Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1935

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Struktur der analytischen Konvexitäten.

Von Georg Aumann in Princeton (N. J.).

Vorgelegt von H. Tietze in der Sitzung vom 12. Januar 1935.

Übersicht.

1. Einleitung. In meiner Arbeit über analytische Mittelwerte[1] bewies ich

Satz 1. Das analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn die M-konvexe Hülle $\{z_1, z_2\}_M$ eines jeden Punktepaars z_1, z_2 höchstens eindimensional ist.

Der Hauptzweck dieser Arbeit ist, dieser merkwürdigen Eigenschaft der quasiarithmetischen Mittel eine andere bedeutsame charakteristische Eigenschaft an die Seite zu stellen. Ich beweise den

Satz 2. Das analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn jedes im kleinen M-konvexe Kontinuum M-konvex ist.

Dabei heißt eine Menge A im kleinen M-konvex, wenn sie in jedem ihrer Punkte M-konvex ist; M heißt im Punkt P von A M-konvex,[2] wenn es eine M-konvexe Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt P gibt, deren Durchschnitt mit A eine M-

[1] Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. 1934, 45–81. In der Einleitung dieser Arbeit steht ein sinnstörender Textfehler, den ich hier berichtigen möchte: Seite 47, Zeile 2 ist anstatt „nur jene" zu setzen „andere als nur jene".

[2] Vgl. H. Tietze, Über Konvexität im kleinen und großen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen, Math. Zeitschr. **28** (1928), 697–707.

konvexe Menge ist. Da es zu jedem gegebenen Punkt als Mittelpunkt M-konvexe Kreisscheiben gibt,[3] so ist jede M-konvexe Menge im kleinen M-konvex. Satz 2 besagt also, daß der Satz von H. Tietze über Konvexität im kleinen (siehe a. a. O. [2]) allgemein für quasiarithmetische Konvexitäten gilt, aber auch nur für diese. Die quasiarithmetischen Konvexitäten sind demnach die einzigen analytischen Konvexitäten, die sich durch infinitesimale Eigenschaften charakterisieren lassen — man vergleiche damit etwa die bekannte Bedingung für die Konvexität einer zweimal differenzierbaren Funktion —, und das ist unter anderem ein Grund für ihre bevorzugte Stellung in der Analysis.

Der Beweis von Satz 2 erfordert eine eingehendere Betrachtung der durch analytische Mittelwerte erzeugten Konvexitäten. Das wesentliche Ergebnis dieser Untersuchungen ist der Struktursatz, der besagt, daß jedem analytischen Mittel M in eindeutiger Weise ein quasiarithmetisches Mittel Q_M zugeordnet ist von der Beschaffenheit, daß jedes M-konvexe Kontinuum zugleich Q_M-konvex ist, oder anders ausgedrückt, daß sich jedes analytische Mittel M durch eine geeignete konforme Abbildung entzerren, d. h. so abbilden läßt, daß dabei die M-konvexen Kontinuen in (im gewöhnlichen Sinn) konvexe Kontinuen übergehen.

2. Entzerrte Mittel. Wir definieren:

Das in G analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ heißt entzerrt, wenn die Funktion

$$K_M(z) = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial z_1^2}\right]_{z_1 = \ldots = z_n = z} \tag{2, 1}$$

in G identisch verschwindet. Da wegen $M(z, \ldots, z) = z$ und der Symmetrie von M

$$\left[\frac{\partial^2 M}{\partial z_1^2}\right]_{z_1 = \ldots = z_n = z} + (n-1)\left[\frac{\partial^2 M}{\partial z_1 \partial z_2}\right]_{z_1 = \ldots = z_n = z} = 0$$

ist, so verschwinden für ein entzerrtes Mittel an jeder Entwicklungsstelle $(z, \ldots, z)$ sämtliche zweiten partiellen Ableitungen. Beispielsweise ist das arithmetische Mittel entzerrt; ein entzerrtes, vom arithmetischen Mittel verschiedenes Mittel ist

[3] a. a. O. [1], Satz 3, S. 61.

$$\frac{z_1+z_2}{2}+(z_1-z_2)^4,$$

definiert in der ganzen endlichen z-Ebene.

Die Verwandtschaft der entzerrten Mittel mit dem arithmetischen Mittel zeigt

Satz 3. Ist M ein entzerrtes Kreismittel, dann ist jedes M-konvexe Kontinuum im gewöhnlichen Sinn konvex.

Beweis. Sei M ein entzerrtes Mittel mit dem Grundgebiet $|z|<1$ und A ein M-konvexes Kontinuum in $|z|\leqq\rho<1$.[4] Für irgendeinen Punkt a mit $|a|\leqq\rho$ gilt

$$M(a+\zeta_1,\ldots,a+\zeta_n)=\frac{a+\zeta_1+\ldots+a+\zeta_n}{n}+\sum_{\lambda<\mu}(\zeta_\lambda-\zeta_\mu)^2\mathfrak{P}_{\lambda\mu},$$

wobei die $\mathfrak{P}_{\lambda\mu}$ Potenzreihen in $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ sind, ohne konstantes Glied; da die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_{\lambda\mu}$ analytische Funktionen von a sind, so gibt es eine positive (nur von ρ abhängige) Konstante p, so daß

$$\left|M(z_1,\ldots,z_n)-\frac{z_1+\ldots+z_n}{n}\right|\leqq p\,\sigma_0\,\mathrm{Max}\,|z_\lambda-z_\mu|^2 \tag{2, 2}$$

für beliebige σ_0 und $z_1,\ldots,z_n$ mit $0<\sigma_0<\frac{1-\rho}{2}$ und $|z_\nu-a|\leqq\sigma_0$, $\nu=1,\ldots,n$.

Außerdem ist[5] für $|z_\nu-b|\leqq\tau_0$, $\nu=1,\ldots,n$

$$\left|\frac{z_1+\ldots+z_n}{n}-b\right|\leqq\tau_0-\frac{\mathrm{Max}\,|z_\lambda-z_\mu|^2}{4n\tau_0}, \tag{2, 3}$$

wobei b ganz beliebig sein darf. Ist nun

$$\sigma_0\leqq\frac{1}{4np}\cdot\frac{1}{\tau_0}=\sigma_*, \tag{2, 4}$$

dann folgt aus (2, 2), (2, 3) sofort

$$|M(z_1,\ldots,z_n)-b|\leqq\tau_0.$$

[4] Die Voraussetzung $|z|\leqq\rho$ bedeutet keine Einschränkung, siehe a. a. O.[1], Satz 5, S. 66.

[5] Siehe a. a. O.[1], S. 61, Formel (11, 1).

Wir haben damit das folgende Ergebnis: Gibt man sich ein $\tau_0 \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{2np(1-\rho)}, \frac{1}{\sqrt{4np}}\right)$ vor, so ist für jedes Punktepaar z', z'' der Menge A mit $|z'-z''| \leqq 2\sigma_*$ die M-konvexe Hülle $\{z', z''\}_M$ in dem Kreiszweieck $\mathfrak{K}(z', z''; \tau_0)$ enthalten, das durch jene zwei Kreise bestimmt ist, die durch z', z'' hindurchgehen und den Radius τ_0 haben. Aus dieser Eigenschaft folgt aber die Konvexität von A. In der Tat, wir wählen $\tau_1 > \tau_0$ so groß, daß für $\tau \geqq \tau_1$ die Schenkellänge eines in $\mathfrak{K}(z', z''; \tau)$ einbeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecks mit den Basisecken z', z'' kleiner ist als $\frac{3}{4}|z'-z''|$; wegen $|z'-z''| < 2$ ist das z. B. für $\tau \geqq \frac{9}{4\sqrt{5}}$ der Fall. Weiter sei $0 < \sigma_1 < \operatorname{Min}\left(\frac{1-\rho}{2}, \frac{1}{4np\tau_1}\right)$.

Zwei Fälle können eintreten:

1. Es gibt ein $\delta > 0$, so daß jede Strecke mit einer Länge kleiner als δ, deren Endpunkte in A liegen, ganz in A enthalten ist. Dann ist A im kleinen konvex, nach dem schon erwähnten Satz von Tietze also konvex.

2. Die zweite Möglichkeit, es gäbe kein solches δ, führen wir auf einen Widerspruch. Angenommen, es gibt eine Strecke mit einer Länge kleiner als $2\sigma_1$, deren Endpunkte zu A, aber deren Innenpunkte nicht sämtlich zu A gehören. Diese Strecke enthält dann auch eine Teilstrecke $P_1 Q_1$, wo P_1, Q_1, aber kein Innenpunkt von $P_1 Q_1$ zu A gehören. Die Teilmenge $B_1 = \{P_1, Q_1\}_M$ von A liegt in $\mathfrak{K}(P_1, Q_1; \tau_1)$; da sie einfach zusammenhängend ist, verbindet sie P_1 und Q_1 innerhalb eines der beiden kongruenten Zweiecke $\mathfrak{K}_1'$, $\mathfrak{K}_1''$, in die $\mathfrak{K}(P_1, Q_1; \tau_1)$ durch $P_1 Q_1$ zerlegt wird, etwa in $\mathfrak{K}_1'$. Sei R_1 der Mittelpunkt von $P_1 Q_1$ und S_1 der R_1 am nächsten gelegene Schnittpunkt von B_1 mit der Mittelsenkrechten auf $P_1 Q_1$ in $\mathfrak{K}_1'$. Mit ρ_1 bezeichne ich den Radius des Kreises durch P_1, Q_1, S_1, mit $\widehat{P_1 S_1}$, $\widehat{Q_1 S_1}$ die entsprechenden Teilbogen dieses Kreises. Nun stehen wir vor zwei Möglichkeiten:

(a) Wenigstens eines der Dreiecke $\widehat{P_1 S_1} R_1$, $\widehat{Q_1 S_1} R_1$ enthält im Innern keinen Punkt von B_1, etwa das erste. Dann setze ich $P_2 = P_1$, $Q_2 = S_1$. Bestimmt man dazu wie eben R_2, S_2 und ρ_2, dann ist offenbar

$$\rho_2 \leqq \rho_1 \qquad \text{und} \qquad \overline{P_2 Q_2} < \frac{3}{4} \overline{P_1 Q_1}.$$

(b) Im Innern jedes der beiden genannten Dreiecke befinden sich Punkte von B_1. Würde es im Innern beider Dreiecke in beliebiger Nähe von S_1 Punkte von B_1 geben, etwa U im ersten, V im zweiten Dreieck mit

$$\overline{UV} < \frac{1}{2 n p \rho_1},$$

dann wäre $\mathfrak{K}(U, V; \rho_1)$ ganz im Innern des Zweiecks $\mathfrak{K}(P_1, Q_1; \rho_1)$ und die in $\mathfrak{K}(U, V; \rho_1)$ liegende Teilmenge $\{U, V\}_M$ von B_1, die U und V verbindet, müßte die Strecke $R_1 S_1$ im Innern durchsetzen.

Das widerspricht der Konstruktion von S_1. Wir können deshalb annehmen, daß die Punkte von B_1 etwa im Innern von $P_1 \frown S_1 R_1$ von S_1 einen endlichen Abstand bewahren; sei d das betreffende Abstandsminimum. Da B_1 abgeschlossen ist, so gibt es einen Punkt P_2 im Innern von $P_1 \frown S_1 R_1$ oder auf $P_1 \frown S_1$ mit $P_2 S_1 = d$. Ich setze dann $Q_2 = S_1$ und konstruiere wieder R_2, S_2 und ρ_2. Man sieht leicht ein, daß auch diesmal

$$\rho_2 \leqq \rho_1 \text{ und } \overline{P_2 Q_2} < \frac{3}{4} \overline{P_1 Q_1}.$$

Fortsetzung der in (a) und (b) beschriebenen Konstruktion führt auf P_k, Q_k, R_k, S_k und ρ_k mit

$$\rho_k \leqq \rho_1, \ \overline{P_k Q_k} < \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \overline{P_1 Q_1}, \ k = 1, 2, \ldots \tag{2,5}$$

Ist das Verfahren so weit fortgeschritten, daß

$$\overline{P_k Q_k} < \frac{1}{2 n p \rho_k},$$

was ja wegen (2,5) einmal eintreten muß, dann haben wir den gewünschten Widerspruch. Denn dann ist der Punkt S_k in $B_k = \{P_k, Q_k\}_M$, also im Zweieck $\mathfrak{K}\left(P_k, Q_k; \frac{1}{2 n p \overline{P_k Q_k}}\right)$ enthalten, während er nach Konstruktion auf dem Rand des Zweiecks $\mathfrak{K}(P_k, Q_k; \rho_k)$ liegen muß, das aber ersteres Zweieck, von den Punkten P_k, Q_k abgesehen, im Innern enthält.

3. Entzerrungsabbildungen. Sehr aufschlußreich für die Struktur der M-konvexen Mengen ist

Satz 4. Jedes Kreismittel M läßt sich entzerren, d. h. es gibt eine konforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf ein konvexes Gebiet G, in dem das Bildmittel von M entzerrt ist.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, wie sich die Funktion $K_M(z)$ (siehe **2**) bei einer konformen Abbildung $z = f(\zeta)$ transformiert. Ist $\zeta = \varphi(z)$ die Umkehrung dieser Abbildung, dann ist

$$N(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \varphi\left(M\left(f(\zeta_1), \ldots, f(\zeta_n)\right)\right)$$

das transformierte Mittel. Ein elementarer Differentiationsprozeß ergibt

$$L_N(\zeta) = \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \zeta_1^2}\right]_{\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = \zeta} = \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + f'(\zeta) K_M(f(\zeta)),$$

oder in die Veränderliche z umgeschrieben:

$$\varphi'(z)\, L_N(\varphi(z)) = -\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + K_M(z).$$

Soll nun das Mittel N entzerrt sein, dann muß $L_N(\varphi(z)) \equiv 0$ sein. Dies liefert, da $n \geq 2$, für die Abbildungsfunktion $\varphi(z)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{n^2}{n-1} K_M(z),$$

oder von einer unwesentlichen Konstanten abgesehen,

$$\varphi'(z) = e^{\frac{n^2}{n-1}\int\limits_0^z K_M(w)\, dw}.$$

Für jedes z mit $|z| < 1$ ist also $\varphi'(z) \neq 0$. Daher vermittelt die Funktion

$$\zeta = \varphi(z)$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $|z| < 1$ auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet G der ζ-Ebene, welches aber möglicherweise nicht schlicht ist. Das Mittel N hat G als Grundgebiet und ist entzerrt. Wir zeigen nun, daß für jedes Punktepaar ζ_1, ζ_2 von G die Punktmenge $A = \{\zeta_1, \zeta_2\}_N$ eine konvexe Menge ist. Es gibt nämlich ein $\rho > 0$, so daß jede Kreisscheibe mit dem Radius ρ, deren Mittelpunkt auf A liegt, schlicht und N-konvex ist. Für jede solche Kreisscheibe gilt aber Satz 3. Daher ist A gleichmäßig im kleinen konvex. Überdeckt man nun A mit einem Netz von Quadraten, deren Seitenlänge kleiner ist als $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$, dann ist der Durchschnitt von A mit jedem einzelnen Quadrat konvex. Indem man beim Übergang von einem Quadrat zu den anliegenden Quadraten die Konvexität im kleinen von A beachtet, ergibt sich, daß A im großen konvex ist. Dann ist aber auch G konvex und damit schlicht.

Wie man aus obiger Differentialgleichung sieht, ist die Entzerrungsabbildung $\zeta = \varphi(z)$ bis auf eine Ähnlichkeitstransformation durch M eindeutig bestimmt. Für Fragen, die die Struktur der Konvexitäten betreffen, ist aber diese Willkür unwesentlich.

4. Ein Identitätssatz. Wir brauchen noch den

Satz 5. *Ist M ein analytisches Mittel in G und Q ein quasiarithmetisches Mittel in G, und ist jedes Q-konvexe Kontinuum zugleich M-konvex, dann sind M und Q identisch.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist für irgendein Punktepaar z_1, z_2 der analytische Kurvenbogen $\{z_1, z_2\}_Q$ M-konvex, und da $\{z_1, z_2\}_M$ die kleinste abgeschlossene M-konvexe Menge ist, die z_1, z_2 enthält, so ist

$$\{z_1, z_2\}_M \subset \{z_1, z_2\}_Q.$$

Andererseits muß $\{z_1, z_2\}_M$ jeden Punkt von $\{z_1, z_2\}_Q$ enthalten. Entfernt man nämlich von $\{z_1, z_2\}_Q$ einen von z_1, z_2 verschiedenen Punkt, so erhält man eine Menge, die z_1 und z_2 nicht mehr verbindet. Da aber $\{z_1, z_2\}_M$ die Punkte z_1, z_2 verbindet, so ist

$\{z_1, z_2\}_M = \{z_1, z_2\}_Q$. Anwendung von Satz 1 ergibt, daß M ein quasiarithmetisches Mittel ist. Es findet sich also eine konforme Abbildung φ von G auf ein konvexes Gebiet H, bei der M in das arithmetische Mittel übergeht, und eine Abbildung ψ von G auf ein konvexes Gebiet H', durch die auch Q in das arithmetische Mittel übergeführt wird. Betrachten wir die durch diese beiden Abbildungen vermittelte Abbildung von H auf H'; offenbar führt sie gerade Linien in gerade Linien über. Die einzigen derartigen konformen Abbildungen sind aber die Ähnlichkeitstransformationen. Gegenüber solchen Abbildungen ist aber das arithmetische Mittel invariant; daher ist $M = Q$.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt sofort, daß jede Entzerrungsabbildung eines quasiarithmetischen Mittels gerade eine jener Abbildungen ist, die dieses Mittel in das arithmetische überführen.

5. Beweis von Satz 2. Man betrachte M in einer M-konvexen Kreisscheibe; wenn gezeigt ist, daß M dort quasiarithmetisch ist, dann ist es dies überhaupt. Da sich nach Satz 4 jedes Kreismittel entzerren läßt, genügt es, den Satz 2 für ein entzerrtes Kreismittel zu beweisen; die Eigenschaft, im kleinen M-konvex zu sein, ist nämlich konform invariant. In der Tat, ist A eine im Punkt z M-konvexe Menge im Grundgebiet G des Mittels M und A_1 das Bild von A im Grundgebiet G_1 des Bildmittels M_1, dann ist der Durchschnitt von A mit einer M-konvexen Kreisscheibe K mit dem Mittelpunkt z eine M-konvexe Menge. Ist z_1 das Bild von z, dann gibt es eine M_1-konvexe Kreisscheibe K'_1 um z_1, die ganz in der Bildmenge K_1 von K enthalten ist. Als Durchschnitt zweier M_1-konvexer Mengen ist

$$A_1 K'_1 = (A_1 K_1) K'_1$$

M_1-konvex. A_1 ist also im Punkt z_1 M_1-konvex.

Sei nach diesen Vorbemerkungen M ein entzerrtes Kreismittel und jede im kleinen M-konvexe Menge auch im ganzen M-konvex. Ist bereits gezeigt, daß jedes im gewöhnlichen Sinn konvexe Kontinuum mit inneren Punkten M-konvex ist, dann ist auch jede Strecke, als Durchschnitt zweier konvexer Kontinuen mit inneren Punkten M-konvex. Dann ist also jedes konvexe Kontinuum M-konvex, nach Satz 5 daher M das arithmetische Mittel. Es ist also nur noch zu zeigen, daß ein konvexes Kontinuum A mit inneren Punkten M-konvex ist. Man kann A darstellen als Limes einer Folge von aufsteigenden konvexen Kontinuen $A_1 \{ A_2 \} \ldots \{ A_\lambda \} \ldots$, wobei der Rand von A_λ eine konvexe Kurve ist, deren Krümmungsradien eine obere Schranke haben.[6] Ich behaupte nun, daß A_λ im kleinen M-konvex ist. Offenbar ist A_λ in jedem inneren Punkt M-konvex. Sei $z = a$ ein Randpunkt von A_λ und $|z - a| \leqq \sigma$ eine M-konvexe Kreisscheibe. Nach den Ergebnissen von **2** können wir σ so klein wählen, daß für einen Radius τ, der größer ist als das Maximum der Krümmungsradien des Randes von A_λ,

$$|M(z_1, \ldots, z_n) - b| \leqq \tau$$

gilt, sobald $|z_\nu - a| \leqq \sigma$ und $|z_\nu - b| \leqq \tau$, $\nu = 1, \ldots, n$. Bezeichnet C_ζ die Kreislinie vom Radius τ, die den Randpunkt ζ von A_λ in $|z - a| \leqq \sigma$ enthält und deren zugehörige abgeschlossene Kreisscheibe K_ζ alle Punkte von A_λ enthält, so ist durch die vereinbarte Wahl von σ erreicht, daß der Durchschnitt D_ζ von $|z - a| \leqq \sigma$ mit K_ζ eine M-konvexe Menge ist. Dann ist aber auch der Durchschnitt D aller D_ζ, wenn ζ alle in $|z - a| \leqq \sigma$ gelegenen Randpunkte von A_λ durchläuft, M-konvex. Wie man unmittelbar einsieht, ist D gerade der Durchschnitt von A_λ mit $|z - a| \leqq \sigma$. Damit ist gezeigt, daß A_λ auch im Punkt a M-konvex ist. A_λ ist daher im kleinen M-konvex, nach Voraussetzung also M-konvex. A ist dann wegen der Stetigkeit von $M(z_1, \ldots, z_n)$ als Limes von M-konvexen Mengen selbst M-konvex. Damit ist alles bewiesen.

6. Der Struktursatz. Bezeichnet M_0 das arithmetische Mittel, so kann man Satz 3 folgendermaßen formulieren:

Satz 3′. Ist N ein entzerrtes Kreismittel, dann ist jedes N-konvexe Kontinuum zugleich M_0-konvex.

---

[6] Dies läßt sich z. B. bewerkstelligen, indem man das Innere von A konform auf das Gebiet $|w| < 1$ abbildet. Nimmt man für A_λ das Bild der Scheibe $|w| \leqq 1 - \frac{1}{\lambda + 1}$, so folgt aus dem Studyschen Satz über die konforme Abbildung konvexer Gebiete, daß A_λ die oben verlangte Eigenschaft hat.

Vermöge einer konformen Abbildung, die N in das Mittel M, M_0 in das quasiarithmetische Mittel Q_M überführt, folgt dann zusammen mit Satz 4 und 5 der Struktursatz,

Satz 6. Jedem Kreismittel M ist in eindeutiger Weise ein quasiarithmetisches Mittel Q_M zugeordnet von der Beschaffenheit, daß jedes M-konvexe Kontinuum zugleich Q_M-konvex ist.

Auf das durch Satz 6 definierte quasiarithmetische Mittel Q_M, das die Struktur der M-Konvexität zeichnet, wird man auch geführt, wenn man die iterierten Mittel von M betrachtet; hierüber möchte ich in größerem Zusammenhang an anderer Stelle berichten.

Princeton (N. J.), den 11. Dezember 1934.