Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1934. Heft I
Januar-März-Sitzung

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Geometrischer Beweis des Satzes von Beltrami-Enneper über die Windung der Asymptotenlinien.

Von Othmar Baier in München.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung vom 3. März 1934.

Der Satz lautet:

Die Windungen der durch einen Flächenpunkt hindurchgehenden Asymptotenlinien sind in diesem Punkt entgegengesetzt gleich und ihrem absoluten Betrage nach gleich der Wurzel aus dem negativ genommenen Gaußschen Krümmungsmaß des betreffenden Flächenpunktes.

Soweit mir bekannt ist, wurde der Beweis dieses Satzes in der Literatur[1] bisher durch kürzere oder längere Rechnungen geführt. Der folgende Beweis will den Satz in geometrische Evidenz setzen.

Da die Schmiegebenen der Asymptotenlinien mit den Tangentialebenen der Fläche übereinstimmen, sind die Binormalen der Asymptotenlinien mit den Flächennormalen identisch. Bei der Gaußschen sphärischen Abbildung ist daher der absolute Betrag der Torsion

$$\left|\frac{1}{\tau}\right| = \lim_{s \to 0} \frac{s'}{s}. \tag{1}$$

Dabei ist s die Länge des von zwei Punkten P und Q begrenzten Stücks einer Asymptotenlinie, s' die Länge ihres Bildes.

Wenn ein Punkt in Richtung einer Asymptotenlinie wandert, dreht sich seine Tangentialebene um die konjugierte Gerade, das ist die Tangente selbst. Daher steht die Tangente einer Asymptotenlinie auf der Tangente ihres Bildes im entsprechenden Bildpunkt senkrecht.[2] Dies folgt auch aus der 3. Frenetschen Formel.

[1] Vgl. Beltrami, Opere mat. I, 1902, S. 301; Enneper, Gött. Nachr. 1870, sowie die bekannten Lehrbücher der Differentialgeometrie.

[2] Daraus folgt sofort, daß die sphärische Abbildung einer reellen Minimalfläche konform ist. In diesem Fall schließt jede Asymptotenlinie mit den Krümmungslinien gleiche Winkel ein und dasselbe gilt für die Bildkurven. Da ferner das Büschel der durch einen Flächenpunkt gehenden Tangenten projektiv abgebildet wird, sind entsprechende Winkel gleich.

Durch P (s. Fig. 1) sei eine Krümmungslinie PR, durch Q die Krümmungslinie QR der anderen Schar gezogen. Die Tangenten an eine Krümmungslinie in einem Punkt ist zur Tangente ihres Bildes im entsprechenden Bildpunkt parallel. Es sei

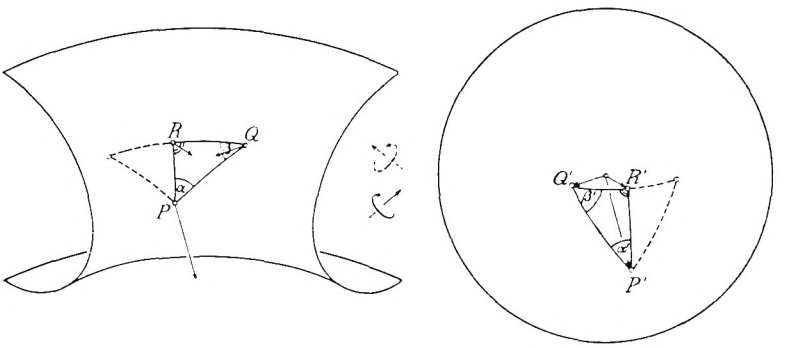

Fig. 1.

$$\alpha = \measuredangle(\widehat{PQ}, \widehat{PR}), \qquad \alpha' = \measuredangle(\widehat{P'R'}, \widehat{P'Q'}),$$
$$\beta = \measuredangle(\widehat{QR}, \widehat{QP}), \qquad \beta' = \measuredangle(\widehat{Q'P'}, \widehat{Q'R'}).$$

Dann ist

$$(2) \qquad \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha, \qquad \beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$$

und es gilt mit $s \to 0$

$$(3) \qquad \beta \to \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha', \qquad \beta' \to \alpha.$$

Die krummlinig begrenzten Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ streben somit der Ähnlichkeit zu. Man wird so auf die Vermutung geführt, daß sich beim Grenzübergang $s \to 0$ die Seiten s' und s wie die Wurzeln aus den Flächeninhalten f' und f verhalten:

$$(4) \qquad \lim_{s \to 0} \frac{s'}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{f}} = \sqrt{-K} \text{ (Gaußsches Krümmungsmaß).}$$

Dies läßt sich leicht bestätigen: Es seien die auf die ebenen

und geradlinig begrenzten Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ bezogenen Größen durch Querstriche bezeichnet. Dann gilt:

$$\lim_{s\to 0}\frac{s'}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\bar{s}'}{\bar{s}}. \tag{5}$$

Ferner ist

$$\frac{f'}{f}=\frac{\bar{s}'^2}{\bar{s}^2}\cdot\frac{\varphi(\bar{\alpha}',\beta')}{\varphi(\bar{\alpha},\beta)}, \tag{6}$$

wobei $\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Daraus folgt wegen $\bar{\alpha}'\to\alpha'\to\beta$, $\beta'\to\beta'\to\alpha$

$$\lim_{s\to 0}\frac{\bar{s}'}{\bar{s}}=\lim_{s\to 0}\frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{f}}. \tag{7}$$

Außerdem gilt

$$\lim_{s\to 0}\frac{f'}{f}=\lim_{s\to 0}\frac{f'}{f}=-K. \tag{8}$$

Aus (1), (5), (7), (8) folgt die Behauptung (4). Dieselbe Betrachtung gilt für die andere Asymptotenlinie. Daß die beiden durch einen Punkt gehenden Asymptotenlinien entgegengesetzt gewunden sind, ist unmittelbar ersichtlich.

Für Regelflächen gilt der Satz und der obige Beweis, wenn man die Tangentialebenen als Schmiegebenen der geradlinigen Erzeugenden auffaßt.

Der Satz von Beltrami-Enneper ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes:[3]

Haben auf einer Fläche (Fig. 2) zwei Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ_1}$ und $\overset{\frown}{PQ_2}$ mit den Längen s_1 und s_2 in P konjugierte Tangenten und sind s_1' und s_2' die Längen der entsprechenden sphärischen Bilder, so gilt

$$\lim_{s_1\to 0}\frac{s_1'}{s_1}\cdot\lim_{s_2\to 0}\frac{s_2'}{s_2}=|K|. \tag{9}$$

[3] Kommerell, Verallgemeinerung des Enneper'schen Satzes von der Torsion der Asymptotenlinien, Math.-naturw. Mitteilungen in Württemb. 2. Ser. 3. Bd. (1901).

Der Beweis kann mit der gleichen Methode wie oben geführt werden. Die Figur 2 bezieht sich auf den Fall eines elliptischen Flächenpunktes. Im Fall eines hyperbolischen Flächenpunktes verläuft der Beweis analog, im Fall eines parabolischen Flächenpunktes ist der Satz evident.

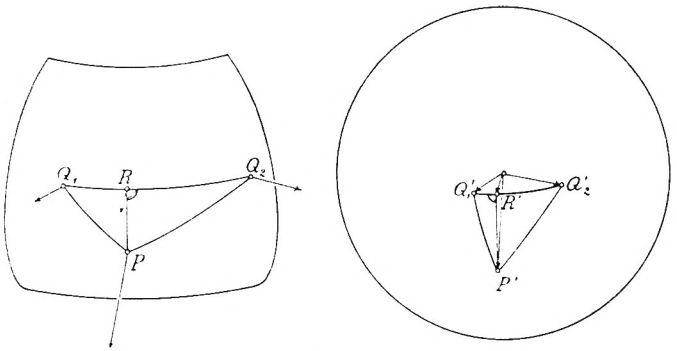

Fig. 2.

Es seien $\overset{\frown}{PR}$ und $\overset{\frown}{Q_1RQ_2}$ Krümmungslinien (s. Fig. 2). Dann streben die Dreiecke PRQ_1, $Q_2'R'P'$ und PRQ_2, $Q_1'R'P'$ der Ähnlichkeit zu. Denn es ist

$$(10) \quad \measuredangle Q_1'P'R' = \frac{\pi}{2} - \measuredangle RPQ_2, \quad \measuredangle R'P'Q_2' = \frac{\pi}{2} - \measuredangle Q_1PR.$$

Es seien ferner die Flächeninhalte der Dreiecke PRQ_1, PRQ_2 mit f_1, f_2, die ihrer Bilder mit f_1', f_2' bezeichnet. Dann ist

$$(11) \quad \lim_{s_1 \to 0} \frac{s_1'}{s_1} \cdot \lim_{s_2 \to 0} \frac{s_2'}{s_2} = \lim_{s_1 \to 0} \frac{s_1'}{s_2} \cdot \frac{s_2'}{s_1} = \lim_{s_1 \to 0} \frac{\sqrt{f_1'}}{\sqrt{f_2}} \cdot \frac{\sqrt{f_2'}}{\sqrt{f_1}} = |K|$$

Im elliptischen Fall sind die Normalen längs der Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ_1}$, $\overset{\frown}{PQ_2}$ entgegengesetzt, im hyperbolischen Fall gleich gewunden. Sind die Tangenten an $\overset{\frown}{PQ_1}$ und $\overset{\frown}{PQ_2}$ Tangenten an Krümmungslinien, so ist (9) evident. Der obige Beweis gilt jedoch nicht mehr. Von einer „Windung" der Normalen längs der Kurvenbogen kann in diesem Fall nicht mehr gesprochen werden.