1$ entfällt die zweite Summe), wobei

$$\Gamma_c = l_c - L_c + W^*_c - W'^*_c - W_c + W'_c$$

ist, unter L_c bzw. l_c die Vielfachheit verstanden, mit der $x = c$ Nullstelle von $f(x)$ bzw. von $f'(x)$ ist; die Gültigkeit von (5) folgt dabei unmittelbar aus

$$N^*_{a,b} = \sum_{\nu=0}^{m-1} N^*_{x_\nu, x_{\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{m-1} L_{x_\nu}, \quad N'^*_{a,b} = \sum_{\nu=0}^{m-1} N'^*_{x_\nu, x_{\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{m-1} l_{x_\nu}.$$

Wählt man[9] für $x_1, \ldots, x_{m-1}$ die sämtlichen in $a < x < b$ gelegenen Nullstellen von $f(x) f'(x)$ (also $m = 1$, falls keine solchen Stellen vorhanden sind), dann ist $f(x) \neq 0$ und $f'(x) \neq 0$ in jedem der Intervalle $x_\nu < x < x_{\nu+1}$. Satz II wird nun allgemein bewiesen sein, wenn dies für den besonderen Fall geleistet ist, daß in $a < x < b$ sowohl $f(x)$ als $f'(x) \neq 0$ ist, und wenn von jeder Zahl Γ_c gezeigt ist, daß sie nicht-negativ und gerade ist; denn dann sind alle $2m - 1$ Summanden von (5) und daher auch $\Delta^*_{a,b}$ selbst als nicht-negativ und gerade nachgewiesen.

---

[9] Das folgende Verfahren ist demjenigen völlig analog, das l. c. [5] zum Beweis des dortigen Satzes II angewendet wird, nur daß hier noch die Zahlen Γ_{x_ν} in (5) zu berücksichtigen sind.

5. Was nun den Beweis von Satz II in dem besonderen Fall anlangt, daß $f(x)$ und $f'(x)$ beide in $a < x < b$ von Null verschieden sind, wo dann $N^*_{a,b} = 0$, $N'^*_{a,b} = 0$ und

$$\Delta^*_{a,b} = (W_a - W'_a) - (W^*_b - W'^*_b)$$

ist, so unterscheiden wir die Fälle

$$\alpha)\ W_a - W'_a = 0, \quad \beta)\ W_a - W'_a = 1.$$

Dabei möge, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässig ist, $f(x) > 0$ in $a < x < b$ angenommen werden.

Im Falle α) wächst[10] $f(x)$ monoton in $a \leqq x \leqq b$, es ist also $f(b) > 0$ und — je nachdem $l = l_b$ gerade oder ungerade ist — ist $f^{(l+1)}(b) > 0$ oder < 0; wird nun die zur Folge $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b), \ldots$ (diese Folge als Folge (1) genommen) zugehörige Folge (3) gebildet, so erscheint an der Stelle von $f'(b)$, ob nun die Anzahl l der Nullen zwischen $f(b)$ und $f^{(l+1)}(b)$ gerade oder ungerade ist, allemal eine positive Zahl C^*_1. (Das gleiche gilt, wenn $f^{(\nu)}(b) = 0$ für $\nu > 1$ und $f'(b) \neq 0$, und zwar notwendig > 0 ist). Die erste Zahl $C^*_0 = f(b)$ bildet also mit C^*_1 keinen Zeichenwechsel, es ist somit $W^*_b = W'^*_b$ und $\Delta^*_{a,b} = 0$.

Im Falle β) ist $f(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ monoton abnehmend, $f(b) \geqq 0$ und $f^{(l+1)}(b) < 0$ oder > 0, je nachdem l gerade oder ungerade ist; nimmt man für (1) die Folge $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, ..., so erscheint in der zugehörigen Folge (3) an der Stelle von $f'(b)$, ob nun l gerade oder ungerade ist, allemal eine negative Zahl C^*_1 (das gleiche gilt, wenn $f^{(\nu)}(b) = 0$ für $\nu > 1$ und $f'(b) \neq 0$, und zwar notwendig < 0 ist), hingegen an der Stelle von $f(b)$, gleichgültig ob $f(b) > 0$ und $C^*_0 = f(b)$, oder ob $f(b) = 0$ ist, allemal eine positive Zahl C^*_0. Da somit C^*_0 mit C^*_1 einen Zeichenwechsel bildet, ist $W^*_b = W'^*_b + 1$ und $\Delta^*_{a,b} = 0$.

---

[10] Vgl. hierfür sowie für den Fall β) die analogen Überlegungen l. c. [5]. Man erkennt (unter Beachtung von $f^{(\nu)}(b) = 0$ für $0 < \nu < l_b + 1$) durch Schluß von n auf $n+1$, daß für genügend kleines positives σ jedes $f^{(l-n)}(b) - f^{(l-n)}(x)$ (für $0 \leqq n \leqq l = l_b$) im Bereich $b - \sigma < x < b$ das Vorzeichen von $(-1)^n f^{(l+1)}(b)$, $f(b) - f(x)$ also das Vorzeichen von $(-1)^l f^{(l+1)}(b)$ hat. Dabei braucht nur der Rollesche (nicht der Taylorsche) Satz herangezogen zu werden.

In beiden Fällen α), β) ist $\Delta^*_{a,b} = 0$, also nicht-negativ und gerade, wie behauptet.

6. Um zu zeigen, daß auch jede Zahl Γ_c nicht-negativ und gerade ist (wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(c) \geqq 0$ annehmen können), unterscheiden wir die Fälle

$$\text{A)}\ f(c) = 0 \qquad \text{B)}\ f(c) > 0.$$

Im Falle A) ist $W_c - W'_c = 0$, $W^*_c - W'^*_c = 1$, $L_c = l_c + 1$, also $\Gamma_c = 0$.

Im Falle B), wo $L_c = 0$ ist, betrachten wir die zur Folge $f(c), f'(c), f''(c), \ldots$ (diese als Folge (1) genommen) zugehörige Folge (3); in dieser Folge, in der $C^*_0 = f(c)$ positiv ist, erscheint an der Stelle von $f'(c)$ eine Zahl C^*_1, die das Vorzeichen von $(-1)^l f^{(l+1)}(c)$ hat (hierbei kurz l für l_c geschrieben). Es wird also C^*_1 positiv und $W^*_c - W'^*_c = 0$, wenn entweder l gerade und $f^{(l+1)}(c) > 0$ oder l ungerade und $f^{(l+1)}(c) < 0$, zusammengefaßt wenn $l - (W_c - W'_c)$ eine gerade Zahl (notwendig $\geqq 0$) ist. Hingegen wird C^*_1 negativ und $W^*_c - W'^*_c = 1$, wenn entweder l gerade und $f^{(l+1)}(c) < 0$ oder l ungerade und $f^{(l+1)}(c) > 0$, zusammengefaßt wenn $l - (W_c - W'_c)$ eine ungerade Zahl (notwendig $\geqq -1$) ist. Im einen wie im anderen Fall ist $\Gamma_c = W^*_c - W'^*_c + l - (W_c - W'_c)$ gerade und $\geqq 0$, wie behauptet[11].

7. Mit diesen Feststellungen ist der Nachweis von Satz II erbracht[12]. Um mit seiner Hilfe den Beweis von Satz I im Falle $W_a > 0$ auf den Fall $W_a = 0$ zurückzuführen, verfährt man analog, wie an anderer Stelle[13] für den Beweis der Fourierschen

---

[11] Für den Beweis von Satz II wird diese Aussage, wie aus Nr. **4** ersichtlich, nur für den besonderen Fall benötigt, daß c eine Nullstelle von $f(x)$ oder $f'(x)$ ist. Sie gilt aber, wie man sieht, auch ohne diese Einschränkung (und zwar auch für die in Anm. 12 genannten nicht-analytischen Funktionen).

[12] Die Behauptung des Satzes II gilt, wie aus dem Beweis ersichtlich, nicht nur für analytische Funktionen, sondern für jede in $a \leqq x \leqq b$ unbeschränkt differenzierbare Funktion $f(x)$, bei welcher die Nullstellen von $f'(x)$ (und daher auch von $f(x)$) nur in endlicher Anzahl vorhanden und von endlicher Vielfachheit sind. Dabei kann auch auf die Voraussetzung der Endlichkeit von W_a verzichtet werden, wenn man die Behauptung so faßt, daß nicht von den Anzahlen $W_a, \ldots, W'^*_b$ selbst die Rede ist, sondern nur von den geeignet (vgl. l. c. [5] Nr. **3** Anm. 8) erklärten Zahlen $W_a - W'_a$ und $W^*_b - W'^*_b$.

[13] Siehe l. c. [2] Nr. **3** und **9**, l. c. [5] Nr. **4**.

und der Descartesschen Regel auseinandergesetzt: Für ein geeignetes $f^{(\lambda)}(x)$ liegt der Fall $W_a = 0$ vor; und da die Zahlen $W_a - W_b^* - N_{a,b}^*$, der Reihe nach gebildet für die Funktionen $f^{(\lambda)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$, gemäß Satz II eine nicht-abnehmende Folge mit geraden Differenzen bilden, die mit Null beginnt, so sind alle diese Zahlen nicht-negativ und gerade.

Bemerkung zu der Note „Über eine Verallgemeinerung der Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan", S. 357–377 dieser Sitzungsberichte.

Die in Nr. **2** (S. 361) angestellten Betrachtungen über analytische Fortsetzung mittels einer Kette von Potenzreihenentwicklungen sind – worauf mich Herr Perron freundlicherweise aufmerksam machte – entbehrlich. Denn aus $W = 0$ und der Regularität in $x \geqq a$ folgt schon die Konvergenz der Ausgangspotenzreihe für alle x, da andernfalls (bei endlichem Konvergenzradius r_0) nach einem Satz von Pringsheim (Math. Ann. 44 [1894], S. 42; vgl. auch diese Sitz.-Ber., Jahrg. 1928, S. 343 und E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., 1929, § 17) die Stelle $x = a + r_0$ singuläre Stelle der Funktion wäre. Das Gleiche gilt überhaupt bei endlichem W. Es kann also für die Funktion $f(x)$ des Satzes I nur der schon von Laguerre in etwas anderer Weise behandelte Fall der ganzen (durch eine beständig konvergente Potenzreihe darstellbaren) Funktion wirklich vorliegen.

Ferner seien folgende Berichtigungen beigefügt:

S. 357, Zeile 1 der Anm. 2: statt „1649" lies „1637".
S. 358, Zeile 7: statt „relle" lies „reelle".
S. 377, Zeile 2 der Anm. 30: statt „de" lies „di".