XIII.

Physisch - mathematische Abhandlung über die Bewegung des Wassers in offenen Canälen,

von

Carl Christian Langsdorf
in Heidelberg.

Von den Vorarbeiten Anderer.

§. 1.

Schon im Jahre 1775 beschäftigte sich Chezy, Director des Instituts für den Unterricht im Brücken- und Straſsenbau zu Paris, mit diesem Gegenstande, und die Formel, die er damals hypothetisch festsetzte, ist eigentlich diejenige, die wir bey hierher gehörigen Berechnungen noch jetzt in Teutschland als Näherungsformel gebrauchen, und die wir gewöhnlich als die abgekürzte Dubuatsche oder als eine aus letzterer abgeleitete erwähnen.

Es sey nämlich auf eine Länge λ der Wasserquerschnitt unveränderlich $=$ m n r s (Tab. XIII Fig. 1), der Flächeninhalt dieses Querprofils $= \omega$, der ganze benetzte Umfang m n $+$ n r $+$ r s $= \chi$, der Abhang der Oberfläche auf die Länge $\lambda = \zeta$, die Geschwindigkeit des Wassers für diese Länge (die mittlere Geschwindigkeit verstanden) $= U$, so behauptete schon damals Chezy, der Quotient $\frac{\chi \cdot U^2}{\frac{\zeta}{\lambda} \cdot \omega}$ sey für alle fliessende Wasser in allen Betten immer gleich groſs. Wäre also für irgend ein Bett

$$\frac{\chi \cdot U^2}{\frac{\zeta}{\lambda} \cdot \omega} = N,$$

so müſste für jedes andere Bett eben der Ausdruck zur Linken derselben Zahl N gleich seyn. Nur N ist hierbey eine unveränderliche Zahl. Man hätte daher allgemein

$$U = \sqrt{\left(N \cdot \frac{\zeta}{\lambda} \cdot \frac{\omega}{\chi}\right)}$$

so, daſs es nur darauf ankäme, mittelst mehrerer Beobachtungen den Werth von N ein- für allemal zu bestimmen.

Ich habe in mehreren meiner Schriften die Ungerechtigkeit gegen ihren Erfinder begangen, diese Formel, weil sie sich leicht aus der Dubuatschen ableiten läſst, dem Ritter Dubuat zuzuschreiben. Erst durch die Recherches physico-mathematiques sur la théorie des eaux courantes par R. Prony [1]) bin ich belehrt worden, daſs die Ehre dieser Erfindung dem verstorbenen Chezy gebühre, der zugleich mit Perronet arbeitete. Erst 1779 erschien die erste Ausgabe und 1786 die zweyte von den jetzt überall bekannten Principes d'Hydraulique von Dubuat, worin dieser Schriftsteller die Sache in weit gröſserem Umfange, und man kann sagen, mit einer Genauigkeit behandelte, die der Gegenstand gar nicht zuläſst.

1) Eine Uebersetzung dieses Werks mit vielen von mir beygefügten Bemerkungen ist, indem ich dieses schreibe, unter der Presse.

zuläſst. Seine Beobachtungen und Schlüsse leiteten ihn auf die Formel

$$U = \frac{(243{,}7 \cdot g')^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}} - 0{,}1\right]}{\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\text{logn.}\left(\frac{\lambda}{\zeta} + 1{,}6\right)} - 0{,}3 \cdot \left[\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}} - 0{,}1\right]$$

wo sich alle Maaſse auf Pariser Zolle beziehen, und $g' = 362$ ist. Im Grunde führt aber diese Formel der Wahrheit nicht näher als die weit einfachere chezysche, die aus der vorstehenden wieder hervorgeht, wenn man ihre feineren Bestandtheile, die zur Correction dienen, wegläſst.

Späterhin kam Girard, durch eine Idee von Coulomb veranlaſst, auf die Formel

$$\frac{g'\,\omega\,\zeta}{\lambda\,\chi} = N.\ (U + U^2),$$

wo wieder N eine aus Beobachtungen abzuleitende unveränderliche Zahl ist, und g' die obige Bedeutung hat, nämlich dasselbe ist, was bey teutschen Mathematikern durch g ausgedrückt wird.

Endlich legte auch Prony seine Meisterhand an die Vervollkommnung dieser girardschen Formel. Er sah ein, daſs es ungewiſs sey, ob es die Natur der Sache gestatte, U durch eine reine quadratische Gleichung, wie es Chezy annahm, bestimmen zu wollen; daſs man aber auch noch dann dem Gange der Natur zu beschränkte Gränzen vorschreiben könne, wenn man einen und denselben Coëfficient für die erste und für die zweyte Potenz von U beybehalten wollte, wie Girard that. Er setzte daher (freylich nach vielen, hier eigentlich ganz überflüssigen, Untersuchungen erst am Ende des 8ten Bogens)

$$\frac{g'\,\omega\,\zeta}{\lambda\,\chi} = \alpha\,U + \beta\,U^2,$$

 wo

wo α und β unveränderliche Zahlen bezeichnen, die aus Beobachtungen abzuleiten sind.

§. 2.

Schreibt man zur Abkürzung J statt $\frac{\zeta}{\lambda}$, und R statt $\frac{\omega}{\chi}$, so geben Girard's Beobachtungen nach seiner Formel

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54.\ R\ J)}\ \text{Meter}.$$

Die pronysche Formel giebt nach den dabey zum Grunde gelegten Beobachtungen in Metern

$$U = -0{,}07 + \sqrt{(0{,}005 + 3233.\ R\ J)}.$$

Bezeichnen wir die Breite des Wasserquerschnitts in einem parallelepipedischen Canale mit b, und seine Höhe oder Tiefe mit h, so ist $R = \frac{b.\ h}{b + 2h}$.

Es ist aber

$$1\ \text{Meter} = 3{,}18725\ \text{rhl. Fuſs},$$

also $\frac{b\ h}{b+2h}$ einerley mit $\frac{1}{3{,}18725} \cdot \frac{b\ h}{b+2h}$,
wenn b und h sich auf rhl. Fuſse beziehen.

Man erhält also

$$\frac{3233}{3{,}18725} \cdot \frac{b\ h}{b+2h}\ \text{statt}\ 3233 \cdot \frac{b\ h}{b+2h}.$$

Hiernach bleibt nun immer noch in Metern

$$U = -0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + \frac{3233}{3{,}18725}.\ J.\ R\right)}$$
$$= -0{,}07 + \sqrt{(0{,}0049 + 1014.\ J.\ R)}\ \text{Meter},$$

wenn b und h in rhl. Fuſsen ausgedrückt werden.

Soll

Soll sich also U auf rhl. Fuſse beziehen, so muſs man zur Rechten noch mit 3,18725 multipliciren; dieses giebt

$$U = 3{,}187. - 0{,}07 + \sqrt{(0{,}0049 + 1014.\ J.\ R)}\ \text{rhl. F.};$$

also, wenn die in einer Sec. abflieſsende Wassermenge mit M bezeichnet wird, in rhl. Cub. Fuſsen

$$I.\quad M = 3{,}187.\ b\,h.\left(-\,0{,}07 + \sqrt{(0{,}0049 + 1014.\ J.\ R)}\right).$$

Die chezysche Grundformel

$$U = \sqrt{\left(N.\frac{\zeta}{\lambda}.\frac{\omega}{\chi}\right)} = \sqrt{(N.\ J.\ R)}$$

giebt $$\sqrt{N} = \frac{U}{\sqrt{J.\ R}}.$$

Nimmt man aus den dubuatschen Beobachtungen zusammengehörige Werthe von U, J und R, so findet man, U und R in rhl. Fuſsen ausgedrückt, sehr mannigfaltige Werthe für $\sqrt{N}$, z. B. $= 80$, $= 90$, $= 100$, $= 120$ etc. Setzt man die allzuweit von einander abstehenden bey Seite, und nimmt aus den übrigen das arithmetische Mittel, so kann man $\sqrt{N} = 91$ annehmen. So giebt also die chezysche Grundformel

$$U = 91.\ \sqrt{J.\ R}$$

und $$II.\quad M = 91.\ b.\ h.\ \sqrt{J.\ R}\ \text{Cub. Fuſse.}$$

Beyde Gleichungen (I und II) setzen aber voraus,

1) daſs längs dem ganzen Canale die Werthe von b und h ungeändert bleiben; daſs also der Abhang der Wasserfläche zugleich der Abhang der Bodenfläche sey:

2) daſs die Geschwindigkeit des Wassers nicht unter 3 Zollen, aber auch nicht über 5 Fuſse betrage. Wenn nämlich gleich die Uebereinstimmung der Rechnungsresultate mit den dubuatschen Beobachtungen bey den dabey Statt gefundenen

kleinsten

kleinsten und gröſsten Geschwindigkeiten nicht nur nicht geringer als bey den zwischenliegenden ist, sondern häufig die bey zwischenliegenden noch übertrifft, so ist man doch nicht berechtigt, in den Anwendungen der Formeln weit unter oder über die Gränzen hinaus zu gehen, innerhalb welchen die Beobachtungen angestellt sind;

3) daſs, wenn man $\frac{b\,h}{b+2\,h}$ statt R schreiben will, ein parallelepipedischer Canal vorausgesetzt werden muſs.

Da es indessen hier auf Annäherung ankommt, so ist es nicht nöthig, daſs dieser Foderung in aller Schärfe Genüge geschehe.

Wären auch b und h nicht in aller Schärfe unveränderlich, sondern, im Canale mit lothrechten Wänden, die kleinste Breite $= B$, die gröſste $= b$; die kleinste Wassertiefe $= H$, die gröſste $= h$; so würden die obigen Formeln immer noch ihre Brauchbarkeit behalten, wenn nur $\frac{b - B}{b}$ und $\frac{h - H}{h}$ kleine Brüche, z. B. nicht $> 0{,}1$, wären, und nun für Breite, so wie für die Tiefe, ein gehöriger mittlerer Werth substituirt würde, wofern nur die Aenderung von Breite und Tiefe jedesmal allmählig erfolgt, so daſs sie nur einen kleinen Theil der Länge ausmacht, welche dieser allmähligen Aenderung unterworfen ist.

Ständen überdas auch die Seitenwände nicht lothrecht, sondern so, daſs das Quer- oder Breitenprofil ein Trapez wie m n r s bildete (Fig. 1.), wo m o $=$ t s die Gröſse der Böschung ist, so könnte man auch dann noch den Canal als einen parallelepipedischen betrachten, indem man die mittlere Breite des Profils $v\,\omega = b$ setzt.

Unter

Unter diesen Voraussetzungen hat man also nach Chezy's Grundformel

$$\text{I.*}\quad M = 91.\sqrt{\frac{\zeta.\, b^3\, h^3}{\lambda.\,(b+2\,h)}}$$

$$\text{II.*}\quad h^3 - \frac{2\,M^2\,\lambda}{8281.\,\zeta.\,b^3}.\,h = \frac{M^2.\,\lambda}{8281.\,\zeta.\,b^2}$$

$$\text{III.*}\quad b^3 - \frac{M^2\,\lambda}{8281.\,\zeta.\,h^3}.\,b = \frac{2\,M^2\,\lambda}{8281.\,\zeta.\,h^2}.$$

Anm. Es ist keinem Zweifel unterworfen, daſs mit zunehmendem Werthe von $\frac{\zeta}{\lambda}$ der Werth von M endlich kleiner werden müsse, als ihn die Formel no. I angiebt, und daſs diese Gleichung eine Aenderung ihrer Form leiden müsse, wenn sie z. B. bis zu $\frac{\zeta}{\lambda} = \frac{1}{20}$ brauchbar werden soll. Man könnte z. B.

$$\left(1 - \frac{n.\,\zeta}{\lambda}\right).\,91 \text{ statt } 91$$

schreiben, und nun den Werth von n gleichfalls aus Beobachtungen ableiten. Vermuthlich würde n nicht viel von 5 verschieden seyn, so lange $\frac{\zeta}{\lambda} < \frac{1}{20}$ wäre. Die bis jetzt angestellten Beobachtungen berechtigen aber nicht, einen Werth von n festzusetzen. Wir sind daher auch nicht berechtigt, die vorstehenden Gleichungen auf Fälle anzuwenden, wo $\frac{\zeta}{\lambda} > 0{,}005$ wäre. Dieser Satz muſs mit der obigen Bedingung no. 2 verbunden werden.

§. 3.

Durch die Bedingung (vor. §. no. 1) wird die Anwendbarkeit der Formeln I und II ungemein beschränkt. Sie begränzt zugleich die Bemühungen und das Verdienst bisheriger Schriftsteller in Bezug auf diesen Gegenstand. Fürs erste versagt sie alle Anwendbarkeit auf *horizontale* Canäle. Weil sie nämlich eine dem

Boden

Boden parallele Oberfläche des Wassers voraussetzt, so wird für einen horizontalen Boden auch die Oberfläche des Wassers horizontal. Allerdings kann dieses durch Herablassung einer am Ende angebrachten Fallschütze bewirkt werden, indem man allen Ab- und Zufluſs hemmt. Dann hat aber alle Bewegung des Wassers ein Ende; und doch weiſs man hinlänglich, daſs auch in einem horizontalen Canale (d. h. mit horizontalem Boden) das Wasser abflieſst, indem sich die Oberfläche selbst einen Abhang bildet. Die allgemeinen Gleichungen I und II geben $M = 0$, sobald $J = 0$ wird, also sobald ein horizontaler Boden angenommen wird, welches gegen die Natur der Sache streitet.

Wird der horizontale Boden nach und nach gegen den Abfluſs hin abgeneigt, so wird zwar die Annäherung der Wasserfläche gegen den Boden *vermindert*, aber nicht *aufgehoben*, so lange man dem Wasser freyen Ablauf über den gleichförmig fallenden Boden gestattet.

Die obigen Gleichungen gelten also nur in Fällen, wo $\frac{b - H}{h}$ ein kleiner Bruch, etwa nicht $> 0{,}05$ ist, und dann der gehörige Mittelwerth zwischen h und H als durchgängige Wassertiefe längs dem ganzen Canale angenommen wird. Dabey bleibt nun die Bestimmung von H der Gegenstand eines Problems, um das sich Chezy, Girard, Dubuat und Prony gar nicht bekümmert haben. Sie setzt die Verwandlung der obigen Gleichungen in andere voraus, welche sowohl h als H enthalten. Auch kein teutscher Schriftsteller hat bis jetzt dieses Problem zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, ein Problem, das nur auf wirklich brauchbare Bestimmungen in Bezug auf die Bewegung des Wassers *in regulären Canälen* abzielt, die bisher noch ganz fehlten. Es ist sehr begreiflich, daſs zuerst die Theorie der Bewegung des Wassers in regulären Canälen näher berichtigt werden muſs, bevor man

zu

zu Anwendungen auf *natürliche Flufsbette* fortschreiten will; und wenn man die folgenden Betrachtungen mit Aufmerksamkeit durchgegangen haben wird, so wird man um so mehr über neuere Hydrotechniker erstaunen müssen, welche es wagen mogten, jene Formeln so geradehin auf natürliche Flufsbette anzuwenden, und dann aus den sich ergebenden Abweichungen die sonderbarsten Folgen zu ziehen, die, anstatt zu beweisen, wie unbrauchbar hier theoretische Untersuchungen seyen, im Gegentheil darauf aufmerksam machen, wie unentbehrlich dem Praktiker tiefere theoretische Kenntnisse bleiben, um sich nicht lächerlich zu machen. Die Berichtigung der obigen Formeln (I. und II. §. 2.) hat ihre grofsen Schwierigkeiten, insofern es nämlich darauf abgesehen ist, ihnen eine allgemeinere Form zu geben, unter der sie für jedes Gefäll des Bodens, wofern nur die Geschwindigkeit nicht über 5 Fufse hinausgeht, anwendbar werden, so dafs das Gefäll (des Bodens) auch $= 0$ und selbst *verneint* seyn, d. h. dafs der Boden auch steigen darf. Die abgeänderten Formeln müssen daher nicht blos den Abhang der Oberfläche oder den Abhang der gesammten Wassermasse, sondern auch den des Bodens als Bestimmungsstück enthalten, und es mufs dabey zugleich darauf Rücksicht genommen werden, ob das Wasser freyen Lauf hat, so dafs es am Ende frey herabstürzen kann, oder ob es irgendwo durch einen Damm oder Fallschütze u. d. g. *aufgeschwellt*, *aufgestaut*, *aufgestämmt* ist.

Ich habe mir diese Untersuchung hier vorgesetzt, und halte mich zunächst an die Formel (I* §. 2), die ich unter der Voraussetzung (§. 3), dafs $\frac{h - H}{h}$ etwa nicht $> \frac{1}{20}$ sey, als Näherungsformel gelten lasse.

Bey der grofsen Schwierigkeit, dieser so sehr beschränkten Gleichung die vorhin erwähnte allgemeinere Form zu geben, werde ich zweyerley Wege versuchen. Es kommt dabey darauf an, nur solche Voraussetzungen zum Grunde zu legen, die der Natur des Gegenstandes angemessen sind, und nun alles übrige der Analysis zu überlassen, die der neuen Gleichung eine Form geben muſs, welche sich von selbst in die ursprüngliche (§. 2. I*) verwandelt, sobald man darin $H = h$ setzt, welches die Voraussetzung ist, welche Chezy bey seiner Grundformel zum Grunde gelegt hat. So entgeht man der Gefahr, Inconsequenzien zu begehen, denen man in Untersuchungen dieser Art so sehr ausgesetzt ist.

Erste Methode

zur Verallgemeinerung der Formel $M = 91 . \sqrt{\frac{\zeta . b^3 . h^3}{\lambda . (b + 2h)}}$ (§. 2. I.*).

§. 4.

Aufg. *Es sey die Wassertiefe im Canale* (Fig. 2) *nicht mehr unveränderlich, sondern am Anfange desselben*

$\gamma\delta = h$;
am Ende $\alpha\eta = H$;
die unveränderliche (mittlere) Breite des Breitenprofils $= b$;
die in jeder Sec. abfliessende Wassermenge $= M$,
das absolute Gefäll von δ bis η oder $\beta\delta - \alpha\eta = \alpha$,
die Länge $\gamma\alpha$, die hier allemal mit der Länge der horizontalen $\alpha\beta$ einerley gelten kann, $= \lambda$,
das absolute Gefäll des Bodens $\beta\gamma = \varepsilon$,
jedes von γ aus auf $\gamma\alpha$ genommene Stück wie $\gamma\alpha' = x$,
die zugehörige Ordinate $\alpha'\eta' = y$,
$\varepsilon\gamma$ wie die $\alpha\beta$ horizontal.

Man soll zwischen H, h, b, ε, λ, x *und* η *eine allgemeine Gleichung unter der Voraussetzung finden, daſs für Fälle, wo H nicht merklich von h verschieden ist, genau genug* $M = 91 . \sqrt{\frac{\alpha b^3 h^3}{\lambda (b + 2h)}}$ *werde.*

Aufl.

Aufl. 1. Die vorstehende Gleichung läſst sich auch so schreiben:

$$M = 91.\ b\,h.\ \sqrt{\frac{\alpha.\ b\,h}{\lambda.\ (b + 2\,h)}},$$

wo b h die Fläche des angenommenen ersten Querprofils, und das Product $91.\ \sqrt{\frac{\alpha.\ b\,h}{\lambda\ b + 2\,h}}$ die Geschwindigkeit des durch jenes Querprofil durchfliessenden Wassers ausdrückt. Bey bestimmten Werthen von α, b und λ bleibt der Ausdruck für die Geschwindigkeit im angenommenen ersten Querschnitte, dessen Fläche $= b\,h$ ist, $= 91.\ \sqrt{\frac{\alpha.\ b\,h}{\lambda.\ (b + 2\,h}}$, wofern die Wassertiefen in allen folgenden Querschnitten $= h$ bleiben. Sind aber diese veränderlich, so ändert sich jener Ausdruck für die Geschwindigkeit im ersten Querschnitte ab. Ist nämlich die Wassertiefe in der Entfernung x vom ersten Querschnitte überhaupt $= y$, und y veränderlich, so hängt jene Geschwindigkeit im ersten Querschnitte von dem Gesetze ab, nach welchem y durch x bestimmt wird. Ich suche daher den mittleren Werth von $\sqrt{\frac{h}{b + 2\,h}}$ auf die ganze Länge λ. Findet man diesen $= \Sigma$, so ist $M = 91.\ b.\ h.\ \Sigma.\ \sqrt{\frac{\alpha\ b}{\lambda}}$.

Weil aber hier gar wohl die Wurzel aus dem mittleren Werthe von $\frac{h}{b + 2\,h}$ für den mittleren Werth von $\sqrt{\frac{h}{b + 2\,h}}$ genommen werden kann, so will ich ersteren, d. h. den mittleren Werth von $\frac{h}{b + 2\,h} = \Sigma$ setzen; dann wird

$$M = 91.\ b.\ h.\ \sqrt{\frac{\alpha.\ b}{\lambda}.\ \Sigma}.$$

2. Es hat aber auch diese erleichterte Bestimmung von Σ noch ihre grosse Schwierigkeit, die sich indessen ohne merklich nachtheiligen Erfolg durch die Voraussetzung heben läſst, daſs jener mittlere Werth Σ genau genug gefunden wird, wenn man die Berechnung so anstellt, als wäre die Oberfläche des Wassers eine schiefe Ebene. Für diese Voraussetzung wird

$$y = h - \frac{\lambda - x}{\lambda}.(h - H) = \left(H + \frac{h - H}{\lambda}\right).x;$$

also

$$b + 2y = b + 2H + \frac{2.(h - H)}{\lambda}.x,$$

und nun

$$\Sigma = \frac{\int\left(\frac{H + \frac{h - H}{\lambda}.x}{b + 2H + \frac{2(h - H)}{\lambda}.x}.dx\right)}{x} \quad (\odot$$

3. Es sey nun $b + 2H + \frac{2.(h - H)}{\lambda}.x = z$,

also

$$x = \frac{Z - (b + 2H)}{2.(h - H)}.\lambda$$

und

$$dx = \frac{\lambda.dz}{2.(h - H)};$$

so wird obiges Integral

$$= \frac{\lambda}{4(h - H)}.(z - b \text{ logn. } z) + C,$$

welches für $x = 0$, also hier für $z = b + 2h$ verschwinden muſs. Daher

Σ

$$\Sigma = \frac{1}{4.(h-H)} \cdot \left[2.(h-H) - b.\left(\text{logn.}(b+2h) - \text{logn.}(b+2H)\right)\right]$$

oder

$$\Sigma = \tfrac{1}{2} - \frac{b}{4.(h-H)} \cdot \left(\text{logn.}(b+2h) - \text{logn.}(b+2H)\right),$$

Hiermit verbindet man die Gleichung

$$M = 91.\ b\,h.\ \sqrt{\frac{\alpha\, b}{\lambda}}.\ \Sigma.$$

§. 5.

Zur Prüfung dient die Untersuchung des Resultats, welches die Formel für $H = h$ giebt.

Für diesen Fall wird h als veränderlich behandelt,

$$\begin{aligned}\text{logn.}(b+2h) - \text{logn.}(b+2H) &= d\,\text{logn.}(b+2h)\\ &= \frac{2.\ d\,h}{b+2h}\\ &= \frac{2.(h-H)}{b+2h};\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\Sigma &= \tfrac{1}{2} - \frac{b}{4.(h-H)} \cdot \frac{2(h-H)}{b+2h}\\ &= \frac{\tfrac{1}{2}b + h - \tfrac{1}{2}b}{b+2h}\\ &= \frac{h}{b+2h},\end{aligned}$$

wie es nach der chezyschen Grundformel seyn soll.

Nur zeigt sich noch in der Bestimmung von α einige Schwierigkeit.

Ein

Ein Theil des ganzen Gefälles, welcher nämlich *allen* Wassertheilchen im Canale zukommt, ist ε (§. 4.); der übrige Theil h — H kömmt nur den Wassertheilchen in der Oberfläche zu; den tiefer liegenden gehört nur ein Theil von h — H.

Man denke sich durch α (Fig. 2) eine Parallele mit der Oberfläche gezogen, so kömmt der Masse H. b. λ das ganze Gefäll ε + H — h zu; die wirklich fliefsende Masse ist für jeden Augenblick $\frac{H+h}{2}.\, b.\, \lambda$; ich setze daher für die gesammte Masse

$$\alpha = \frac{H.\, b.\, \lambda}{\frac{H+h}{2}.\, b.\, \lambda}.\, (\varepsilon + h - H)$$

$$= \frac{2\, H.\, (\varepsilon + h - H)}{H + h};$$

also nunmehr allgemein

$$\odot.)\ M = 91.\, b\, h.\, \sqrt{\left[\frac{b\, H.\, (\varepsilon + h - H)}{\lambda.\, (H + h)}.\left(1 - \frac{b.\, (\ln.\, (b + 2\, h) - \ln.\, (b + 2H))}{2.\, (h - H)}\right)\right]}.$$

Auch diese Formel bleibt noch der chezyschen Grundformel getreu. Setzt man nämlich H = h, wodurch zugleich $\varepsilon = \zeta$ wird, so giebt sie

$$M = 91.\, b\, h.\, \sqrt{\frac{\zeta.\, b\, h}{\lambda.\, (b + 2\, h)}}.$$

§. 6.

So lange h > H ist, bleibt 2 H < H + h, also auch $\alpha < \varepsilon + h - H$. Für H = h wird $\alpha = \varepsilon + h - H$; und für H > h giebt die obige Gleichung für α den Werth von $\alpha > \varepsilon + h - H$, d. h. den mittleren Abhang der ganzen Wassermasse gröfser als den der Oberfläche; in demselben Verhältnisse, wie 2 H > h + H ist, wie sich gehört. Daher gilt die Formel $\odot$ des vor. §. nicht nur für H < h, sondern auch

auch für $H = h$ und selbst für $H > h$. Sie gilt also auch für das aufgeschwellte Wasser Fig 3, wo $\alpha\eta > \gamma\delta$ ist.

§. 7.

Für *horizontale* Canäle, d. h. für Canäle mit horizontalem Boden wird $\varepsilon = o$, also

$$M = 91 . bh . \sqrt{\frac{bH}{\lambda . (h + H)}} . \left(h - H - \tfrac{1}{2} b . \left(\text{logn.} (b + 2h) - \text{logn.} (b + 2H)\right)\right).$$

§. 8.

Beym Gebrauche, welchen man von der allgemeinen Formel (⊙ §. 5) macht, hat man schon angelegte Canäle von solchen, die erst noch angelegt werden sollen, sorgfältig zu unterscheiden. Werden nämlich die *gegebenen* Bestimmungsstücke von einem wirklich angelegten Canale hergenommen, so hat man nie zu fürchten, Data neben einander zu stellen, die nicht neben einander bestehen können. Dieser Fall könnte aber eintreten, wenn man für einen erst noch anzulegenden Canal sämmtliche Bestimmungsstücke bis auf eins, welches gesucht wird, *vorschreiben* wollte. Ich unterscheide daher *gegebene*, d. h. von einem schon vorhandenen Canale hergenommene Bestimmungsstücke von *vorgeschriebenen*, die man für einen erst noch anzulegenden nach Belieben festsetzt. Im letzteren Falle hat man wiederum Canäle *mit freyem Laufe* von Canälen *mit verhindertem Laufe* zu unterscheiden (§. 3).

Bey jedem erst noch anzulegenden Canale giebt es ein Paar Bestimmungsstücke, die nicht beyde zugleich nach Belieben vorgeschrieben werden können, sondern so von einander abhängen, daſs sie nicht einzeln, sondern beyde zugleich aus den übrigen Stücken bestimmt werden müssen. Dahin gehören *bey freyem Laufe* die Gröſsen h und H, die H und M, die h und M, die H und ε, die h und ε, die H und b, die h und b, die H und λ, und die h und λ. Oder: *beym freyen Laufe* können nie h und H zugleich *vorgeschrieben*

geschrieben seyn; folglich muſs allemal entweder h oder H gesucht werden; aber ausser h oder H immer noch eine andere.

Bey *verhindertem Laufe*, wie Fig. 3, verhält sich die Sache anders. Lassen wir anfänglich die Fallschütze ganz nieder, so wird $H = \varepsilon + h$; die Oberfläche wird horizontal; es erfolgt gar keine Bewegung und es wird $M = 0$. Wie wir nun die Fallschütze allmählig erheben, fängt die Bewegung an und der Abfluſs durch den ersten Querschnitt b. h wird allmählig gröſser, je höher wir die Fallschütze aufziehen. Hier findet neben jedem Werthe von h jeder beliebige von H statt, nur daſs $H < \varepsilon + h$ bleiben muſs, und daſs zu jedem anderen Werthe von H auch ein anderer von M gehört, nämlich ein desto gröſserer, je höher wir die Fallschütze aufziehen. Doch kann dieses Wachsen von M nur bis zu einer gewissen Gränze fortdauern. Die Bewegung nähert sich nämlich bey Erhöhung der Fallschütze immer mehr dem freyen Laufe, bis endlich der immer tiefer sinkende Spiegel frey durch die Schützenöffnung hinstreicht, also das Wasser ganz freyen Lauf gewinnt.

Hieraus folgt:

> *Beym freyen Laufe ist der Werth von M allemal ein Maximum, und der von H ein Minimum.* Ich will jenen immer mit $M^{(m)}$, und diesen mit $H^{(k)}$ bezeichnen.

Daher gehören beym freyen Laufe allemal zwey bestimmte Werthe von M und H, nämlich $M^{(m)}$ und $H^{(k)}$, nothwendig zusammen, so daſs, neben den übrigen Bestimmungsstücken, keine dieser beyden Gröſsen beliebig vorgeschrieben werden kann.

Ist aber nicht gerade freyer Lauf vorgeschrieben, sondern auch Aufschwellung gestattet, so kann neben den vorgeschriebenen Werthen von λ, ε, b und h auch noch H oder M vorgeschrieben und hiernach M oder H gesucht werden, wofern nur der vorgeschrie-

bene

bene von $H > H^{(k)}$ oder der vorgeschriebene von $M < M^{(m)}$ ist. Denn für H finden alle mögliche Werthe Statt, die zwischen $H^{(k)}$ und $\varepsilon + h - H$ fallen, und so auch für M alle mögliche Werthe, die zwischen $M^{(m)}$ und o (Null) fallen.

§. 8.(*)

Die vorstehenden Bemerkungen (§. 6) bestimmen den Gebrauch der allgemeinen Formel (⊙. §. 7). Hierzu gehört nun noch folgende Erinnerung. Blos in Bezug auf das arithmetische Verhalten der Größen gegen einander könnte bey verhindertem Laufe der Gleichung (⊙) nicht nur durch $H > H^{(k)}$, sondern auch durch $H < H^{(k)}$ Genüge geschehen, wie wir aus der Analysis wissen. Aber die Voraussetzung $H < H^{(k)}$, welche *arithmetisch* gar wohl gestattet ist, kann *physisch* nicht angenommen werden. Man thut also wohl, wenn man bey den anzustellenden Proberechnungen mit größeren Werthen von H die Probe macht, und dann zu kleineren fortschreitet. So lange man für abnehmende Werthe von H zunehmende von M findet, ist man sicher, daß man noch nicht $H < H^{(k)}$ genommen habe; daß also der so herauskommende Werth von H, welcher der Gleichung Genüge thut, auch physisch richtig ist. Findet man aber für einen abnehmenden Werth von H auch einen abnehmenden von M, so hat man $H < H^{(k)}$ und muß also die Versuche mit größeren Werthen von H machen.

Hat man Berechnungen für freyen Lauf anzustellen, also $H^{(k)}$ und $M^{(m)}$ su suchen, so bleibt man bey demjenigen Werthe von H stehen, welcher den Werth von M größer giebt, als ihn kleinere und größere Werthe von H geben. Die Gleichung (⊙. §. 5) ist *transscendentisch*, und man muß daher den Gedanken aufgeben, die gesuchten Größen aus ihr auf directem Wege ableiten zu wollen. Man muß sich Proberechnungen gefallen lassen. Da man sich aber selbst bey *algebraischen* Gleichungen, wenn sie auf höhere Grade steigen, einer ähnlichen Arbeit unterziehen muß, und in den hier vorkommenden Fällen keine grofse Schärfe nöthig ist, indem selbst die chezysche Grundformel solche nicht zuläfst, so wird man sich in vorkommenden Fällen gern dazu bequemen.

§. 9.

Um hier nichts zu übergehen, was zur genaueren Kenntnifs unseres Gegenstandes gehört, soweit wir dabey einzudringen vermögen, mufs ich noch folgende Bemerkung beyfügen. Die zum Grunde gelegte Betrachtung der Wasserfläche als eine schiefe Ebene kann in Bezug auf die Bestimmung des Werthes von M, und daher auch von b und ε keinen bedeutenden Fehler geben. Da aber aus der Natur der Sache leicht einzusehen ist, dafs Unterschiede in Werthen von M beträchtlich kleiner in Bezug auf M seyn müssen als die Unterschiede der zugehörigen Werthe von H in Bezug auf H, so ist natürlich zu erwarten, dafs die aus jener Voraussetzung einer schiefen Ebene abgeleiteten Werthe von H mit denen, welche eine Begründung auf die wahre Gestalt der Wasserfläche geben würde, nicht so gut zusammenstimmen, als die aus diesen verschiedenen Gestalten der Oberfläche abgeleiteten Werthe von M. Besonders hat dieser Umstand Einflufs auf das Verhalten zwischen H und λ, oder h und λ, wenn z. B. gefragt wird, in welcher Entfernung (für welchen Werth von λ) vom angenommenen ersten Querschnitte die Wassertiefe noch $=$ H seyn werde. Die von der schiefen Ebene etwas abweichende *hohle* Gestalt der Wasserfläche könnte einen Werth von λ geben, welcher von dem aus der Voraussetzung einer schiefen Ebene merklich verschieden wäre. Da aber für diese verschiedenen Voraussetzungen einerley Werth von λ doch nur wenig verschiedene Werthe von H giebt, eben weil kleine Unterschiede in den Werthen von H schon merklich verschiedene Werthe von λ geben können, so hat auch dieser Umstand in dahin gehörigen praktischen Fragen keinen bedeutenden Nachtheil.

Berech-

Berechnungen
zur ersten Methode für horizontale Canäle.

§. 10.

Für Canäle mit horizontalem Boden hat man (§. 7)

$$M = 91.\, b\, h.\, \sqrt{\frac{b\,H}{\lambda.\,(h+H)}}.\, \left(h - H - \tfrac{1}{2} b.\, \ln.\,(b+2h) - \ln.\,(b+2H)\right),$$

also auch

$$\lambda = \frac{8281.\, b^3\, h^2\, H.\, \left[h - H - \tfrac{1}{2} b.\, \left(\ln.\,(b+2h) - \ln.\,(b+2H)\right)\right].}{(H+h).\, M^2}$$

Diese beyden Gröſsen M und λ sind die einzigen, welche sich hier geradezu berechnen lassen, *doch aber nur in dem Falle, wenn die gegebenen Bestimmungsstücke von einem schon angelegten Canale hergenommen sind.* Für *erst noch anzulegende* Canäle muſs allemal entweder H oder h mitgesucht werden, wenn von freyem Laufe die Rede ist; bey nicht freyem können die vorstehenden beyden Gleichungen zwar als directe Bestimmungen gebraucht werden; doch muſs der vorgeschriebene Werth von M nicht $> M^{(m)}$ seyn, und der vorgeschriebene von H nicht $< H^{(k)}$. Wenn man also nach der letzteren Gleichung λ berechnet hat, so muſs man aus den Werthen von λ, b, h und einem Werthe von H, welcher etwas kleiner als der vorgeschriebene ist, den Werth von M nach der ersten Gleichung berechnen. Findet man diesen gröſser als den vorgeschriebenen, so können die vorgeschriebenen Werthe von M und H Statt finden, und der gefundene Werth von λ kann beybehalten werden.

In Rücksicht auf die Genauigkeit von λ s. den vor. §.

Es würde überflüſsig seyn, hier alle einzelne Aufgaben besonders vorzutragen. Die folgenden sind zur Erläuterung der hier anzustellenden Berechnungen hinlänglich.

§. 11.

Aufg. *Für einen anzulegenden horizontalen Canal werden h, b und λ für die Voraussetzung eines freyen Laufs vorgeschrieben; man soll H und M finden.*

Aufl. Aus §. 6 weifs man, dafs hier der Werth von M ein Maxim. werden mufs; letzteres mufs aber nothwendig eintreten, sobald nur $\frac{H}{H+h} \cdot \left[h - H - \frac{1}{2} b. \left(\ln. (b+2h) - \ln. (b+2H)\right)\right]$ ein Max. wird.

Diesen Ausdruck will ich mit A bezeichnen.

Man suche also denjenigen Werth von H, welcher das Max. von A giebt oder $A^{(m)}$; dann hat man

$$M^{(m)} = 91. \, b \, h. \sqrt{\frac{b. \, A^{(m)}}{\lambda}}.$$

Ex. Es soll ein 1000 rhl. Fufs langer Canal zu 10 Fufs breit angelegt werden; der Boden soll horizontal liegen, und das Wasser am Anfange desselben 3 Fufs hoch stehen; man soll die in jeder Sec. abfliessende Wassermenge bestimmen, freyen Lauf vorausgesetzt.

Hier darf die Wassertiefe am Ende des Canals nicht auch noch vorgeschrieben seyn; wenn man sie aber auch nicht zu wissen verlangte, so mufs man sie dennoch suchen, um M zu finden. Es ist aber $\lambda = 1000$; $h = 3$; $b = 10$. Man findet also

I. Für $H = 1,2$ Fufs.

$$\frac{H}{h+H} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}; \qquad \text{logn.} (b+2h) = 5,0751738 - \ln. 10$$

$$\text{logn.} (b+2H) = 4,8202815 - \ln. 10$$

$$h - H = 1,8. \qquad \text{Diff.} = 0,2548923$$

$$b + 2h = 16,0. \qquad \times 5$$

$$b + 2H = 12,4. \qquad = 1,2744615.$$

Also $$A = \frac{2}{7}. (1,8 - 1,2744) = 0,1501.$$

II. Für $H = 1,3$.

$$\frac{H}{h+H} = \frac{13}{43}. \qquad \ln.(b+2h) = 5,0751738 - \ln. 10$$
$$h - H = 1,7. \qquad \ln.(b+2H) = 4,8362819 - \ln. 10$$
$$b+2h = 16,0. \qquad \text{Diff.} = 0,2388919$$
$$b+2H = 12,6. \qquad \times 5$$
$$= 1,1944595.$$

Also $$A = \frac{13}{43}.\ (1,7 - 1,1944) = 0,1528.$$

III. Für $H = 1,4$.

$$\frac{H}{h+H} = \frac{14}{44} = \frac{7}{22}. \qquad \ln.(b+2h) = 5,0751738 - \ln. 10$$
$$h - H = 1,6. \qquad \ln.(b+2H) = 4,8520302 - \ln. 10$$
$$b+2h = 16,0. \qquad \text{Diff.} = 0,2231436$$
$$b+2H = 12,8. \qquad \times 5$$
$$= 1,1157180.$$

Also $$A = \frac{7}{22}.\ (1,6 - 1,1157) = 0,1541.$$

IV. Für $H = 1,5$.

$$\frac{H}{h+H} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}. \qquad \ln.(b+2h) = 5,0751738 - \ln. 10$$
$$h - H = 1,5. \qquad \ln.(b+2H) = 4,8675344 - \ln. 10$$
$$b+2h = 16,0. \qquad \text{Diff.} = 0,2076394$$
$$b+2H = 13,0. \qquad \times 5$$
$$= 1,0381970.$$

Also $$A = \frac{1}{3}.\ (1,5 - 1,03819) = 0,1539.$$

Man sieht hieraus (no. II und IV vergl. mit no. III), daſs man mit hinlänglicher Genauigkeit (no. III)

$$A^{(m)} = 0,1541$$

setzen kann; also

$$H = 1,4 \text{ Fuſs}$$

und $$M^{(m)} = 91.\ 10.\ 3.\ \sqrt{\frac{3 \cdot 0,1541}{1000}} = 107 \text{ Cub. Fuſs. rhl.}$$

Des

Des Wassers Geschwindigkeit ist demnach

am Anfange des Canals $= \frac{107}{10.3} = 3{,}57$ F.,

am Ende . . . . . $= \frac{107}{10.1{,}4} = 7{,}64$ F..

Sie überschreitet also nach und nach die Gränze, innerhalb welcher der Gebrauch der Formel fallen sollte.

Die vorgeschriebene Gränze erfodert, daſs die Geschwindigkeit wenigstens auf keinem merklichen Theil der ganzen Länge über 5 Fuſs betrage. Hiernach dürfte also $\frac{107}{10.H}$ nicht > 5, also H nicht $< \frac{107}{10.5}$ oder nicht $< 2{,}14$ werden, um die Formel mit Sicherheit zu gebrauchen. Für Geschwindigkeiten, die über 5 Fuſs hinausgehen, wird der Widerstand allmählig gröſser, als ihn die Formel voraussetzt. Es wird daher der Werth von H, welcher $A^{(m)}$ giebt, gröſser als 1,4 Fuſs seyn; er muſs zwischen 1,4 und 2,14 fallen. Da aber der Widerstand nur allmählig mit gröſseren Geschwindigkeiten gröſser wird, als ihn die Formel voraussetzt, und auf mehr als $\frac{1}{3}$ der ganzen Canal-Länge die Geschwindigkeit weniger als 5 Fuſs beträgt, so könnte H doch nicht über höchstens 1,6 Fuſs hinaus fallen, und man wäre immer berechtigt, M wenigstens $= 100$ anzunehmen. (s. Anm. zum folg. §.)

§. 12.

Aufg. *Für einen anzulegenden horizontalen Canal werden h, H, b und λ vorgeschrieben, ohne freyen Lauf zu bedingen; man soll entscheiden, ob der Forderung für H Genüge geschehen kann, und für diesen Fall zugleich M finden.*

Aufl. Man suche aus der Gleichung für M (§. 10) den Werth von M; dann berechne man M auch noch für einen Werth von H, der

der kleiner als der vorgeschriebene ist. Findet man letzteren gröſser als den zuerst berechneten, so findet der angenommene Werth von H, folglich auch der berechnete von M Statt.

Ex. Es sey $\lambda = 1000$, $b = 10$, $h = 3$; dabey soll das Wasser am Ende des Canals noch 2 Fuſs hoch stehen. Man fragt, ob dieses Statt finde, und wie viel Wasser in diesem Falle in jeder Secunde abfliessen werde?

Die allgemeine Formel für M (§. 10) giebt zuerst

$$A = \frac{2}{3+2} . (1 - 5. (\ln. 16 - \ln. 14))$$
$$= 0{,}4. (1 - 5. 0{,}1335314)$$
$$= 0{,}1329372$$

und nun

$$M = 91. 30. \sqrt{\frac{10. 0{,}1329372}{1000}}$$
$$= 99{,}5 \text{ Cub. F.}$$

Anm. Jetzt wäre eigentlich erst noch zu prüfen, ob die Gleichung, für $H < 2$, gröſsere Werthe von M gebe. Die im vor. §. schon geführten Berechnungen machen aber hier diese Prüfung überflüssig.

Ausserdem hat man jedesmal noch auf die gröſste Geschwindigkeit Rücksicht zu nehmen, welche das Wasser im Canale, jedesmal da, wo man den kleinsten Querschnitt hat, erlangt. Der kleinste Querschnitt ist hier $b. H = 20$, also die Geschwindigkeit in demselben $= \frac{99{,}5}{20} = 4{,}975$ Fuſs, fällt daher noch innerhalb der vorgeschriebenen Gränze. Hierdurch wird dann auch die Richtigkeit des Resultats am Ende des vor. §. bestätigt.

§. 13.

Aufg. *Für einen anzulegenden horizontalen Canal werden, ohne Bedingung des freyen Laufs, h, b, λ und M vorgeschrieben; man*

man soll entscheiden, ob diese Bestimmungsstücke alle neben einander bestehen können, und für diesen Fall H finden.

Aufl. Aus unserer allgemeinen Gleichung folgt

$$\frac{M^2.\ \lambda}{8281.\ b^3\ h^2} = \frac{H}{H+h}.\ \left[h - H - \tfrac{1}{2} b.\ \left(\text{ln.}\ (b+2h) - \text{ln.}\ (b+2H)\right)\right].$$

Der ganze Ausdruck zur Rechten heiße **A**, so suche man denjenigen Werth von H, welcher

$$A = \frac{M^2.\ \lambda}{8281.\ b^3\ h^2}$$

giebt.

Dann untersuche man, ob für einen etwas kleineren Werth von H der von A größer werde. In diesem Falle hat die Aufgabe Statt, und der gefundene Werth von H ist der gesuchte.

Anm. Zu dieser letzteren Prüfung ist selten noch eine besondere Rechnung nöthig, indem sich die Beurtheilung schon aus den Werthen von A ergiebt, die man für die verschiedenen Werthe von H erhalten hat.

Ex. Es sey $h = 3$, $b = 2$, $\lambda = 1000$ vorgeschrieben; der horizontale Canal soll in jeder Sec. 20 rhl. Cub. F. Wasser abführen. Findet dieser Werth von M Statt, und wie groß ist dann H?

Ich berechne nun zuerst den Werth von $\frac{M^2.\ \lambda}{8281.\ b^3\ h^2}$, und finde

$$\frac{M^2\ \lambda}{8281.\ b^3\ h^2} = 0{,}00537.$$

Es soll also

$$\frac{H}{H+3}.\ \left(3 - H - 5.\ \left(\text{ln.}\ 16 - \text{ln.}\ (10+2H)\right)\right) = 0{,}00537$$

werden. Ich finde nun

I.

I. Für $H = 2{,}2$

$$A = \frac{22}{52} \cdot \left(0{,}8 - 5 \cdot (\ln. 16{,}0 - \ln. 14{,}4)\right)$$

$$= \frac{11}{26} \cdot (0{,}8 - 5 \cdot 0{,}1053605)$$

$$= 0{,}11558.$$

II. Für $H = 2{,}7$

$$A = \frac{27}{57} \cdot \left(0{,}3 - 5 \cdot (\ln. 16{,}0 - \ln. 15{,}4)\right)$$

$$= \frac{27}{57} \cdot (0{,}3 - 0{,}191106)$$

$$= 0{,}0515.$$

III. Für $H = 2{,}95$

$$A = \frac{2{,}95}{5{,}95} \cdot 0{,}018 \ldots\ldots$$

IV. Für $H = 2{,}97$

$$A = \frac{2{,}97}{5{,}97} \cdot 0{,}01121 = 0{,}00557.$$

V. Für $H = 2{,}98$

$$A = \frac{2{,}98}{5{,}98} \cdot 0{,}00748 = 0{,}00372.$$

Nun soll $A = 0{,}00537$ werden; man ersieht also aus III, IV und V, daſs sehr nahe $H = 2{,}97$ seyn muſs.

Anm. Man darf es sich nicht befremden lassen, daſs die beyden so wenig verschiedenen Werthe von H (IV und V) so sehr verschiedene Werthe von A geben. Denn hier kommt es auf die verschiedenen Abhänge der Oberfläche an, also auf $h - H$; diese Differenz ist no. IV $= 3 - 2{,}97 = 0{,}03$; hingegen no. V $= 3 - 2{,}98 = 0{,}02$; also no. IV um die

Hälfte

Hälfte grösser als no. V. Und so ist auch 0,00557 um die Hälfte grösser als 0,00372, welches in diesem Falle der Natur der Sache angemessen, weil sich die Werthe von M^2, die man aus no. IV und no. V. erhält, sehr genau wie die verschiedenen Abhänge der Oberfläche verhalten müssen, und das Verhältniss der Werthe von A mit dem der Werthe von M einerley ist. Es liegt also hierin eine neue Bestätigung der Brauchbarkeit unserer allgemeinen Formel.

§. 14.

Aufg. *Für einen anzulegenden horizontalen Canal sind h, H, λ und M vorgeschrieben, ohne freyen Lauf zu bedingen; man soll entscheiden, ob der Forderung Genüge geschehen könne, und für diesen Fall b finden.*

Aufl. Unsere allgemeine Gleichung giebt

$$\frac{\lambda.(H+h).M^2}{8281.h^2.H} = b^3.\left[h - H - \tfrac{1}{2}b.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)\right].$$

Die Grösse zur Rechten heisse A, so suche man denjenigen Werth von b, welcher

$$A = \frac{\lambda.(H+h).M^2}{8281.h^2.H}$$

giebt. Dann untersuche man, ob für einen kleineren Werth von H der Werth von $\frac{H}{H+h}$. A grösser werde; in diesem Falle findet die Aufgabe mit dem gefundenen Werthe von b statt.

Ex. Es sey h = 2 Fuss (rhl.), H = 1,5; λ = 1000 und M = 10 C. F. vorgeschrieben; können diese Vorschriften Statt finden, und wie breit muss dann der Canal angelegt werden?

Ich berechne zuerst den Werth von $\frac{\lambda.(H+h).M^2}{8281.h^2.H}$, und finde

$$\frac{\lambda.(H+h).M^2}{8281.h^2.H} = \frac{1000.3,5.100}{8281.4.1,5} = 7,04.$$

Es

Es muſs also b so genommen werden, daſs man $A = 7{,}04$ finde. Man findet aber

I. Für $b = 2$

$$A = 8 \cdot \left(0{,}5 - (\ln. 6 - \ln. 5)\right) \text{ offenbar zu klein.}$$

II. Für $b = 2{,}5$

$$A = 15{,}625 \cdot \left(0{,}5 - 1{,}25 \cdot (\ln. 6{,}5 - \ln. 5{,}5)\right)$$

noch zu klein.

III. Für $b = 2{,}7$

$$\begin{aligned} A &= 19{,}68 \cdot \left(0{,}5 - 1{,}35 \cdot (\ln. 6{,}7 - \ln. 5{,}7)\right) \\ &= 19.68 \cdot 0{,}28178 \\ &= 5{,}54. \end{aligned}$$

IV. Für $b = 3{,}5$

$$\begin{aligned} A &= 42{,}875 \cdot \left(0{,}5 - 1{,}75 \cdot (\ln. 7{,}5 - \ln. 6{,}5)\right) \\ &= 42{,}875 \cdot (0{,}5 - 0{,}250426) \\ &= 10{,}707. \end{aligned}$$

V. Für $b = 3{,}1$

$$\begin{aligned} A &= 29{,}79 \cdot \left(0{,}5 - 1{,}55 \cdot (\ln. 7{,}1 - \ln. 6{,}1)\right) \\ &= 29{,}79 \cdot 0{,}2646 \\ &= 7{,}882. \end{aligned}$$

VI. Für $b = 3$

$$\begin{aligned} A &= 27 \cdot \left(0{,}5 - 1{,}5 \cdot (\ln. 7 - \ln. 6)\right) \\ &= 27 \cdot 0{,}2687 \\ &= 7{,}255. \end{aligned}$$

Ohne weiter rechnen zu dürfen, ersieht man hieraus, daſs b zwischen 3 und 2,9 fallen, doch aber näher an 3 als an 2,9 liegen müsse. Man hat daher hinlänglich genau

$$b = 2{,}97 \text{ und } A = 7{,}04.$$

Man

Man hat nur noch zu prüfen, ob die vorgeschriebenen Werthe von H, h und M neben einander Statt finden.

Für H = 1,4 F. wird

$$A = 26{,}2\left(0{,}6 - 1{,}48.\ (\text{ln.}\ 6{,}97 - \text{ln.}\ 5{,}77)\right)$$
$$= 8{,}395$$

und $\frac{H}{H+h}.\ A = \frac{1{,}4}{3{,}4}.\ 8{,}395 = 3{,}45.$

Vorher war

$$\frac{H}{H+h}.\ A = \frac{1{,}5}{3{,}5}.\ 7{,}04 = 3{,}01.$$

Demnach finden die vorgeschriebenen Werthe Statt, und man kann b = 2,97 oder schlechthin b = 3 Fuſs nehmen.

Die gröſste Geschwindigkeit des Wassers im Canale ist

$$= \frac{10}{2.\ 1{,}5} = 3\tfrac{1}{3}\ \text{Fuſs},$$

also noch innerhalb der unserer Formel vorgeschriebenen Gränze.

§. 15.

Aufg. *Für einen anzulegenden horizontalen Canal sind λ, H, b und M vorgeschrieben, wie bisher ohne Bedingung des freyen Laufs; man soll entscheiden, ob die vorgeschriebenen Werthe neben einander Statt finden, und wie groſs dann b seyn müsse.*

Aufl. Unsere allgemeine Gleichung giebt

$$\frac{\lambda.\ M^2}{8281.\ b^3\ H} = \frac{h^2}{h+H}.\left[h - H - \tfrac{1}{2}\,b.\left(\text{ln.}\ (b+2h) - \text{ln.}\ (b+2H)\right)\right].$$

Wird nun die Gröſse zur Rechten mit A bezeichnet, so suche man denjenigen Werth von h, welcher

$$A = \frac{\lambda.\ M^2}{8281..\ b^3\ H}$$

giebt.

Dann

Dann untersuche man, ob ein kleinerer Werth von H den von H. A gröſser giebt. Findet sich dieses, so finden die vorgeschriebenen Werthe Statt, und der gefundene Werth von h ist der gesuchte.

Ex. Es soll ein Mühlgraben mit horizontalem Boden zu 1000 Fuſs lang und 10 Fuſs breit angelegt werden; das Wasser soll am Ende 2,5 Fuſs hoch vor der Schützenöffnung stehen und dabey in jeder Sec. 20 Cub. Fuſs Wasser abfliessen. Kann dieser Forderung Genüge geschehen, und wie groſs muſs h werden?

Ich finde zuerst

$$\frac{\lambda.\ M^2}{8281.\ b^3.\ H} = \frac{1000.\ 400}{8281.\ 1000.\ 2,5} = 0,01932.$$

Es soll also h so genommen werden, daſs $A = 0,0193$ werde, wenigstens beynahe. Ich finde nun

I. Für $h = 2,6$ Fuſs.

$$A = \frac{6,76}{5,1}.\ \left(0,1 - 5.\ (\ln.\ 15,2 - \ln.\ 15)\right)$$

$$= \frac{676}{510}.\ 0,0337 \text{ zu groſs.}$$

II. Für $h = 2,55$

$$A = \frac{6,502}{5,01}.\ \left(0,05 - 5.\ (\ln.\ 15,1 - \ln.\ 15)\right)$$

$$= \frac{6502}{5010}.\ 0,0267 \text{ zu groſs.}$$

III. Für $h = 2,54$

$$A = \frac{645}{504}.\ \left(0,04 - 5.\ (\ln.\ 15,08 - \ln.\ 15)\right)$$

$$= \frac{645}{504}.\ 0,0134$$

$$= 0,0171.$$

Man

Man sieht, dafs der Werth von h, welcher genau $A = 0{,}01932$ giebt, nur unmerklich von 2,54 verschieden seyn kann. Er ist sehr genau $= 2{,}545$. Auch ist leicht zu übersehen, dafs bey einem so geringen Abhange des Wasserspiegels von nur 0,045 Fufs oder 0,54 Zoll auf 1000 Fufs der Werth von H, A gewifs zunehmen müsse, sobald man H kleiner nimmt.

Auch fällt die gröfste Geschwindigkeit des Wassers im Canale innerhalb der Gränze, welche auf unserer Formel vorgeschrieben ist. Es ist also $b = 2{,}545$ der gesuchte Werth von b.

Berechnungen zur ersten Methode für Canäle mit gleichförmig abhängigem Boden.

§. 16.

Bey Betrachtung abhängiger Canäle, worunter ich hier allemal Canäle mit abhängigem Boden verstehe, hat man es mit sechs Bestimmungsstücken zu thun, λ, h, H, ε, b und M (§. 4). Die allgemeine Gleichung zwischen diesen 6 Gröfsen findet man oben (§. 5. ⊙).

Auch hier hat man *freyen* Lauf (Fig. 2) und *verhinderten* (Fig. 4) von einander zu unterscheiden. Bey *horizontalen* Canälen mufste allemal $H < h$ seyn; bey abhängigen kann nicht nur $H = h$, sondern sogar $H > h$ seyn, und die allgemeine Gleichung behält in jedem Falle ihre Gültigkeit (§. 6). Nur mufs $\varepsilon + h - H$ bejaht bleiben, oder $\varepsilon + h > H$ seyn.

§. 17.

Aufg. *Es werden h, b, λ und ε vorgeschrieben; man soll die zusammengehörigen Werthe von H und M für freyen Lauf finden.*

Aufl.

Aufl. Die allgemeine Gleichung (§. 5. ⊙.) giebt

$$\frac{\lambda.\ M^2}{8281.\ b^3.\ h^2} = \frac{H.(\varepsilon + h - H)}{H + h}.\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)}{2.(h-H)}\right).$$

Der ganze Ausdruck zur Rechten heisse A, so suche man denjenigen Werth von H, welcher $A^{(m)}$ (das Max. von A) giebt; alsdann hat man

$$M^{(m)} = 91.\sqrt{\frac{b^3\ h^2\ A^{(m)}}{\lambda}}$$

oder

$$M^{(m)} = 91.\ b\,h.\sqrt{\frac{b.\ A^{(m)}}{\lambda}},$$

und der zugehörige Werth von H ist zugleich ein Minimum.

Ex. Wenn man einen 1000 Fuſs langen Mühlgraben zu 10 Fuſs breit anlegt, in welchem das Wasser am Anfange 4 Fuſs hoch steht, und dessen Boden auf die ganze Länge 2 Fuſs Fall hat; wie hoch wird das Wasser vor der Schützenöffnung stehen, und wieviel wird in jeder Sec. abfliessen?

Hier ist $\lambda = 1000$; $b = 10$; $h = 4$; $\varepsilon = 2$. Ich finde nun

I. Für H = 3,5 Fuſs

$$A = \frac{3{,}5.\ 2{,}5}{7{,}5}.\left(1 - \frac{10.\ (\ln.\ 18 - \ln.\ 17)}{2.\ 0{,}5}\right)$$
$$= 1{,}166.\ (1 - 0{,}57158) = 0{,}5.$$

II. Für H = 3,6

$$A = \frac{3{,}6.\ 2{,}4}{7{,}6}.\left(1 - \frac{10.\ (\ln.\ 18 - \ln.\ 17{,}2)}{0{,}8}\right)$$
$$= 0{,}490.$$

III. Für H = 3,4

$$A = \frac{3{,}4 \cdot 2{,}5}{7{,}4} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot (\ln. 18 - \ln. 16{,}8)}{1{,}2}\right)$$
$$= 0{,}488.$$

Man sieht, daſs sehr genau

$$A^{(m)} = 0{,}5$$

seyn muſs; also

$$H^{(k)} = 3{,}6.$$

Hieraus wird nun

$$M^{(m)} = 91 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 0{,}5}{1000}}$$
$$= 91 \cdot \sqrt{8} = 257 \text{ Cub. Fuſs.}$$

Da die Wassertiefe am Ende des Canals 3,6 F. beträgt, also hier am kleinsten ist, so ist die gröſste Geschwindigkeit des Wassers im Canale

$$= \frac{257}{10 \cdot 3{,}6} = 7{,}14 \text{ Fuſs.}$$

Am Anfange des Canals ist sie

$$= \frac{257}{10 \cdot 4} = 6{,}42 \text{ Fuſs},$$

und daher das Resultat weniger sicher.

§. 18.

Aufg. *Für einen anzulegenden abhängigen Canal werden h, H, b, λ und ε vorgeschrieben, ohne freyen Lauf zu bedingen; man soll entscheiden, ob die Forderung Statt finde, und für diesen Fall M angeben.*

Aufl. Man verstehe unter A dieselbe Gröſse wie im vor. §. und berechne aus h, H, b, λ und ε den Werth von A, so erhält man hiernächst

λM^2

$$\frac{\lambda\ M^2}{8281.\ b^3.\ h^2} = A,$$

also

$$M = \frac{91.\ b\,h.\ \sqrt{b\,A}}{\sqrt{\lambda}}$$

oder auch

$$M = 91.\ b\,h.\ \sqrt{\frac{b\,A}{\lambda}}.$$

Man berechne nunmehr auch aus h, H′, b, λ und ε, wo ich unter H′ einen Werth verstehe, der etwas kleiner als der gegebene H ist, den Werth von A. Ist dieser gröſser als der vorige, so finden die vorgeschriebenen Bestimmungen Statt, und der gefundene Werth von M ist der gesuchte. Im entgegengesetzten Falle können die vorgeschriebenen Bestimmungsstücke nicht neben einander bestehen. S. die Anm. zum folg. §.

§. 19.

Aufg. *Man will durch einen abhängigen Canal von der Länge λ und Breite b in jeder Sec. die Wassermenge M ableiten; die Wassertiefe am Anfange des Canals soll = h, am Ende = H seyn. Man soll ε bestimmen.*

Aufl. Die Bedingung des freyen Laufes fällt, wie vorhin, weg. Zur Abkürzung setze man den Werth von $\frac{\lambda\ M^2}{8281.\ b^3\ h^2} = N$, so giebt unsere allgemeine Gleichung

$$\varepsilon + h - H = \frac{(H + h).\ N}{H.\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b + 2\,h) - \ln.(b + 2\,H)\right)}{2.\ (h - H)}\right)};$$

also

 ε =

$$\varepsilon = H - h + \frac{(H+h).\ N}{H.\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)}{2.\ (h-H)}\right)}.$$

Man berechne nunmehr aus λ, b, ε, h und H′ (in der Bedeutung des vor. §.) den Werth von M nach (⊙. §. 5). Findet man diesen größer als den vorgeschriebenen, so finden die vorgeschriebenen Bedingungen Statt, und der gefundene Werth von ε ist der gesuchte.

Anm. In allen Fällen, wo H > h Bedingung ist, muſs nothwendig zu H′ ein gröſserer Werth von M gehören, als zu H. In solchen Fällen erhält man also im vor. §. den Werth von M und im jetzigen den von ε allemal richtig, ohne daſs eine besondere Prüfung hinten nach anzustellen wäre.

Ex. Wenn in einem 1000 Fuſs langen Canale zu 10 F. breit in jeder Sec. 60 C. F. Wasser abfliessen sollen, so daſs die Wassertiefe am Anfange desselben 2 F., am Ende (vor der Schützenöffnung) 3 Fuſs beträgt; wie groſs ist das absolute Gefälle ε, das man dem Boden geben muſs?

Hier ist $\lambda = 1000$; $b = 10$; $h = 2$; $H = 3$; $M = 60$. Ich finde nun zuerst

$$N = \frac{1000.\ 3600}{8281.\ 1000.\ 4} = \frac{900}{8281} = 0{,}1087;$$

ferner

$$\begin{aligned} \ln.\ (b+2h) &= 2{,}639057 \\ \ln.\ (b+2H) &= \underline{2{,}772588} \\ \text{Diff.} &= -\ 0{,}133531; \end{aligned}$$

also

$$\varepsilon = 3 - 2 + \frac{(3+2).\ 0{,}1087}{3.\left(1 - \frac{10.\ 0{,}13353}{.\ 2}\right)}$$

$$= 1 + \frac{0{,}5435}{0{,}997} = 1{,}54 \text{ Fuſs.}$$

§. 20.

§. 20.

Aufg. *Für einen anzulegenden Canal werden h, b, λ, ε und M vorgeschrieben; man soll entscheiden, ob der Forderung Genüge geschehen könne, und für diesen Fall H finden.*

Aufl. A habe die Bedeutung wie §. 17, so suche man denjenigen Werth von H, welcher

$$\frac{\lambda.\ M^2}{8281.\ h^2\ b^3} = A$$

giebt.

Dann berechne man aus h, b, λ, ε und H′ (s. §. 18) den Werth von A. Findet man diesen größer als den vorstehenden, so finden die Bestimmungsstücke Statt, und der gefundene Werth von H ist der gesuchte.

Ist der gefundene Werth von $H > h$ oder auch nur wenig kleiner als h, so bedarf es dieser Prüfung nicht.

Ex. Es soll ein 1000 Fuſs langer Canal zu 10 Fuſs breit angelegt werden; am Anfange desselben soll das Wasser 2 Fuſs hoch stehen; der Boden soll 1 Fuſs Gefäll erhalten, und in jeder Sec. sollen 30 C. F. Wasser abfliessen; geht dieses an, und wie groſs müſste dann H werden?

Hier ist

$$\lambda = 1000;\ b = 10;\ h = 2;\ \varepsilon = 1;\ M = 30;$$

$\varepsilon + h$ ist $= 3$; also muſs $H < 3$ seyn.

Ich finde nun zuerst

$$\frac{\lambda.\ M^2}{8281.\ b^3\ h^2} = \frac{1000.\ 900}{8281.\ 4000} = 0{,}0271;$$

und nun ferner

I. Für H = 2,5.

$$A = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}5}{4{,}5} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot (\ln. 14 - \ln. 15)}{-1}\right).$$
$$= 0{,}086.$$

II. Für H = 2,6

$$A = \frac{2{,}6 \cdot 0{,}4}{4{,}6} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot (\ln. 14 - \ln. 15{,}2)}{-1{,}2}\right)$$
$$= 0{,}2261 \cdot 0{,}3147 = 0{,}0711.$$

III. Für H = 2,8.

$$A = \frac{2{,}8 \cdot 0{,}2}{4{,}8} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot (\ln. 14 - \ln. 15{,}6)}{-1{,}6}\right).$$
$$= 0{,}0375.$$

IV. Für H = 2,85
A = 0,0319.

V. Für H = 2,9
A = 0,0194.

VI. Für H = 2,86
A = 0,0268.

Nun sollte aber A = 0,0271 seyn; also müfste eigentlich der Werth von H zwischen 2,85 und 2,86, aber doch näher an 2,85 fallen, z. B. = 2,858 genommen werden, wenn so feine Bestimmungen hier Statt fänden. Man kann daher H = 2,86 beybehalten.

§. 21.

Aufg. *Für einen anzulegenden Canal sind h, λ, ε und M vorgeschrieben; man soll b finden. Es wird dabey freyer Lauf bedungen.*

Aufl.

Aufl. Aus unserer allgemeinen Gleichung (☉. §. 6) folgt

$$\frac{\lambda.\,(H+h).\,M^2}{8281.\,h^2.\,H.\,\varepsilon+h-H)} = b^3.\left(1-\frac{b.\left(\ln.\,(b+2h)-\ln.\,(b+2H)\right)}{2.\,(h-H)}\right).$$

Weil aber hier nicht zugleich H vorgeschrieben seyn kann, so setzen wir dafür

$$\frac{\lambda.\,M^2}{8281.\,h^2} = \frac{b^3.\,H.\,(\varepsilon+h-H)}{H+H}.\left(1-\frac{b.\left((\ln.\,b+2h)-\ln.\,(b+2H)\right)}{2.\,(h-H)}\right),$$

wo b und H zugleich bestimmt werden.

Der ganze Ausdruck zur Rechten heiſse A. Man suche nun zu einem angenommenen Werthe von b für nach einander folgende Werthe von H die zugehörigen Werthe von A, dann ebenso für einen 2^{ten} Werth von b und nach einander folgende Werthe von H die zugehörigen Werthe von A; ebenso für einen 3^{ten} Werth von b u. s. f., bis man jedesmal auf das zu dem angenommenen Werthe von b gehörige $A^{(m)}$ (Max. von A) kommt. So kommt man also nach und nach auf verschiedene Werthe von $A^{(m)}$.

Derjenige Werth von $A^{(m)}$, welcher $= \frac{\lambda.\,M^2}{8281.\,h}$ wird, bestimmt das Ende aller Rechnung, und die zugehörigen Werthe von b und H sind die hierher gehörigen.

Ex. Es sey $\lambda = 1000$; $\varepsilon = 1$; $h = 3$; $M = 20$.

Ich finde zuerst

$$\frac{\lambda.\,M^2}{8281.\,h^2} = \frac{1000.\,400}{8281.\,9} = 5{,}367.$$

Hier, wo freyer Lauf bedungen ist, muſs $H < h$ genommen werden; also $H < 3$. Die Berechnung giebt nun

I.

I. Für $b = 2$ und $H = 1{,}8$

$$A = \frac{8.\,1{,}8.\,2{,}2}{4{,}8}.\left(1 - \frac{2.\,(\ln.\,8 - \ln.\,5{,}6)}{2{,}4}\right)$$
$$= 6{,}6.\,0{,}7028 = 4{,}6384.$$

II. Für $b = 2$; $H = 2{,}1$

$$A = \frac{8.\,2{,}1.\,1{,}9}{5{,}1}.\left(1 - \frac{2.\,(\ln.\,8 - \ln.\,6{,}2)}{1{,}8}\right)$$
$$= 6{,}2588.\,0{,}7168 = 4{,}4863.$$

III. Für $b = 2$, $H = 1{,}6$.

$$A = \frac{8.\,1{,}6.\,2{,}4}{4{,}6}.\left(1 - \frac{2.\,(\ln.\,8 - \ln.\,5{,}2)}{2{,}8}\right)$$
$$= 6{,}6783.\,0{,}6923 = 4{,}6233.$$

Man sieht hieraus, daſs, für $b = 2$, $A^{(m)}$, welches $= 5{,}367$ seyn soll, zu klein ausfällt; daſs man also b noch etwas gröſser nehmen müsse.

IV. Für $b = 2{,}1$; $H = 1{,}8$

$$\varepsilon + h - H = 2{,}2$$
$$b^5\,H.\,(\varepsilon + h - H) = 36{,}672$$
$$H + h = 4{,}8$$
$$\ln.\,(b + 2\,h) = \ln.\,8{,}1 = 4{,}394449 - \ln.\,10$$
$$\ln.\,(b + 2\,H) = \ln.\,5{,}7 = 4{,}043051 - \ln.\,10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}351398$$
$$2.\,(h - H) = 2{,}4;$$

also

$$A = \frac{36{,}672}{4{,}8}.\left(1 - \frac{2{,}1.\,0{,}3514}{2{,}4}\right)$$
$$= 7{,}64.\,0{,}6925 = 5{,}2908.$$

V. Für $b = 2{,}1$; $H = 2$

$$\varepsilon + h - H = 2$$

b^5 H.

$b^3 H. (\varepsilon + h - H) = 37{,}044$
$H + h = 5$
$ln. (b + 2 h) = ln. 8{,}1 = 4{,}394449 - ln. 10$
$ln. (b + 2 H) = ln. 6{,}1 = 4{,}110874 - ln. 10$

$\text{Diff.} = 0{,}28357$

$2 (h - H) = 2;$

also

$$A = \frac{37{,}044}{5} . \left(1 - \frac{2{,}1 . 0{,}28357}{2}\right)$$
$$= 7{,}409 . 0{,}70224 = 5{,}2029.$$

VI. Für $b = 2{,}1;\ H = 1{,}6$
$\varepsilon + h - H = 2{,}4$
$b^3 h. (\varepsilon + h - H) = 9{,}261 . 1{,}6 . 2{,}4 = 35{,}56$
$H + h = 4{,}6$
$ln. (b + 2 h) = 4{,}394449 - ln. 10$
$ln. (b + 2 H) = 3{,}970292 - ln. 10$

$\text{Diff.} = 0{,}424157$
$2 (h - H) = 2{,}8$

also

$$A = \frac{35{,}56}{4{,}6} . \left(1 - \frac{2{,}1 . 0{,}42415}{2{,}8}\right)$$
$$= 7{,}7304 . 0{,}6819 = 5{,}271.$$

Man übersieht hieraus, dafs für $b = 2{,}1$ der Werth von $A^{(m)}$ sehr genau zu $H = 1{,}8$ gehört; und man kann ohne Bedenken

$$b = 2{,}15 \text{ und } H = 1{,}8$$

setzen. Die Geschwindigkeit des Wassers im Canale ist da, wo sie am gröfsten ist, $= \frac{20}{2{,}15 . 1{,}8} = 5{,}17$ und weicht also im Ganzen nicht merklich von der festgesetzten Gränze ab.

§. 22.

§. 22.

Aufg. *Für einen anzulegenden Canal sind, ohne Bedingung des freyen Laufs, H, h, λ, ε und M vorgeschrieben; man soll entscheiden, ob der Forderung Genüge geschehen kann, und für diesen Fall b finden.*

Aufl. Die Grösse zur Linken in der *ersten* Gleichung des vor. §. heisse N, die zur Rechten A, so suche man denjenigen Werth von b, welcher $A = N$ macht.

Dann berechne man aus h, λ, ε, b und H' (s. §. 18) den Werth von M nach der allgemeinen Gleichung. Findet man solchen grösser als den vorgeschriebenen, so findet die Aufgabe Statt, und der gefundene Werth von b ist der hierher gehörige.

Ist $H > h$ oder nur nicht viel kleiner, so bedarf es dieser Prüfung nicht.

Ex. Es sey $\lambda = 12000$, $\varepsilon = 1$, $h = 10$, $H = 10{,}6$ und $M = 4000$ C. Fuss; man soll b finden.

Ich finde zuerst

$$\frac{\lambda.\ (H + h).\ M^2}{8281.\ 100.\ 10{,}6.\ 0{,}4} = \frac{12000.\ 20{,}6.\ 16000000}{8281.\ 424}$$
$$= 1126202.$$

So gross soll also A werden.

Setzt man $b = 250$, so wird

$$A = 15625000.\ 0{,}0760 = 1187500,$$

und man erhält nun mit überflüssiger Genauigkeit

$$b = 250.\ \sqrt{\frac{1126}{1187}} = 242{,}5$$

oder in einer ganzen Zahl

$$b = 243 \text{ Fuss.}$$

Die

Die gröfste Geschwindigkeit im Canale ist nur

$$\frac{4000}{10.\ 242{,}5},\ \text{also} < 2\ \text{Fufs.}$$

§. 23.

Bey Anlegung schiffbarer Canäle hat man hauptsächlich zweyen Forderungen Genüge zu thun: 1.) dafs die Tiefe den gröfsten zur Schiffahrt auf einem solchen Canale bestimmten Schiffen gemäfs sey, also nirgends unter ein bestimmtes Maafs fallen dürfe, und 2.) dafs die Geschwindigkeit in eine bestimmte Gränze eingeschränkt sey. Bey Bestimmung der letzteren kommt es darauf an, ob die beladenen Schiffe gröfstentheils aufwärts oder gröfstentheils abwärts fahren. Im ersteren mufs man für eine kleinere Geschwindigkeit sorgen als im letzteren. Aus der Beschaffenheit der zur Fahrt bestimmten gröfsten Schiffe giebt sich sowohl die erfoderliche geringste Tiefe als die geringste Breite, welche man dem Canale vorschreiben kann, also der Werth von b. h und von b. H; und aus der gestatteten gröfsten Geschwindigkeit c giebt sich dann auch M = c. b. h oder = c. b. H, nachdem h oder H kleiner ist.

Soll ein Canal in einen Flufs eingeleitet werden, so dafs der Boden bey der Vereinigung mit dem Flusse in der Tiefe H unter der Oberfläche des Flusses liege, so hat man schon H, λ, b und M als Data, und man hat noch h und ε zu bestimmen. Am bequemsten ist es nun h = H zu nehmen, welches $\varepsilon = \frac{\lambda.\ (b + 2\,h).\ M^2}{8281.\ b^3.\ h^2}$ giebt.

Die Höhe der Erdoberfläche an der Stelle, wo der Canal seinen Anfang nehmen soll, über der Oberfläche des Flusses, in den er geführt werden soll, sey = H″, so ist die Tiefe des Canals am Anfange, bis zu welcher er *ausgegraben* werden mufs, = H″ — ε.

 Diese

Diese könnte aber zu bedeutend seyn, um an ihre Ausführung zu denken. Unsere Formel dient, dieses näher zu beurtheilen.

Wäre z. B. V W (Fig. 5) eine Linie auf der Erdoberfläche, wo sich ein fliessendes Wasser befände, das durch einen schiffbaren Canal mit dem Flusse (oder auch dem Meere) bey K verbunden werden sollte, so könnte die Höhe über der horizontalen B A zu beträchtlich seyn. Wäre z. B. B A = 16000 Fuſs, D B = 80, so wäre das relative Gefäll von D nach K $= \frac{8}{1600} = \frac{1}{200}$.

Ich will annehmen, es dürfe b nicht unter 18, und h = H nicht unter 4 Fuſs genommen werden, so hätte man

$$\text{die entstehende Geschwindigkeit} = 91 . \sqrt{\frac{18 . 4}{200 . (18 + 8)}} = 10{,}7 \text{ Fuſs.}$$

Diese ist für die Schiffahrt viel zu groſs, auch wenn man nach den oben vorgetragenen Bemerkungen in Bezug auf die Gränzen der Anwendbarkeit der Formel nur 9 F. annehmen wollte.

Fände man aber die Geschwindigkeit der Schiffahrt nicht unangemessen, so hätte man doch noch auf einen zweyten Umstand Rücksicht zu nehmen.

Es könnte nämlich die zur Ableitung bestimmte Wassermenge M zu klein zu seyn. Lieferte z. B. das fliessende Wasser bey D 300 Cub. Fuſs in jeder Sec., so fände die Anlage von D nach K nicht Statt. Jetzt müſste ε so genommen werden, daſs in jeder Sec. nur 300 C. F. Wasser abfliessen. Man hat nämlich

$$\varepsilon = \frac{\lambda . (b + 2 h) M^2}{8281 . b^3 h^3} = \frac{16000 . 26 . 90000}{8281 . 5832 . 64}$$
$$= 12{,}06 \text{ Fuſs.}$$

Es

Es müfste also der Canalboden in AC herab so tief gelegt werden, dafs $BC = 12{,}06$ F. würde; dieses gäbe $DC = 80 - 12{,}06 =$ beynahe 68 Fufs. Einen Canal aber, der, wenigstens bis auf eine gewisse Strecke hin, 68 Fufs tief ausgehoben werden müfste, wird wohl Niemand im Ernste in Vorschlag bringen.

Man wird in diesem Falle den Canal von D nach K hin anlegen, und darin mehrere Schleussen bey E, F, G und H anbringen. Am Anfang einer jeden Abtheilung, bey m, soll die Wassertiefe $= h$; am Ende, bey n, $= H$ seyn. Ausserdem sind M, b und $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ gegeben. Hieraus hat man nun die Länge einer jeden Abtheilung und ihre Anzahl zu berechnen. Ich bezeichne nun die Länge einer jeden Abtheilung mit λ' und das absolute Gefäll des Bodens mit ε' (auf die Länge λ'). Setzt man $\frac{\varepsilon}{\lambda} = a$, so hat man $\varepsilon' = a.\ \lambda'$; dieses statt ε, und λ' statt λ in die allgemeine Gleichung (§. 17) gesetzt, giebt den Werth von λ'.

Zur Abkürzung sey

$$\frac{M^2}{8281.\ b^3\ h^2} = N;$$

$$1 - \frac{b.\ (\ln.\ (b + 2\,H) - \ln.\ (b + 2\,h))}{2.\ (H - h)} = A,$$

so wird

$$N.\ \lambda' = \frac{H.\ (a\,\lambda' + h - H)}{H + h}.\ A$$

$$= \frac{H\,A\,a}{H + h}.\ \lambda' - \frac{H\,A.\ (H - h)}{H + h};$$

also

$$\lambda' = \frac{H\,A.\ (H - h)}{H\,A\,a - N.\ (H + h)}.$$

Im

Im vorstehenden Falle ist $h = 4$ Fuſs, $a = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{80}{16000} = 0{,}005$; $b = 18$; $M = 300$. Die Gröſse H können wir den Umständen gemäſs festsetzen. Damit nun der Abtheilungen nicht zu viele werden, weil der Schleussenbau kostbar ist, so wollen wir $H = 10$ Fuſs annehmen. Hiernach finden wir nun

$$N. (H + h) = \frac{90000.\ 14}{8281.\ 5832.\ 16} = 0{,}0016305$$

$$A = 1 - \frac{18.\ (\ln.\ 38 - \ln.\ 26)}{2.\ 6}$$

$$= 1 - \frac{3.\ (3{,}637586 - 3{,}258096)}{2}$$

$$= 0{,}43076;$$

also

$$\lambda' = \frac{10.\ 0{,}43076.\ 6}{10.\ 0{,}43076.\ 0{,}005 - 0{,}00163}$$

$$= 1292 \text{ Fuſs};$$

folglich die Anzahl erfoderlicher Schleussen

$$= \frac{16000}{1292} = 12.$$

Es ist aber 12. 1292 nur = 15504. Man kann also einer jeden der 12 Abtheilungen eine Länge von 1292 F. geben, und den Ueberrest von 496 F. zur 13ten Abtheilung bestimmen, die an ihrem Ende die 13te Schleusse hat.

Für jede der ersten 12 Abtheilungen ist das Gefäll des Bodens $\varepsilon' = \frac{1292}{200} = 6{,}46$ Fuſs, welches für diese 12 Abtheilungen zusammengenommen $\varepsilon = 12.\ 6{,}46 = 77{,}52$ Fuſs beträgt, und für die 13te noch $\frac{496}{200} = 2{,}48$ F., also für alle zusammen $77{,}52 + 2{,}48 = 80$ F., wie erfodert wird.

Das

Das absolute Gefäll des Wasserspiegels in jeder der ersten 12 Abtheilungen wäre hiernach, bey beständigem Abflusse von 300 C. F. in jeder Sec.

$$\varepsilon' + h - H = 6{,}46 + 4 - 10 = 0{,}46 \text{ F.}$$
$$= 5{,}52 \text{ Zoll.}$$

Die Rückfahrt der Schiffe, um sie aus der Tiefe K auf die Höhe bey D zu bringen, wird durch Einlassung derselben aus dem Flusse K in die Abtheilung no. I und dann durch nach einander folgende Erhebungen aus jeder Abtheilung in die nächstfolgende mittelst des Wassers selbst bewirkt.

Ich habe hier nur im Allgemeinen auf solche Anwendungen hindeuten wollen, ohne, wie es sich von selbst versteht, mich insbesondere in die Mittel zur Anlegung schiffbarer Canäle einzulassen.

Berechnungen
zur ersten Methode für Canäle mit gleichförmig steigendem Boden.

§. 24.

Es sey $\alpha'\gamma$ (Fig. 6) horizontal und $\alpha\gamma\delta\eta$ das Längenprofil eines Canals mit steigendem Boden, $\alpha\beta$ der $\eta\delta$ gleichlaufend; $\alpha\eta = H$ und $\gamma\delta = h$, so ist

das Gefäll der Wasserfläche auf die ganze Länge $\delta\eta$ oder λ $= \gamma\delta - (\alpha'\alpha + \alpha\eta) = h - \varepsilon - H$,

wofern die Höhe $\alpha\alpha'$ mit ε bezeichnet wird.

Wenn man aber bemerkt, daſs das Gefäll des Bodens in diesem Falle verneint ist, also der Werth von ε verneint ausgedruckt werden muſs, so bleibt das Gefäll der Wasserfläche auch im jetzigen Falle

$$= h + \varepsilon - H.$$

Dieses

Dieses Gefäll kommt der ganzen Masse zwischen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zu, die $=$ H. b. λ ist. Die wirklich abfliessende Masse ist aber auch hier (wie §. 5) $= \frac{H+h}{2}$. b. λ; daher wie oben

$$\alpha = \frac{2\,H.\ (\varepsilon + h - H)}{H + h}.$$

Es hat also die Formel §. 5. ⊙ eine noch grössere Allgemeinheit als §. 6 erwähnt worden; sie gilt für bejahte Werthe von ε, für $\varepsilon = 0$ *und für verneinte* Werthe von ε; nur mit der schon oft wiederholten Erinnerung, dass die Geschwindigkeit des Wassers nicht viel über 5 Fuss betragen soll, weil sonst die Resultate der Formel für die Ausübung desto unsicherer werden, je mehr die Geschwindigkeit über 5 F. hinausgeht. Die bisherigen allgemeinen Auflösungen finden also auch hier ihre Anwendung; ich will daher für den jetzigen Fall nur einige Berechnungen in Beyspielen beyfügen.

§. 25.

1. *Ex.* Es werden für den freyen Lauf folgende Werthe vorgeschrieben: $\lambda = 1000$ rhl. F., $b = 10$, $h = 4$, $\varepsilon = -2$; man soll H und M finden.

Man verfährt ganz so, wie oben §. 17. Da $h + \varepsilon - H$, also hier $4 - 2 - H$ bejaht seyn muss, so muss $H < 2$ werden. Die Berechnung giebt nun

I. Für H = 1 Fuss

$$\frac{H\ (\varepsilon + h - H)}{H + h} = 0{,}2$$

$$\begin{aligned} \text{ln. } (b + 2\,h) &= \text{ln. } 18 = 2{,}890371 \\ \text{ln. } (b + 2\,H) &= \text{ln. } 12 = 2{,}484906 \\ \text{Diff.} &= 0{,}405465; \end{aligned}$$

also

also

$$A = 0{,}2.\left(1 - \frac{4{,}05465}{6}\right)$$
$$= 0{,}0684.$$

II. Für $H = 0{,}9$

$$\frac{H.(\varepsilon + h - H)}{H + h} = 0{,}20204.$$
$$\ln.(b + 2h) = \ln.\ 18{,}0 = 5{,}192957 - \ln.\ 10$$
$$\ln.(b + 2H) = \ln.\ 11{,}8 = 4{,}770684 - \ln.\ 10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}422273;$$

also

$$A = 0{,}20204.\left(1 - \frac{4{,}22273}{6{,}2}\right)$$
$$= 0{,}06443.$$

III. Für $H = 1{,}2.$

$$\frac{H.(\varepsilon + h - H)}{H + h} = 0{,}1846$$
$$\ln.(b + 2h) = \ln.\ 18{,}0 = 5{,}192957 - \ln.\ 10$$
$$\ln.(b + 2H) = \ln.\ 11{,}4 = 4{,}736198 - \ln.\ 10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}456759;$$

also

$$A = 0{,}1846.\left(1 - \frac{4{,}56759}{5{,}6}\right)$$
$$= 0{,}0340.$$

Aus diesen 3 Werthen von A läſst sich schon erkennen, daſs sehr genau

$$A^{(m)} = 0{,}0648$$

angenommen, also $H^{(k)} = 1$ F. gesetzt werden könne.

Daher nunmehr

$$M = 91.\ 10.\ 4.\ \sqrt{\frac{10.\ 0{,}0648}{1000}}$$
$$= 91.\ 4.\ \sqrt{0{,}0648} = 92{,}6\ \text{C. F.}$$

Am

Am Anfange des Canals ist also die Geschwindigkeit

$$= \frac{92,6}{40} = 2,31 \text{ F.},$$

am Ende $$= \frac{92,6}{10} = 9,26.$$

Da hiernach die Geschwindigkeit des Wassers schon vor der Mitte des Canals die Gränze von 5 Fuſs überschreitet, und diese Ueberschreitung nach und nach immer gröſser wird, so ist das Resultat zuverläſsig etwas zu groſs, und wird nicht wohl über 8 Fuſs angenommen werden können, und eben darum auch M nicht über 80 C. F. Genauere Correctionen für solche Fälle setzen erst noch hinlängliche Beobachtungen bey Geschwindigkeiten voraus, welche mehr als 5 Fuſs betragen.

Es sind aber auch die in der Ausübung vorkommenden Fälle bey weiten am meisten so beschaffen, daſs $\frac{\varepsilon}{b}$ viel kleiner, und daher auch $\frac{H}{h}$ beträchtlich gröſser als in vorstehendem Ex. ausfällt.

§. 26.

2. *Ex.* Es werden, ohne Bedingung des freyen Laufs, folgende Werthe vorgeschrieben: $\lambda = 1000$; $\varepsilon = -1$; $b = 10$; $h = 4$, und $H = 2$; man soll entscheiden, ob diese Bestimmungsstücke alle zugleich Statt finden, und für diesen Fall M berechnen. (s. oben §. 18.) Man erhält hier

$$\frac{H. (\varepsilon + h - H)}{H + h} = \tfrac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ln. } (b + 2\, h) &= \text{ln. } 18 = 5,192957 - \text{ln. } 10 \\ \text{ln. } (b + 2\, H) &= \text{ln. } 14 = 4,941642 - \text{ln. } 10 \\ \hline \text{Diff.} &= 0,251315; \end{aligned}$$

also

also

$$A = \tfrac{1}{3}.\left(1 - \frac{2{,}51315}{4}\right) = 0{,}1239.$$

Setzt man nunmehr $H = 1{,}5$, so wird

$$\frac{H.\,(\varepsilon + h - H)}{H + h} = 0{,}4091$$

$$\begin{aligned} \text{ln.}\,(b + 2\,h) &= 5{,}192957 - \text{ln.}\ 10 \\ \text{ln.}\,(b + 2\,H) &= \underline{4{,}867534 - \text{ln.}\ 10} \\ \text{Diff.} &= 0{,}325423; \end{aligned}$$

also

$$A = 0{,}4091.\left(1 - \frac{3{,}25423}{5}\right) = 0{,}1428.$$

Hiernach könnte man zwar veranlaſst werden, die Aufgabe für unstatthaft zu halten, weil jetzt A kleiner als vorhin gefunden worden ist. Man muſs aber diese Prüfung mit einem Werthe von H anstellen, der nur *wenig* kleiner als der vorgeschriebene ist.

Man setze nun $H = 1{,}9$; so wird

$$\frac{H.\,(\varepsilon + h - H)}{H + h} = 0{,}3543$$

$$\begin{aligned} \text{ln.}\,(b + 2\,h) &= 5{,}192957 - \text{ln.}\ 10 \\ \text{ln.}\,(b + 2\,H) &= \underline{4{,}927253 - \text{ln.}\ 10.} \\ \text{Diff.} &= 0{,}265704; \end{aligned}$$

also

$$A = 0{,}3543.\left(1 - \frac{2{,}65704}{4{,}2}\right) = 0{,}1254;$$

daſs also für diese kleine Verminderung von H der Werth von A schon gröſser wird, als für den vorgeschriebenen Werth von H.

Es bleibt demnach

$$A = 0{,}1219$$

 und

und nunmehr

$$M = 91 \cdot 40 \cdot \sqrt{\frac{1{,}219}{1000}} = 364 \cdot \sqrt{0{,}1219}$$
$$= 127 \text{ Cub. F.}$$

Jetzt ist des Wassers gröſste Geschwindigkeit im Canale

$$= \frac{127}{20} = 6{,}35 \text{ Fuſs.}$$

Am Anfange ist sie $= \frac{127}{40} = 3{,}17$; also fängt sie erst über der Mitte hinaus an die oben bestimmte Gränze zu überschreiten, und die gröſste Ueberschreitung ist nicht sehr bedeutend; daher man etwa 120 C. F. beybehalten kann.

Berechnungen
zur ersten Methode für Canäle, bey welchen Tiefe und Breite zugleich veränderlich sind.

§. 27.

Ich nehme nun an, es sollen die beyden Seitenwände eines Canals der Länge nach divergirende Ebenen seyn; am Anfange des Canals sey die Breite $m\,n = b$, am Ende desselben $o\,p = B$; in der Entfernung x, vom Anfange gerechnet, $q\,r = v$ (Fig. 7), so ist

$$v = b + \frac{x}{\lambda} \cdot (B - b).$$

Diesen Werth statt b oben §. 4. ⊙ gesetzt, giebt

$$\Sigma = \frac{\int \left(\frac{\left(b + \frac{B-b}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \left(H + \frac{h-H}{\lambda} \cdot x\right)}{b + \frac{B-b}{\lambda} \cdot x + 2\,H + \frac{2 \cdot (h-H)}{\lambda} \cdot x} \cdot dx \right)}{x}$$

$= \int .$

$$= \frac{\int \left(\frac{bH + \frac{(B-b).H + (h-H).b}{\lambda}.x + \frac{(B-b).(h-H)}{\lambda^2}.x^2}{b + 2H + \frac{B-b+2(h-H)}{\lambda}.x} . dx \right)}{x}.$$

Zur Abkürzung setze ich

$$B - b + 2.(h - H) = N$$

$$b + 2H + \frac{N}{\lambda}.x = z,$$

so wird

$$x = \frac{\left(z - (b + 2H)\right).\lambda}{N}$$

$$dx = \frac{\lambda.dz}{N}$$

und der Integral-Ausdruck =

$$\int \left(\begin{array}{l} bH + \frac{(B-b).H + (h-H).b}{\lambda}.\frac{\left(z - (b + 2H)\right).\lambda}{N} \\ + \frac{(B-b).(h-H)}{\lambda^2}.\frac{\left(z - (b + 2H)\right)^2.\lambda^2}{N^2} \end{array} \right).\frac{\lambda.dz}{Nz}$$

$$= \frac{\lambda bH}{N}.\ln.z + \int \frac{(B-b).H + (h-H).b}{N^2}.\lambda.\frac{z - (b + 2H)}{z}.dz$$

$$+ \int \frac{(B-b).(h-H).\left(z - (b + 2H)\right)^2.\lambda}{N^3.z}.dz$$

$$= \frac{\lambda bH}{N}.\ln.z + \frac{(B-b).H + (h-H).b}{N^2}.\lambda.\left(z - (b + 2H)\ln.z\right)$$

$$+ \frac{(B-b).h - H).\lambda}{N^3}.\int \frac{\left(z - (b + 2H)\right)^2}{z}.dz.$$

 Es

Es ist aber

$$\int \frac{\left(z-(b+2H)\right)^2}{z} . dz = \tfrac{1}{2} z^2 - 2(b+2H).z + (b+2H)^2 . \ln. z.$$

Da nun das ganze Integral für $x = 0$, also für $z = b + 2H$ verschwinden mufs, so wird dasselbe vollständig =

$$\frac{\lambda b H}{N} . \left(\ln. z - \ln. (b+2H)\right) + \frac{(B-b).H + (h-H).b}{N^2} . \lambda$$

$$\times \left(z - (b+2H) - (b+2H).\left(\ln. z - \ln. (b+2H)\right)\right)$$

$$+ \frac{(B-b).(h-H)}{N^3} . \lambda . \left(\begin{array}{c} \tfrac{1}{2}\left(z^2 - (b+2H)^2\right) - 2(b+2H).\left(z-(b+2H)\right) \\ + (b+2H)^2 . \left(\ln. z - \ln. (b+2H)\right) \end{array}\right).$$

Es ist aber $z = b + 2H + \frac{N}{\lambda} . x$; also

$$z - (b+2H) = \frac{N}{\lambda} . x$$

und, für $x = \lambda$,

$$\frac{N}{\lambda} . x = N,$$

also

$$z = b + 2H + N = B + 2h$$

und

$$z - (b+2H) = N.$$

Daher für die Länge λ obiges Integral =

$$\frac{\lambda b H}{N} . \left(\ln. (B+2h) - \ln. (b+2H)\right)$$

$$+ \frac{B-b).H + (h-H).b}{N^2} . \lambda . \left[N - (b+2H).\left(\ln. (b+2h) - \ln. (b+2H)\right)\right]$$

$$+ \frac{(B-b).(h-H).}{N^3} . \lambda . \left(\begin{array}{c} \tfrac{1}{2}\left(N^2 + 2N.(b+2H)\right) - 2N.(b+2H) \\ + (b+2H)^2 . \left(\ln. (B+2h) - \ln. (b+2H)\right) \end{array}\right).$$

Die

Die Summe der drey logarithmischen Glieder ist

$$\frac{b\,H}{N} - \frac{\big((B-b).\,H + (h-H).\,b\big).\,(b+2\,H)}{N^2}$$

$$+ \frac{(B-b).\,(h-H).\,(b+2\,H)^2}{N^3}.\ \lambda.\ \big(\ln.\,(B+2\,h) - \ln.\,(b+2\,H)\big);$$

die Summe der übrigen Glieder ist

$$\frac{(h-H).\,b\,\lambda}{N} + (B-b).\,\lambda.\left(\frac{H}{N} + \frac{h-H}{N}.\ \frac{N-2.\,(b+2\,H)}{2\,N}\right);$$

demnach

$$\Sigma = \frac{(h-H).\,b}{N} + \frac{B-b}{N}.\left(H + (h-H).\ \frac{N-2.\,(b+2\,H)}{2\,N}\right)$$

$$\text{c)} \quad + \left(\frac{b\,H}{N} - \frac{\big((B-b).\,H + (h-H).\,b\big).\,(b+2\,H)}{N^2} + \frac{(B-b).\,(h-H).\,(b+2\,H)^2}{N^3}\right).\ \big(\ln.\,(B+2\,h) - \ln.\,(b+2\,H)\big)$$

und nunmehr

$$\text{h.)}\quad M = 91.\ b\,h.\ \sqrt{\left(\frac{\varepsilon+h-H}{\lambda}.\ \Sigma\right)}.$$

Wird $B = b$, so verschwinden die Glieder, welche $B - b$ als Factor enthalten, und es wird

$$\Sigma = \frac{(h-H).\,b}{2.\,(h-H)} + \left(\frac{b\,H}{2.\,(h-H)} - \frac{(h-H).\,b.\,(b+2\,H)}{4.\,(h-H)^2}\right) \times \big(\ln.\,(b+2\,h) - \ln.\,(b+2\,H)\big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,b + \frac{\big(2\,b\,H - b.\,(b+2\,H)\big).\,(h-H)}{4.\,(h-H)^2} \times \big(\ln.\,(b+2\,h) - \ln.\,(b+2\,H)\big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,b - \frac{b^2}{4.\,(h-H)}.\ \big(\ln.\,(b+2\,h) - \ln.\,(b+2\,H)\big),$$

völlig so wie oben §. 4 am Ende, wo nämlich b. Σ mit dem jetzigen Σ einerley ist.

völlig

Wird hingegen $H = h$, so wird $N = B - b$, und

$$\Sigma = H + \left(\frac{b\,H}{B - b} - \frac{H.\,(b + 2\,H)}{B - b}\right).\,\Big(\text{ln.}\,(B + 2\,h) - \text{ln.}\,(b + 2\,h)\Big)$$

oder

$$\odot)\quad \Sigma = H - \frac{2\,H^2}{B - b}.\,\Big(\text{ln.}\,(B + 2\,h) - \text{ln.}\,(b + 2\,h)\Big).$$

Diese Formel muſs für jeden Werth von B gelten, also auch für $B = b$. Für diesen Fall wird

$$\begin{aligned}\text{ln.}\,(B + 2\,h) - \text{ln.}\,(b + 2\,h) &= \text{d. logn.}\,(b + 2\,h)\\ &= \frac{B - b}{b + 2\,h};\end{aligned}$$

also

$$\Sigma = H - \frac{2\,H^2}{B - b}.\,\frac{B - b}{b + 2\,h} = \frac{(b + 2\,h).\,H - 2\,H^2}{b + 2\,h}$$

oder, weil hier $H = h$ ist,

$$\Sigma = \frac{b\,h}{b + 2\,h};$$

also

$$M = \mathfrak{A}.\,b\,h.\,\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\lambda}.\,\frac{b\,h}{b + 2\,h}\right)};$$

wie sich gehört, weil dieses die Formel für den Fall war, wo $H = h$ und $B = b$ vorausgesetzt wurde.

§. 28.

Man hat also jetzt die allgemeine Formel

$$\begin{aligned}&\frac{M^2.\,\lambda}{\mathfrak{A}^2.\,b.\,h}\\ &= (s + h - H).\end{aligned}\left\{\begin{aligned}&(h - H).\,b + \frac{B - b}{N}.\,\left(H + (h - H).\,\frac{N - 2.\,(b + 2\,H)}{2\,N}\right)\\ &+ \left(\begin{aligned}\frac{b\,H}{N} &= \frac{\big((B - b).\,H + (h - H).\,b\big).\,(b + 2\,H)}{N^2}\\ &+ \frac{(B - b).\,(h - H).\,(b + 2\,H)^2}{N^3}\end{aligned}\right)\\ &\qquad\qquad \times \Big(\text{ln.}\,(B + 2\,h) - \text{ln.}\,(b + 2\,H)\Big)\end{aligned}\right\},$$

wo $N = B - b + 2\,(h - H)$ ist.

Der

Der Gebrauch dieser Formel erhellet aus dem Vorhergehenden. Ich belasse es daher hier bey der folgenden Anwendung.

§. 29.

1. *Ex.* Es sey $\lambda = 12000$; $b = 10$; $B = 20$; $h = 4$, und $\varepsilon = 2$; man soll M *für den freyen Lauf* finden.

Auch hier ist H schon durch die übrigen Stücke bestimmt und kann daher nicht auch noch vorgeschrieben werden; man muſs H zugleich mit M suchen. Es kommt hier wieder nur darauf an, denjenigen Werth von H zu suchen, welcher $M^{(m)}$ oder nur das Maximum für den Werth der Gröſse zur Rechten in der Gleichung des vor. §. giebt, weil hiermit zugleich das Max. von M zusammenhängt. Ich finde nun

I. Für $H = h$, wo die Gleichung ⊙. §. 27 gilt.

$$\varepsilon + h - H = \varepsilon = 2; \qquad \ln.\ (B + 2\ h) = 3{,}3322045$$

$$\frac{2\,H^2}{B - b} = \frac{32}{10}; \qquad \ln.\ (b + 2\ h) = 2{,}8903717$$

$$\text{Diff.} = 0{,}4418328;$$

also

$$\Sigma = 4 - 3{,}2.\ 0{,}44183 = 2{,}58614$$

$$\times\ 2$$

$$\varepsilon\,\Sigma = 5{,}17228.$$

Wäre auch $B = b$, so hätte man nur $\varepsilon\,\Sigma = 4{,}4444$.

II. Für $H = 3{,}8$

$$h - H = 0{,}2; \qquad \varepsilon + h - H = 2{,}2;$$

$$N = 10 + 2.\ 0{,}2 = 10{,}4$$

$$\frac{(h - H).\ b}{N} = \frac{20}{104} = 0{,}19231$$

$$\frac{B - b}{N} = \frac{100}{104} = 0{,}96154$$

$$\frac{N - 2\,(b + 2\,H)}{2\,N} = \frac{10{,}4 - 2.\ 17{,}6}{20{,}4} = -\ 1{,}2157$$

$$\frac{b\,H}{N} = \frac{38}{10{,}4} = 3{,}65384$$

$$(B - b).\ H + (h - H).\ b = 38 + 0{,}2.\ 10 = 40$$

$$N^2 = 108{,}16; \qquad N^3 = 1124{,}864$$

$$(B - b).\ (h - H).\ (b + 2\,H)^2 = 10.\ 0{,}2.\ 309{,}76 = 619{,}52$$

$$\ln.\ (B + 2\,h) = 5{,}6347896 - \ln.\ 10$$

$$\ln.\ (b + 2\,H) = 5{,}1704840 - \ln.\ 10$$

$$\text{Diff.} = 0{,}4643056 \qquad ;$$

also

$$(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 2{,}2.\ \Big[0{,}19231 + 0{,}96154.\ (3{,}8 - 0{,}2.\ 1{,}2157)$$

$$+ \left(3{,}65384 - \frac{40.\ 17{,}6}{108{,}16} + \frac{619{,}52}{1124{,}864}\right).\ 0{,}4643\Big]$$

$$= 2{,}2.\ (0{,}19231 + 3{,}41977 - 1{,}06984)$$

$$= 2{,}2.\ 2{,}54224 = 5{,}593.$$

III. Für $H = 3{,}6$

$$h - H = 0{,}4; \qquad \varepsilon + h - H = 2{,}4$$

$$N = 10 + 2.\ 04 = 10{,}8.$$

$$\frac{(h - H).\ b}{N} = \frac{0{,}4\ 10}{10{,}8} = 0{,}37037$$

$$\frac{B - b}{N} = \frac{100}{108} = 0{,}92592$$

$$\frac{N - 2\,(b + 2\,H)}{2\,N} = \frac{10{,}8 - 2.\ 17{,}2}{21{,}6} = -\ 1{,}0925$$

$$\frac{b\,H}{N} = \frac{360}{108}$$

$$(B - b).\ H + (h - H).\ b = 10.\ 3{,}6 + 0{,}4.\ 10 = 40$$

$$N^2 = 116{,}64; \qquad N^3 = 1259{,}7.$$

$$(B - b).\ (h - H).\ (b + 2\,H)^2 = 10.\ 0{,}4.\ 295{,}84 = 1183{,}3$$

ln.

$$\text{ln.}\ (B + 2\,h) = 5{,}6347896 - \text{ln.}\ 10$$
$$\text{ln.}\ (b + 2\,H) = 5{,}1474944 - \text{ln.}\ 10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}48729 \quad ;$$

also

$$(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 2{,}4 \left[0{,}37037 + 0{,}92592.\ (3{,}6 - 0{,}4.\ 1{,}0925)\right.$$
$$\left. + \left(3{,}3333 - \frac{40.\ 17{,}2}{116{,}64} + \frac{1183{,}3}{1259{,}7}\right).\ 0{,}4873\right]$$
$$= 2{,}4.\ (0{,}37037 + 2{,}92868 - 0{,}78903)$$
$$= 6{,}024.$$

Da der Werth von $(\varepsilon + h - H).\ \Sigma$ bey so kleiner Aenderung von H noch so merklich zunimmt, so mache man weitere Versuche mit beträchtlich kleineren Werthen von H. Ich finde nun

IV. Für $H = 2$

$$h - H = 2; \qquad \varepsilon + h - H = 4$$
$$N = 10 + 2.\ 2 = 14$$
$$\frac{(h - H).\ b}{N} = \frac{20}{14} = 1{,}42857$$
$$\frac{B - b}{N} = \frac{10}{14} = 0{,}71428$$
$$\frac{N - 2.\ (b + 2\,H)}{2\,N} = -0{,}5$$
$$\frac{b\,H}{N} = \frac{20}{14} = 1{,}42857$$
$$(B - b).\ H + (h - H).\ b = 20 + 20 = 40$$
$$N^2 = 196; \quad N^3 = 2744.$$
$$(B - b).\ (h - H).\ (b + 2\,H)^2 = 10.\ 2.\ 196 = 3920$$
$$\text{ln.}\ (B + 2\,h) = 5{,}6347896 - \text{ln.}\ 10$$
$$\text{ln.}\ (b + 2\,H) = 4{,}9416424 - \text{ln.}\ 10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}6931472 \quad ;$$

also

 $(\varepsilon +$

$$(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 4.\left[1{,}42857 + 0{,}71478.\ (2 - 1)\right.$$
$$\left. + \left(1{,}42857 - \frac{40.\ 14}{196} + \frac{3920}{2744}\right).\ 0{,}69314\right]$$
$$= 4.\ (1{,}42857 + 0{,}71478)$$
$$= 8{,}5734.$$

Diese bedeutende Zunahme leitet darauf, den Werth von H noch merklich kleiner zu nehmen.

V. Für $H = 1{,}2$

$$h - H = 2{,}8;\quad \varepsilon + h - H = 4{,}8.$$
$$N = 10 + 5{,}6 = 15{,}6.$$
$$\frac{(h - H).\ b}{N} = \frac{28}{15{,}6} = 1{,}7948.$$
$$\frac{B - b}{N} = \frac{10}{15{,}6} = 0{,}64102.$$
$$\frac{N - 2\ (b + 2\ H)}{2\ N} = \frac{15{,}6 - 24{,}8}{31{,}2} = -\ 0{,}29487$$
$$\frac{b\ H}{N} = \frac{12}{15{,}6} = 0{,}76922$$
$$(B - b).\ H + (h - H).\ b = 12 + 28 = 40$$
$$N^2 = 243{,}36;\quad N^3 = 3796{,}4;$$
$$(B - b).\ (h - H).\ (b + 2\ H)^2 = 10.\ 2{,}8.\ 153{,}76 = 4305$$
$$\ln.\ (B + 2\ h) = 5{,}6347896 - \ln.\ 10$$
$$\ln.\ (b + 2\ H) = 4{,}8202815 - \ln.\ 10$$
$$\text{Diff.} = 0{,}8145081\ ;$$

also

$$(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 4{,}8.\left[1{,}7948 + 0{,}64102.\ (1{,}2 - 2{,}8.\ 0{,}29487)\right.$$
$$\left. + \left(0{,}76922 - \frac{40.\ 12{,}4}{243{,}36} + \frac{4305{,}28}{3796{,}4}\right).\ 0{,}814508\right]$$
$$= 4{,}8.\ (1{,}7948 + 0{,}23997 - 0{,}10985)$$
$$= 4{,}8.\ 1{,}9249 = 9{,}239.$$

VI.

VI. Für $H = 1$

$h - H = 3; \quad \varepsilon + h - H = 5$

$N = 10 + 6 = 16$

$$\frac{(h - H).\,b}{N} - \frac{3.\,10}{16} = 1{,}8375$$

$$\frac{B - b}{N} = \frac{10}{16} = 0{,}625$$

$$\frac{N - 2.\,(b + 2\,H)}{2\,N} = \frac{16 - 24}{32} = -\,0{,}25$$

$$\frac{b\,H}{N} = \frac{10}{16} = 0{,}625$$

$(B - b).\,H + (h - H).\,b = 10 + 30 = 40$

$N^2 = 256; \quad N^3 = 4096$

$(B - b).\,(h - H).\,(b + 2\,H)^2 = 10.\,3.\,144 = 4320$

$$\begin{aligned} \ln.\,(B + 2\,h) &= 3{,}3322045 \\ \ln.\,(b + 2\,H) &= \underline{2{,}7725887} \\ \text{Diff.} &= 0{,}5596158; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\varepsilon + h - H).\,\Sigma = 5.\,\Big[1{,}8375 &+ 0{,}625.\,\big(1 + 3.\,(-\,0{,}25)\big) \\ &+ \Big(0{,}625 - \frac{40.\,12}{256} + \frac{10.\,144}{4096}\Big)\Big] \\ &= 5.\,(1{,}8375 + 0{,}15625 - 0{,}89844) \\ &= 5.\,1{,}9937 = 9{,}968. \end{aligned}$$

VII. Für $H = 0{,}8$

$h - H = 3{,}2; \quad \varepsilon + h - H = 5{,}2;$

$N = 10 + 6{,}4 = 16{,}4$

$$\frac{(h - H).\,b}{N} = \frac{3{,}2.\,10}{16{,}4} = 1{,}95128$$

$$\frac{B - b}{N} = \frac{10}{16{,}4} = 0{,}60975$$

$$\frac{N - 2.(b + 2H)}{2N} = \frac{16{,}4 - 23{,}2}{32{,}8} = -0{,}20731$$

$$\frac{bH}{N} = \frac{10.\ 0{,}8}{16{,}4} = 0{,}48780$$

$$(B - b).\ H + (h - H).\ b = 10.\ 0{,}8 + 3{,}2.\ 10 = 40$$

$$N^2 = 268{,}96;\quad N^3 = 4421.$$

$$(B - b).\ (h - H).\ (b + 2H)^2 = 10.\ 3{,}2.\ 11{,}6^2 = 4306$$

$$\begin{aligned} \ln.\ (B + 2h) &= 5{,}6347896 - \ln.\ 10 \\ \ln.\ (b + 2H) &= 4{,}7535902 - \ln.\ 10 \\ \hline \text{Diff.} &= 0{,}8811994\ ; \end{aligned}$$

also

$$(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 5{,}2.\ \Big[1{,}95128 + 0{,}60975.\ (0{,}8 - 3{,}2.\ 0{,}20731)$$

$$+ \left(0{,}4878 - \frac{40.\ 11{,}6}{268{,}96} + \frac{4306}{4421}\right).\ 0{,}8812\Big]$$

$$= 5{,}2.\ (1{,}95128 + 0{,}08329 - 0{,}23209)$$

$$= 5{,}2.\ 1{,}80248 = 9{,}373.$$

Weitere Berechnung wäre überflüssig. Aus V, VI und VII ersieht man, daſs sowohl $H = 1{,}2$ als $H = 0{,}8$ einen kleineren Werth von $(\varepsilon + h - H).\ \Sigma$ giebt, als $H = 1$, und daſs jene beyden Werthe (V und VII) nahe beysammen liegen; daſs 9,968 (no. VI) dem Maximum sehr nahe liegen müsse. Man kann daher ohne Bedenken H als eine von 1 Fuſs nicht merklich verschiedene Gröſse annehmen und $(\varepsilon + h - H).\ \Sigma = 10$ setzen. Hiernach wird (ḫ. §. 28)

$$M = 91.\ 10.\ 4.\ \sqrt{\frac{10}{12000}}$$

$$= 105 \text{ rhl. Cub. F.}$$

Die gröſste Geschwindigkeit des Wassers im Canale ist hier die am Ende des Canals; also $= \frac{105}{20.\ 1} = 5{,}25$; sie fängt also erst gegen das Ende des Canals hin an, etwas über 5 Fuſse anzuwach-

sen

sen und ihr Wachsthum über 5 F. bleibt selbst bis ans Ende unbedeutend; man kann also $M = 105$ beybehalten.

§. 30.

2. *Ex.* Es seyen für einen anzulegenden Canal λ, b, ε, B, h und H vorgeschrieben, ohne freyen Lauf zu bedingen; man soll M finden. Es sey nämlich $\lambda = 12000$, $b = 10$, $B = 20$, $\varepsilon = 2$, $h = 4$, $H = 3$.

Man erhält hier

$$h - H = 1; \quad \varepsilon + h - H = 3.$$

$$N = 10 + 2 = 12.$$

$$\frac{(h-H).\, b}{N} = \frac{10}{12} = 0{,}83333$$

$$\frac{B - b}{N} = \frac{10}{12} = 0{,}83333$$

$$\frac{N - 2.\,(b + 2\,H)}{2\,N} = \frac{12 - 32}{24} = -\,0{,}83333$$

$$\frac{b\,H}{N} = \frac{30}{12} = 2{,}5$$

$$(B-b).\, H + (h-H).\, b = 30 + 10 = 40$$

$$N^2 = 144; \quad N^3 = 1728$$

$$(B-b).\,(h-H).\,(b + 2\,H)^2 = 10.\; 256 = 2560$$

$$\begin{array}{rl} \text{ln.}\,(B + 2\,h) & = 5{,}6347896 - \text{ln.}\,10 \\ \text{ln.}\,(b + 2\,H) & = \underline{5{,}0751738 - \text{ln.}\,10} \\ \text{Diff.} & = 0{,}5596158 \qquad ; \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} (\varepsilon + h - H).\, \Sigma &= 3.\left[0{,}83333 + 0{,}83333.\,(3 - 0{,}83333)\right. \\ &\quad \left. + \left(2{,}5 - \frac{40.\;16}{144} + \frac{2560}{1728}\right).\, 0{,}55961\right] \\ &= 3.\,(0{,}83333 + 1{,}80555 - 0{,}25907) \\ &= 7{,}1394. \end{aligned}$$

Zur

Zur Prüfung, ob die Voraussetzung $H = 3$ neben den übrigen Bestimmungsstücken Statt finde, berechne man den Werth von $(\varepsilon + h - H). \Sigma$ nunmehr für einen kleineren Werth von H. Ich benutze hierzu die im vor. §. schon angestellte Berechnung (no. IV), welche, für $H = 2$, $(\varepsilon + h - H). \Sigma = 8,5734$ gab, woraus also nach obigen Lehren die Statthaftigkeit der Voraussetzung $H = 3$ folgt. Hieraus erhält man nun weiter

$$M = 91.\ 10.\ 4.\ \sqrt{\frac{7,139}{12000}}$$
$$= 86,13 \text{ rhl. C. F.}$$

Berechnungen
zur ersten Methode für Canäle, bey welchen steigender Boden mit fallendem abwechselt.

§. 31.

Aufg. *Es seyen* (Fig. 8) $\alpha\beta$ *und* $\alpha'\beta'$ *horizontal; vorgeschrieben sind* $b = B$, $\beta\delta = h$, $\alpha\mu = \varepsilon$ (welches hier einen verneinten Werth hat), $\beta\mu = \lambda$, $\mu\alpha' = \lambda'$, $\beta'\mu = \varepsilon'$; *man soll* $\alpha'\eta' = H'$, $\mu\eta = y$ *und M finden. Das Wasser soll bey* $\alpha'\eta'$ *freyen Ablauf haben.*

Aufl. Eigentlich hat man es hier mit 2 Canälen zu thun:
1.) dem $\delta\eta$; 2.) dem $\eta\eta'$.
Durch jeden muſs dieselbe Wassermenge M abfliessen; man hat daher denjenigen Werth von y zu suchen, für welchen der Werth von $\frac{M^2}{91^2.\ b^3}$, den die Gleichung §. 5 giebt, einerley bleibt, man mag ihn für den einen oder für den andern Canal nehmen. Man muſs also y so bestimmen, daſs

$$\frac{h^2 y.(\varepsilon+h-y)}{y+h}.\left(1-\frac{b.\left(\ln.(b+2h)-\ln.(b+2y)\right)}{2.(h-y)}\right)=\frac{H.(\varepsilon'+y-H).y^2}{H+y}\times$$
$$\left(1-\frac{b.\left(\ln.(b+2y)-\ln.(b+2H)\right)}{2(y-H)}\right)$$

werde. Dabey mufs aber, weil das Wasser im Canale $\eta\,\eta'$ freyen Ablauf hat, H so genommen werden, dafs der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung ein Maximum wird. Man sieht, dafs $y < h + \varepsilon$ und $H < y$ seyn müsse.

Da es für den Ausdruck zur Rechten, den ich mit K bezeichnen will, mannigfaltige Maxima giebt, nachdem man y gröfser oder kleiner nimmt, so hat man dergleichen Maxima für mehrere Werthe von y zu berechnen, und zugleich die zu diesen Werthen von y gehörigen Werthe des Ausdrucks zur Linken, den ich mit N bezeichnen will. Diese Berechnung mufs fortgesetzt werden, bis man auf ein $K^{(m)} = N$ kommt. Alsdann hat man weiter

$$\frac{M^2}{91^2.\ b^3} = K^{(m)}$$

und

$$M = 91.\ \sqrt{b^3\ K^{(m)}}.$$

§. 32.

Aufg. *Aus den vorigen Bestimmungsstücken und dem Werthe von H den von M zu finden, wenn das Wasser bey $\alpha'\,\eta'$ keinen freyen Abflufs hat.*

Aufl. Man suche denjenigen Werth von y, welcher der Gleichung im vor. §. Genüge thut. So erhält man den hierher gehörigen Werth von K, und dann $M = 91.\ \sqrt{b^3\ K}$.

Zur Prüfung, ob der angenommene Werth von H neben den übrigen Bestimmungsstücken Statt finde, berechne man nunmehr

auch

auch für einen Werth von H, welcher kleiner als der vorgeschriebene ist, den zugehörigen Werth von K. Findet man diesen gröſser als den vorigen, so findet der angenommene Werth von H Statt, und der gefundene Werth von M ist der gesuchte.

Besondere Betrachtungen über Aufschwellungen oder Aufstauungen in regulären Canälen nach der ersten Methode.

§. 33.

Es ist oben schon erinnert worden, daſs die Länge λ aus der angenommenen Voraussetzung, nach welcher die Wasserfläche als eine schiefe Ebene betrachtet wird, nicht mit einiger Sicherheit bestimmt werden kann, weil eine kleine Abweichung des Werthes von H den von λ schon merklich und bedeutend abändern kann. Doch kann hieraus kein bedeutender Nachtheil erfolgen. Der Erfolg ist nämlich nur dieser, daſs die Wassertiefe, welche in einer gewissen Stelle, die durch λ bestimmt wird, Statt haben soll, nicht genau an dieser, sondern an einer anderen Statt findet, daſs aber die an jener Stelle doch nur wenig von der angenommenen Wassertiefe verschieden seyn kann; daſs also dieser Umstand keinen besonderen Nachtheil für die Ausübung nach sich zieht, indem hier überhaupt von Näherungen zur Wahrheit die Rede ist.

Nur verdient noch eine andere Folge von jener Voraussetzung einer schiefen Fläche bemerkt zu werden.

Wäre nämlich die Oberfläche des fliessenden Wassers wirklich allemal eine schiefe Ebene, so müſste bey der geringsten Vergröſserung von H, die sich durch eine angebrachte Hinderniſs (z. B. durch eine auf dem Boden am Ende des Canals befestigte sehr dünne Latte) ergäbe, eine Aufschwellung oder Aufstauung entstehen, die sich allemal bis zum Anfange des Canals fortpflanzte,

so

so lang auch der Canal seyn möchte. Daſs dieser Erfolg aber nicht allemal, sondern nur bey einer gewissen Gröſse der Aufstauung eintrete, weiſs man hinlänglich aus der Erfahrung. Es wäre daher interessant, die Gestalt der, eigentlich etwas concaven, Wasserfläche genauer zu kennen. Ich werde weiter unten auf diesen Gegenstand zurückkommen. Aber auch ohne diese genauere Kenntniſs dienen die bisherigen Untersuchungen zur Beantwortung einiger noch hierher gehörigen wichtigen Fragen, so daſs man sich der Wahrheit wenigstens zu vielen Absichten in der Ausübung genügend nähern kann.

§. 34.

Aufg. $\alpha\beta$ (Fig. 10) *sey horizontal;* $\alpha\gamma\delta\eta$ *das Längenprofil eines schon angelegten Canals mit freyem Laufe;* b, λ, h, ε *und H sind von diesem Canale nach wirklichen Messungen angegeben; die jetzige Tiefe H ist* $\alpha\eta$; *das Wasser soll nun am Ende so aufgestaut werden, daſs sich die Ausübung bis in n verbreite; wie hoch darf man das Wasser im Querschnitte bey* α *aufschwellen?*

Aufl. Das Wasser steige über α bis in m; es sey also, nach der Hypothese von der schiefen Ebene des Wasserspiegels, m n die Lage, bis zu welcher der ursprüngliche Wasserspiegel erhoben wird; so läſst sich das von $\delta\gamma$ nach n o fliessende Wasser als das Mittel ansehen, wodurch dem Canale α o n η das Wasser im ersten Querschnitte n o zugeführt wird, und man kann n o als die Tiefe des Wassers am Anfange eines Canals betrachten, die ich, weil $\delta\gamma = \mathrm{h}$ seyn soll, mit h′ bezeichnen will. Ebenso bezeichne ich, weil $\delta\eta = \lambda$ ist, die Länge η n mit λ', die Höhe α m mit H′, indem $\alpha\eta = \mathrm{H}$ ist; und das absol. Gefäll o p mit ε'.

Hiernach hat man nun

$$\mathrm{h}' = \mathrm{H} + \frac{\lambda'}{\lambda}\cdot(\mathrm{h} - \mathrm{H}).$$

Die

Die allgemeine Gleichung §. 5. ⊙ giebt den Werth von M, den man auch durch Messung der Geschwindigkeit beym vorgegebenen Canale gefunden haben kann. Schreibt man nun h′, H′ und λ′ statt h, H und λ, so erhält man aus §. 5. ⊙

$$\frac{\lambda'.\ M^2}{8281.\ b^3.\ h'^2} = \frac{H'.\ (\varepsilon' + h' - H')}{h' + H'}.\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h') - \ln.(b+2H')\right)}{2.\ (h' - H')}\right),$$

und man hat nur noch den Werth von H′ zu suchen, welcher dieser Gleichung Genüge thut.

§. 35.

Aufg. *Es ist* (Fig. 10) *b, λ, h, ε und H, also auch M für den freyen Lauf bey einem schon angelegten Canale gegeben; das Wasser soll in α auf die Höhe α m aufgeschwellt werden, die = H′ ist; man sucht die Länge η n = λ′, auf welche sich die Aufschwellung verbreiten wird.*

Aufl. Substituiren wir in der Gleichung des vorigen §. den dortigen Werth $H + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda'$ statt h′, so giebt sie

$$\frac{\lambda'^2.\ M^2}{8281.\ b^3\ H'} = \frac{\left(H + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda'\right)^2.\ \lambda^2.\ H'.\left(\varepsilon' + H' + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda' - H'\right)}{\lambda'.\ \left(H + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda' + H'\right)}$$

$$\times\left(1 - \frac{b.\left(\ln.\left(b + 2\left(H + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda'\right)\right) - \ln.(b + 2H')\right)}{2.\ \left(H + \frac{h-H}{\lambda}.\ \lambda' - H'\right)}\right).$$

Wenn man also den ganzen Ausdruck zur Rechten mit E bezeichnet, so hat man denjenigen Werth von λ′ zu suchen, welcher

$$E = \frac{\lambda'^2.\ M^2}{8281.\ b^3.\ H'}$$

giebt.

§. 36.

Aufg. *In einem schon angelegten Canale* w γ δ v (Fig. 11) *soll über* α *ein Damm* (Wehr) *nach der ganzen Breite des Canals durchgeführt werden, so dass aus dem natürlichen Wasserspiegel* η n δ *der aufgeschwellte* m n δ *wird, also die Aufstauung bis in n verbreitet werde. Es ist die Wassertiefe* n o $= h'$, *die Länge* α o $= \lambda'$, o p $= \varepsilon'$, *die Canalbreite* b *und die Abflussmenge M gegeben; man soll die Höhe* α m *finden.*

Aufl. Weil hier h' selbst gegeben ist, so dient die kürzere Gleichung (§. 34), und man hat nur den Werth von H' zu suchen, welcher der dortigen Gleichung Genüge thut, d. h. denjenigen Werth von H', welcher den dortigen Ausdruck zur Rechten $= \frac{\lambda'.\, M^2}{8281.\, b^5.\, h'^2}$ giebt.

§. 37.

Aufg. *Es sey alles wie im vor. §., nur H' statt λ' gegeben und λ' statt H' gesucht.*

Aufl. Die Gleichung §. 34 giebt

$$\lambda' = \frac{b^3 h'^2 . 8281}{M^2} . \frac{H'.(\varepsilon' + h' - H')}{h' + H'} . \left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h') - \ln.(b+2H')\right)}{2.(h'-H')}\right).$$

Wenn $\alpha\gamma = \lambda$ und $\beta\gamma = \varepsilon$ ist, so wird $\varepsilon' = \frac{\lambda'}{\lambda} . \varepsilon$, und dieses statt ε gesetzt, giebt

$$\lambda' = \cfrac{h' - H'}{\cfrac{M^2 . (H' + h')}{8281 . b^3 . h'^2 . H' . \left(1 - \cfrac{b. \ln.(b+2h') - \ln.(b+2H')}{2.(h'-H')}\right)} - \cfrac{\varepsilon}{\lambda}}.$$

§. 38.

Aufg. *Unter denselben Umständen, wie §. 36, die Höhen sowohl des Ueberfallwehres* α r *(Fig. 11) als die des frey überschiessenden Wassers* r m *zu finden.*

Vorerinner. Beym Abflusse des Wassers über das Wehr kann man die Bewegung desselben so betrachten, als flösse es nur bis zu einer gewissen Strecke, z. B. bis in z längst dem Boden γz, würde dann aber durch das entgegengesetzte Hindernifs des Damms bestimmt, nach z r aufwärts seine Bewegung so fortzusetzen, als wäre γz r der Canalboden. Wenn gleich in dem prismatischen Raume zβr das Wasser nach und nach auch seine Stelle verläfst, so ist doch die in jeder Sec. aus diesem Raume über das Wehr abfliessende Wassermenge ein so kleiner Theil von M, dafs er in keine Betrachtung kommt.

Nur bleibt hier noch die schwierige Frage: welche von den unzählich denkbaren Linien x r, q r, y r, z r etc. soll man bey dieser Betrachtung zum Grunde legen, um der Wahrheit nahe genug zu kommen?

Natürlich wird das Wasser demjenigen Wege folgen, auf welchem ihm die wenigsten Hindernisse entgegen stehen, also auf welchem der Werth von M ein Maximum wird, oder auf welchem, für einen bestimmten Werth von M, die Höhe r m ein Minimum wird. Es ist leicht einzusehen, dafs die Anwendung bisheriger Berechnungen jenes Max. oder dieses Min. allemal für den kleinsten Werth von λ', also für $\lambda' = \alpha\beta$ geben müfste. In der That wäre aber eine solche Anwendung unrichtig. Es kommt nämlich hier ein neuer Umstand in Betrachtung, welcher die Bestimmung noch schwieriger macht. Es ist nämlich keineswegs einerley, ob z. B. q r blos *als Gränzlinie im Wasser* angesehen, oder ob nach dieser Richtung wirklich *ein fester Boden* angebracht wird.

Der Widerstand, welchen der Damm den Wassertheilchen entgegensetzt, könnte so beschaffen seyn, dafs sie sich beyläufig nach y r ablenkten. Das würde nun freilich auch ein nach y r angebrachter fester Boden bewirken. Aber dieser verzögert nun überdas die Bewegung der über ihn hinfliessenden Wassertheilchen *mehr*

als

als der flüssige Boden y r, und es kommt also eigentlich darauf an, die Linie q r anzugeben, in welcher ein fester Boden dem Wasser ganz dieselben Hindernisse entgegen setzen würde, welche die Wassermasse β y r entgegensetzt. Es würde aber eine ganz vergebliche Bemühung seyn, alle diese Schwierigkeiten auf dem Wege der Theorie beseitigen zu wollen. Zum Glücke sind für die Ausübung ganz scharfe Bestimmungen nicht nöthig, und es muſs hier genügen, die Bestimmungen auf einem solchen Wege zu suchen, der auf keine Inconsequentien führen kann.

Aufl. 1. Ich setze α q $= \frac{1}{6}$ m n hypothetisch als beyläufige Bestimmung.

2. Man suche nun nach §. 36, nachdem man M schon für den ursprünglichen Canal bestimmt hat, auch die Höhe α m = H.

3. Jetzt hat man es nur noch mit Anwendung der allgemeinen Formel (§. 34) zu thun. Setzt man nämlich (Fig. 40) α q = λ', die Canalbreite = b, q t = h' (diese giebt sich, wenn man nach der Bestimmung von H die gerade m n zieht und dann in q ein Perpendikel aufrichtet), r m = H', und zieht m μ horizontal, so läſst sich μ t = $\varepsilon' + h' - H'$, wofür ich α schreiben will, gleichfalls messen.

4. Man hat nunmehr

$$\frac{\lambda'.\ M^2}{8281.\ \alpha.\ b^3\ h'^2} = \frac{H'}{H'+h'}.\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h') - \ln.(b+2H')\right)}{2(h'-H')}\right),$$

wo man H' so nehmen muſs, daſs dieser Gleichung Genüge geschieht.

5. Es läſst sich auch alles ohne Zeichnung durch bloſse Rechnung finden. Es ist nämlich o p und o n, also n p gegeben, und α m durch Rechnung bestimmt; daher

h' =

$$h' = tq = \alpha m + \frac{\alpha q}{\alpha o}.(no - \alpha m)$$

$$\varkappa = t\mu = \frac{\alpha q}{\alpha o}.(\nu p - \alpha m),$$

wo man $\frac{\alpha q}{\alpha o} = \frac{1}{6}$ nimmt.

§. 39.

Ex. Ueber α soll ein Wehr erbaut werden, wodurch aber das Wasser nur bis in n zurückgestaut werden soll. Wirkliche Abmessungen haben folgende Bestimmungsstücke gegeben

mn oder $\alpha o = 4000$ rhl. Fuſs

$no = 1{,}5$ F.; $op = 6$ F.; $b = 10$; $\alpha\eta = 2$.

Man soll die erfoderliche Höhe des Wehres αr finden.

1. Ich suche zuerst M aus Betrachtung des noch nicht aufgeschwellten Wassers. Hierzu dient die Gleichung ☉. §. 5; für *diese* ist

$b = 10$; $\lambda = 4000$; $h = no = 1{,}5$; $H = \alpha\eta = 2$; $\varepsilon = op = 6$;

also

$$\begin{array}{llrl} \varepsilon + h - H = 5{,}5 & & \ln.(b + 2h) & = 2{,}564949 \\ b + 2h & = 13 & \ln.(b + 2H) & = 2{,}639057 \\ b + 2H & = 14 & \text{Diff.} & = -0{,}074108; \end{array}$$

demnach

$$M = 91.\ 15.\ \sqrt{\frac{20.\ 5{,}5}{4000.\ 3{,}5}}.\left(1 - \frac{0{,}741080}{1}\right)$$

$$= 91.\ 1{,}5.\ \sqrt{\frac{11}{14}}.\ 0{,}25892$$

$$= 61{,}56 \text{ C. F.}$$

2. Jetzt folgt die Bestimmung von $\alpha m = H'$ nach §. 34. Für die nunmehr anzuwendende Gleichung ist

M =

$$M = 61{,}56$$
$$\lambda' = 4000$$
$$b = 10$$
$$h' = no = 1{,}5$$
$$\varepsilon' = op = 6.$$

Es soll also

$$\frac{61{,}56^2 \cdot 4000}{8281 \cdot 1000 \cdot 1{,}5^2} = \frac{H' \cdot (7{,}5 - H')}{1{,}5 + H'} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot \left(\ln. 13 - \ln. (10 + 2H')\right)}{2 \cdot (1{,}5 - H')}\right)$$

werden.

Die Gröſse zur Linken ist $\frac{15177}{18632} = 0{,}8146$.

3. Ich suche nunmehr denjenigen Werth von H', welcher dieser Gleichung Genüge thut. Ich will geflissentlich mit einigen Versuchen den Anfang machen, die man nicht nöthig hätte, weil zum voraus zu sehen ist, daſs der Werth von H' etwas groſs ausfallen muſs. Dieses wird mir zur Wiederholung einer schon oben gemachten Erinnerung Gelegenheit geben. Man findet nämlich

I. Für $H' = 3$

$$H' \cdot (7{,}5 - H') = 13{,}5. \qquad \ln. 13 = 2{,}5649493$$
$$2 \cdot (1{,}5 - H') = -3. \qquad \ln. (10 + 2H') = 2{,}7725887$$
$$\text{Diff.} = -0{,}2076394;$$

also obige Gröſse zur Rechten, die ich E nennen will,

$$E = \frac{13{,}5}{4{,}5} \cdot \left(1 - \frac{2{,}076394}{3}\right)$$
$$= 3 \cdot 0{,}3078 = 0{,}9234.$$

II. Für $H' = 2{,}5$

$$H' \cdot (7{,}5 - H') = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5 \qquad \ln. 13 = 2{,}5649493$$
$$2 \cdot (1{,}5 - H') = -2 \qquad \ln. 15 = 2{,}7080502$$
$$\text{Diff.} = -0{,}1431009;$$

also

also

$$E = \frac{12,5}{4} \cdot \left(1 - \frac{1,431009}{2}\right) = 0,889.$$

III. Für $H' = 2$;

$H' . (7,5 - H') = 2 . 5,5 = 11.$ ln. $13 = 2,5649493$

$2 . (1,5 - H') = -1$ ln. $14 = 2,6390573$

Diff. $= - 0,0741080$;

also

$$E = \frac{11}{3,5} \cdot \left(1 - \frac{0,741080}{1}\right) = 0,8137.$$

Da nun $E = 0,814$ werden soll, so hätte man hiernach sehr genau $H' = 2$ Fuſs.

Aber dieser Werth ist mit dem von $\alpha\eta$ einerley, gäbe also, was man schon vor sich hatte, nämlich die natürliche Wassertiefe. So führt also diese Berechnung auf einen Werth von H', dessen Richtigkeit man schon aus den angenommenen Voraussetzungen erkennt, den man aber ebendarum nicht erst zu suchen brauchte.

Nothwendig muſs zwischen $H' = 2$ und $H' = \varepsilon' + h' = 7,5$ noch ein Werth von H' liegen, der $E <$ als no. I und > 0 giebt. Durch fortgesetzte Rechnung erhält man nun

IV. Für $H' = 6$

$H' . (7,5 - H') = 6 . 1,5 = 9$ ln. $13 = 2,5649493$

$2 . (1,5 - H') = - 9$ ln. $22 = 3,0910424$

Diff. $= - 0,5260931$;

also

$$E = \frac{9}{7,5} \cdot \left(1 - \frac{5,260931}{9}\right) = 0,4 \ldots .$$

V.

V. Für $H' = 5$

$$H' . (7{,}5 - H') = 12{,}5 \qquad \ln. 13 = 2{,}5649493$$
$$2. \ (1{,}5 - H') = -7 \qquad \ln. 20 = 2{,}9957322$$
$$\text{Diff.} = -0{,}4307829;$$

also

$$E = \frac{12{,}5}{6{,}5} . \left(1 - \frac{4{,}307829}{7}\right) = 0{,}73 \text{----}$$

VI. Für $H' = 4{,}7$

$$H' . (7{,}5 - H') = 13{,}16 \qquad \ln. 13 = 4{,}8675344 - \ln. 10$$
$$2. \ (1{,}5 - 4{,}7) = -6{,}4 \qquad \ln. 19{,}4 = 5{,}2678581 - \ln. 10$$
$$\text{Diff.} = -0{,}4003237;$$

also

$$E = \frac{13{,}16}{6{,}2} . \left(\frac{4{,}003237}{6{,}4}\right) = 0{,}79 \text{----}$$

VII. Für $H' = 4{,}6$

$$H' . (7{,}5 - H') = 13{,}34 \qquad \ln. 13 = 4{,}8675344 - \ln. 10$$
$$2. \ (1{,}5 - H') = -6{,}2 \qquad \ln. 19{,}2 = 5{,}2574953 - \ln. 10$$
$$\text{Diff.} = -0{,}3899609;$$

also

$$E = \frac{13{,}34}{6{,}1} . \left(1 - \frac{3{,}899609}{6{,}2}\right)$$
$$= 0{,}811 \text{----}$$

Man hat daher sehr genau

$$\alpha m = H' = 4{,}6 \text{ Fuſs rhl.}$$

Nunmehr kommen wir zur Anwendung der in der Auflösung (no. 4) angegebenen Gleichung. Für *diese* behalten b und M die vorigen Werthe; aber λ' ist jetzt $= \alpha q = \frac{4000}{6} = 666\frac{2}{3}$; H' ist jetzt die Höhe rm (Fig. 11); h' die Höhe $tq = \alpha m + \frac{1}{6}(no - \alpha m)$

 (Aufl.

(Aufl. no. 5) $= 4{,}6 + \frac{1{,}5 - 4{,}6}{6} = 4{,}08$; $\alpha = t\mu = \frac{1}{6}(np - \alpha m)$
$= \frac{7{,}5 - 4{,}6}{6} = 0{,}483$.

Die Gröfse zur Linken in dortiger Gleichung ist

$$\frac{61{,}56 \cdot 666\frac{2}{3}}{8281 \cdot 0{,}483 \cdot 1000 \cdot 4{,}08^2} = 0{,}038.$$

Es soll also

$$\frac{H'}{H' + 4{,}08} \cdot \left(1 - \frac{10 \cdot (\text{ln. } 18{,}16 - \text{ln. } (10 + 2\,H))}{2 \cdot (4{,}08 - H)}\right) = 0{,}038$$

werden. Ich finde nun, wenn ich diese Gröfse E nenne,

I. Für $H' = 1$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}08} = 0{,}1968 \qquad \begin{array}{ll} \text{ln. } 18{,}16 = 7{,}5043915 - \text{ln. } 100 \\ \text{ln. } 12{,}00 = 7{,}0900768 - \text{ln. } 100 \end{array}$$

$$2 \cdot (4{,}08 - H') = 6{,}16 \qquad \text{Diff.} = 0{,}4143147 \;;$$

also

$$E = 0{,}1968 \cdot \left(1 - \frac{4{,}143147}{6{,}16}\right) = 0{,}0644.$$

II. Für $H' = 0{,}5$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}08} = 0{,}1091 \qquad \begin{array}{ll} \text{ln. } 18{,}16 = 7{,}5043915 - \text{ln. } 100 \\ \text{ln. } 11{,}00 = 7{,}0030654 - \text{ln. } 100 \end{array}$$

$$2 \cdot (4{,}08 - H') = 7{,}16 \qquad \text{Diff.} = 0{,}5013261 \;;$$

also

$$E = 0{,}1091 \cdot \left(1 - \frac{5{,}013261}{7{,}16}\right) = 0{,}0327.$$

III. Für $H' = 0{,}6$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}08} = 0{,}1282 \qquad \begin{array}{ll} \text{ln. } 18{,}16 = 7{,}5043915 - \text{ln. } 100 \\ \text{ln. } 11{,}2 \;\; = 7{,}0210839 - \text{ln. } 100 \end{array}$$

$$2 \cdot (4{,}08 - H') = 6{,}96 \qquad \text{Diff.} = 0{,}4833076;$$

also

also

$$E = 0{,}1282 . \left(1 - \frac{4{,}833076}{6{,}96}\right) = 0{,}0391.$$

Der Werth von E sollte $= 0{,}038$ werden; man hat also hinlänglich genau

$$r\,m = H' = 0{,}6 \text{ rhl. F.}$$

und

$$\text{des Wehres Höhe } \alpha\, r = 4{,}6 - 0{,}6 = 4 \text{ Fuſs.}$$

Anm. Dieses Resultat hängt mit der ungewissen Voraussetzung zusammen, daſs $\frac{\alpha\, q}{\alpha\, o} = \frac{1}{6}$ angenommen werden könne, welches im vorstehenden Beyspiele schon $\alpha\, q = 666$ Fuſse gab. Es könnte aber der wahre Werth von $\alpha\, q$ merklich von diesen verschieden seyn, und es ist beynahe keinem Zweifel unterworfen, daſs hier $\alpha\, q$ beträchtlich und wohl einige hundert Fuſse weniger betragen kann, und daſs überhaupt $\frac{\alpha\, q}{\alpha\, o} < \frac{1}{6}$ genommen werden dürfte. Aber es läſst sich aus der Natur der Sache leicht übersehen, daſs diese Unbestimmtheit wenig Einfluſs auf die zuletzt gefundene Wehreshöhe haben kann. Denn man weiſs aus obigen Lehren, daſs aus dem früher oder später anfangenden schiefen Boden unter sonst gleichen Umständen keine *sehr groſse* Aenderung im Werthe von M erfolgen kann; man weiſs überdas, daſs eine kleine Aenderung im Werthe von H′ schon einen merklichen Einfluſs auf M haben kann; es wird also auch bey einer bedeutenden Verschiedenheit oder Aenderung von $\alpha\, q$ doch nie eine bedeutende, mit nachtheiligen Folgen verbundene Aenderung von r m oder H′ zu fürchten seyn; eine kleine Aenderung in der Wehreshöhe würde schon einen merklichen Einfluſs auf die Abfluſsmenge M haben. Ich habe übrigens $\alpha\, q$ $\left(= \frac{1}{6}\,\alpha\, o\right)$ lieber etwas groſs annehmen wollen, weil ein gröſserer Werth dem Abflusse mehr nachtheilig ist, und dieses zur Folge hat, daſs auch ein etwas gröſserer Werth von r m, folglich ein kleinerer für die Wehreshöhe $\alpha\, r$ gefunden werden muſs, welches, auch bey einem nur geringen Unterschiede, gröſsere Sicherheit für die Ausübung giebt, daſs die Aufstauung nicht über die vorgeschriebene Stelle n hinaus-

hinausgehe. Ich füge zu mehrerer Ueberzeugung noch die folgende Berechnung bey.

§. 40.

Es sey alles, wie im vor. Ex; nur $\frac{\alpha q}{\alpha o}$ nicht $= \frac{1}{6}$, sondern $= \frac{1}{12}$, also $\lambda = 333$ F., $\alpha = 0{,}04025$ F.; so bleibt $\frac{\alpha}{\lambda}$ wie vorher; aber h′ ändert sich in $4{,}6 + \frac{1{,}5 - 4{,}6}{12} = 4{,}342$ statt 4,08; und aus der Zahl 0,038 (vor. §. no. VII am Ende) wird jetzt die 0,032.

Jetzt soll also

$$\frac{H'}{H' + 4{,}342} \cdot \left(1 - \frac{10.\left(\ln.\ 18{,}16 - \ln.\ (10 + 2\ H')\right)}{2.\ (4{,}342 - H')}\right) = 0{,}032$$

werden. Die Berechnung giebt nun

I. Für $H' = 0{,}6$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}342} = 0{,}1214 \qquad \text{Diff. log.} = 0{,}4833076$$

$$2.\ (4{,}342 - H') = 7{,}484 \qquad \text{wie oben;}$$

also

$$E = 0{,}1214 \cdot \left(1 - \frac{4{,}833076}{7{,}484}\right) = 0{,}043.$$

II. Für $H' = 0{,}4$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}342} = 0{,}0844 \qquad \ln.\ 18{,}16 = 7{,}5043915 - \ln.\ 100$$

$$2.\ (4{,}342 - H') = 788 \qquad \ln.\ 10{,}8 = 6{,}9847163 - \ln.\ 100$$

$$\text{Diff.} = 0{,}5196752;$$

also

$$E = 0{,}0844 \cdot \left(1 - \frac{5{,}196752}{7{,}88}\right) = 0{,}0287.$$

III.

III. Für $H' = 0{,}45$

$$\frac{H'}{H' + 4{,}342} = 0{,}094 \qquad \ln.\ 18{,}16 = 7{,}5043915 - \ln.\ 100$$

$$2.\ (4{,}342 - H') = 7{,}784 \qquad \ln.\ 10{,}9 = 6{,}9939329 - \ln.\ 100$$

$$\text{Diff.} = 0{,}5104586;$$

also

$$E = 0{,}094.\ \left(1 - \frac{5{,}104586}{7{,}784}\right)$$

$$= 0{,}0323;$$

demnach sehr genau

$$rm = H' = 0{,}45 \text{ rhl. Fuſs},$$

und

$$\alpha r = 4{,}6 - 0{,}45 = 4{,}15 \text{ F.}$$

Nach der letzteren Voraussetzung von $\alpha q = \frac{1}{12}\alpha o$ wird also die Wehreshöhe nur um 0,15 F. gröſser als nach der vorhergehenden $\alpha q = \frac{1}{6}\alpha o$. Ich behalte aber zur Sicherheit die vorhergehende bey.

Anm. Diese Berechnungen haben auch in Fällen, wo unter einer alten Mühle eine neue angelegt werden soll, ihren Gebrauch. Man sieht, wie sehr unrichtig man verfährt, wenn man die Höhe des neuen Wehres so bestimmt, daſs es bis zu der von o aus über α hinstreichenden horizontalen Ebene reicht, wodurch hier αr eine Höhe von 6 rhl. Fuſsen erreichen würde.

Anwendung der ersten Methode auf die pronysche Grundformel.

§. 41.

Statt der von Chezy hergenommenen Grundformel

$$M = 91.\ bh.\ \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\lambda}.\ \frac{bh}{b + 2h}\right)}$$

giebt

giebt **Prony** (Récherches Phys. Mathem.) die folgende

$$M = bh. \left(-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 3233 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{bh}{b + 2h}\right)}\right) \text{*)}$$

welche aber gleichfalls voraussetzt, daſs der Wasserquerschnitt längs dem ganzen Canale als unveränderlich angesehen werden könne. Dem bisherigen Vortrag zufolge hat man nun allgemeiner bey unveränderlicher Breite

$$M = bh. \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + \frac{3233.(\varepsilon + h - H)}{\lambda} \cdot \frac{Hb}{H+h} \times \left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)}{2.(h-H)}\right)\right)}\right],$$

wo sich aber alle Abmessungen auf Meter beziehen.

§. 42.

Hier ist es bequemer, zuerst die **pronysche** Formel in Bezug auf rhl. Fuſse auszudrücken, und dann die allgemeinere Formel daraus abzuleiten.

Es ist nämlich 1 Meter = 3,18725 rhl. Fuſs; also

$$\frac{bh}{b + 2h} \text{ einerley mit } \frac{1}{3{,}18725} \cdot \frac{bh}{b + 2h},$$

wenn im letzteren Ausdrucke b und h sich auf rhl. Fuſse beziehen. Man erhält also

$$\frac{3233}{3{,}18725} \cdot \frac{bh}{b + 2h} \text{ statt } 3233 \cdot \frac{bh}{b + 2h}$$

und

$$\left(\frac{1}{3{,}18725}\right)^2 . \, bh \text{ statt } bh.$$

Folglich

*) Statt 0,0049 setzt **Prony** 0,005. Weil aber die erste Zahl unter dem $\sqrt{}$ das Quadrat von der Zahl vor dem $\sqrt{}$ seyn muſs, so habe ich dafür 0,0049 gesetzt. Der Ausdruck muſs auch von der Art seyn, daſs er, für $\frac{\alpha}{\lambda} = 0$, genau $M = 0$ giebt.

Folglich

$$M = \frac{b\,h}{(3{,}18725)^2}.\ \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + \frac{\alpha}{\lambda}.\ \frac{3222}{3{,}18725}.\ \frac{b\,h}{b+2\,h}\right)}\right]$$

oder

$$M = 0{,}0982.\ b\,h.\ \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1014.\frac{\alpha}{\lambda}.\ \frac{b\,h}{b+2\,h}\right)}\right],$$

wo aber M immer noch Cub. Meter bezeichnet.

Nun ist 1 Cub. Meter = 32,378 rhl. Cub. Fuſs; also in Bezug auf rhl. Fuſse und Cub. Fuſse

$$M = 3{,}187.\ b\,h.\ \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1014.\ \frac{\varepsilon+h-H}{\lambda}.\ \frac{b\,h}{b+2H}\right)}\right]$$

und hieraus nun die allgemeinere Formel

$$M = 3{,}187.\ b\,h.\ \left[\begin{array}{l} -0{,}07 + \sqrt{\Big(0{,}0049 + 1014.\ \frac{\varepsilon+h-H}{\lambda}.\ \frac{H\,b}{H+h}} \\ \quad \times \left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2\,h) - \ln.(b+2\,H)\right)}{2.\ (h-H)}\right)\Big) \end{array}\right].$$

Der Gebrauch dieser Formel ist aus den vielen obigen Berechnungen hinlänglich bekannt.

§. 43.

Ex. Es sey $\lambda = 1000$; $b = 10$; $\varepsilon = 1$; $h = 2$; $M = 30$; man soll, wie im Ex. §. 20 H finden.

Die allgemeine Gleichung des vor. §. giebt

$$\left(\left(\frac{M}{3{,}187.\ b.\ h} + 0{,}07\right)^2 - 0{,}0049\right).\ \frac{\lambda}{1014.\ b}$$

$$= \frac{H}{H+h}.\ (\varepsilon+h-H).\ \left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2\,b) - \ln.(b+2\,H)\right)}{2.\ (h-H)}\right).$$

Die

Die Gröſse zur Rechten heiſse E. Die zur Linken ist hier

$$\left(\left(\frac{30}{3,187 \cdot 20} + 0,07\right)^2 - 0,0049\right) \cdot \frac{1000}{10140} = 0,02642.$$

Es muſs also H so genommen werden, daſs = 0,0264 werde. Ich finde nun

I. Für $H = 2,8$

$$\frac{H}{H+h} = \frac{7}{12} \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,h) = 4,9416424 - \text{ln.}\ 10$$

$$h + \varepsilon - H + 0,2 \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,H) = 5,9408560 - \text{ln.}\ 10$$

$$2.\ (h - H) = -1,6 \qquad \text{Diff.} = -0,1082136;$$

also

$$E = \frac{7}{12} \cdot 0,2 \cdot \left(1 - \frac{1,082136}{1,6}\right)$$

$$= 0,0377.$$

II. Für $H = 2,9$

$$\frac{H}{H+h} = \frac{2,9}{4,9} \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,h) = 4,9416424 - \text{ln.}\ 10$$

$$h + \varepsilon - H = 0,1 \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,H) = 5,0625950 - \text{ln.}\ 10$$

$$2.\ (h - H) = -1,8 \qquad \text{Diff.} = -0,1209526;$$

also

$$E = \frac{29}{49} \cdot 0,1 \cdot \left(1 - \frac{1,209526}{1,8}\right)$$

$$= 0,01942.$$

III. Für $H = 2,85$

$$\frac{H}{H+h} = \frac{2,85}{4,85} \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,h) = 4,9416424 - \text{ln.}\ 10$$

$$h + \varepsilon - H = 0,15 \qquad \text{ln.}\,(b + 2\,H) = 5,0562458 - \text{ln.}\ 10$$

$$2.\ (h - H) = -1,7 \qquad \text{Diff.} = -0,1146034;$$

also

$$E = \frac{285}{485} \cdot 0,15 \cdot \left(1 - \frac{1,146034}{1,7}\right)$$

$$= 0,02872.$$

IV.

IV. Für $H = 2{,}86$

$$\frac{H}{H+h} = \frac{286}{486} \qquad \text{ln. } (b + 2\,h) = 7{,}2442275 - \text{ln. } 100$$

$$h + \varepsilon - H = 0{,}14 \qquad \text{ln. } (b + 2\,H) = 7{,}3601039 - \text{ln. } 100$$

$$2.\,(h - h) = -1{,}72 \qquad \text{Diff.} = -0{,}1158764;$$

also

$$E = \frac{286}{486}.\,0{,}14.\left(1 - \frac{1{,}158764}{1{,}72}\right)$$

$$= 0{,}0268.$$

Es sollte aber $E = 0{,}0264$ werden; also hat man sehr genau $H = 2{,}86$, eigentlich etwas weniges gröſser, etwa $= 2{,}862$; aber dergleichen feine Correctionen fallen hier weg.

Die Uebereinstimmung mit dem Resultate (§. 20) übertrifft alle Erwartung; auch dort wurde $H = 2{,}86$ gefunden.

§. 43. (*)

Aufg. *Durch wirkliche Messungen bey einem schon angelegten horizontalen Canale sind h, b, λ und H gegeben; man soll M finden.*

Aufl. Hier dient die allgemeine Gleichung (§. 41), wo man nur $\varepsilon = 0$ setzen darf.

Ex. Es sey $\lambda = 1000$; $h = 3$; $b = 10$; $H = 1{,}4$; so wird

$$M = 95{,}61.\left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}014.\,1{,}6.\,\frac{14}{4.4}.\left(1 - 10.\,\frac{\text{ln.}16 - \text{ln.}\,12{,}8}{3{,}2}\right)\right)}\right]$$

$$= 95{,}61.\,(-0{,}07 + \sqrt{1{,}566981}) = 112{,}8 \text{ C. Fuſs.}$$

Dieselben Bestimmungsstücke gaben oben (Ex. §. 11), wo H erst noch gesucht und $= 1{,}4$ Fuſs gefunden wurde, $M = 107$ C. F. Uebrigens gilt die dortige Erinnerung auch hier.

§. 44.

Aufg. *Von einem schon angelegten Canale sind λ, H, h, b und M gegeben; man soll ε finden.*

Aufl. Die allgemeine Gleichung (§. 41) giebt

$$\varepsilon = \left(\left(\frac{M}{3{,}187 . b h} \right)^2 - 0{,}0049 \right) . \frac{\lambda . (H + h)}{1014 . b H . \left(1 - \frac{b . \left(\ln . (b + 2h) - \ln . (b + 2H) \right)}{2 . (h - H)} \right)}.$$

Findet man durch diese Berechnung den Werth von ε verneint, so hat der Canal einen *steigenden* Boden.

§. 45.

Aufg. *Für den freyen Lauf werden λ, b, ε und M vorgeschrieben; man soll h und H bestimmen.*

Aufl. Der Werth von M zur Rechten in der allgemeinen Gleichung (§. 41) heisse E; so suche man für mehrere Werthe von h denjenigen Werth von H, für welchen E ein Maximum wird, bis man einen Werth von E findet, welcher ohne schädlichen Fehler für M, welches gegeben ist, genommen werden kann.

Anm. Ich kann mich hier nicht auf die Untersuchung der Erscheinungen einlassen, welche bey der Vereinigung mehrerer Canäle eintreten werden. Solche Untersuchungen werden mit neuen Schwierigkeiten verwickelt, deren Erörterung, wenn ich sie genügend zu leisten vermöchte, für meinen gegenwärtigen Zweck zu weitläuftig wäre. Um indessen diesen Gegenstand nicht ganz unberührt zu lassen, füge ich noch die folgende Aufgabe bey, wobey ich aber eine solche Einmündung des Nebencanals in den Hauptcanal voraussetze, bey welchem keine bedeutende Stöhrung in der Bewegung erfolgt, also blos die zunehmende Quantität der Abflufsmenge und der Erfolg dieser Zunahme in Betrachtung kommt.

§. 46.

§. 46.

Aufg. *Es sey $\alpha\gamma\delta\eta$ (Fig. 12) ein Canal mit freyem Laufe, so dafs alle Abmessungen dabey ohne Hindernifs genommen werden können, und daher auch M als bekannt angesehen werden kann.*

Wird nun in der Gegend $q\,t\,r\,\omega$ dem Canale ein neuer Zuflufs seitwärts beygeführt, so mufs die vorige Wassertiefe $q\,s$ nothwendig zunehmen; es wird aus ihr z. B. die $q\,t$, und der Wasserspiegel $s\,\eta$ erhebt sich bis in $t\,v$; dann mufs sich aber der Wasserspiegel auch noch zur Rechten von $q\,t$ bis zu einer gewissen Gränze z. B. bis in n erheben.

Wenn nun die Länge $s\,\eta = \lambda'$, und der neue Zuflufs für jede Sec. $= M'$, ingleichem b und ε gegeben sind; wie läfst sich die Lage des neuen Wasserspiegels $n\,t\,v$ bestimmen?

Aufl. 1. Man berechne die Wassertiefen $\alpha\,v$ und $q\,t$, wie bisher, aus den hierzu gehörigen Bestimmungsstücken, so dafs jetzt

$$M + M' \text{ statt } M$$
$$\lambda' \text{ statt } \lambda$$
$$q\,x \text{ oder } \frac{\lambda'}{\lambda}.\,\varepsilon \text{ statt } \varepsilon$$

gesetzt wird.

2. Wenn die Wassertiefen $\alpha\eta$ und $\delta\gamma$ nicht wirklich gemessen und hiernach angegeben sind, so berechne man sie aus λ, b, ε und M.

3. Nunmehr hat man auch

$$q\,s = \alpha\eta + \frac{\lambda'}{\lambda}.\,(\gamma\delta - \alpha\eta).$$

4. Jetzt bringe man die Frage auf die Aufgabe §. 35; man nehme nämlich irgend eine Wassertiefe, wie $k\,f$ etwas gröfser als

 q t

qt an, und suche nach §. 35 die Entfernung tk, wo die Wassertiefe = kf wird. Bey dieser letztern Anwendung ist $\lambda' = tk$, welches man nach §. 35 findet.

5. Verlängert man die tk, bis sie die $\eta\delta$ schneidet, so erhält man die tn, also die veränderte Lage des ganzen Wasserspiegels vtn.

6. Die Stelle n kann weit hinaus und selbst zur Rechten von δ fallen; in diesem Falle würde also die Anschwellung auch noch am Anfange des Canals bemerkbar seyn.

§. 47.

Ex. Der Canal $\delta\eta$ ist 6000 Fuſs lang; das Gefäll des Bodens $\beta\gamma$ = 3 Fuſs; seine Breite = 10 Fuſs; die in jeder Sec. abflieſsende Wassermenge = 80 Cub. Fuſs. Jetzt soll in der Gegend qs, 1000 Fuſs weit vom Ende $\alpha\eta$ noch Wasser von der Seite beygeführt werden; dieser Zufluſs soll 40 C. F. für jede Sec. betragen; man soll die Lage des neuen Wasserspiegels vtn bestimmen.

Hier ist $s\eta = \lambda' = 1000$; $b = 10$; $\varepsilon' = \frac{\lambda'}{\lambda} . \varepsilon = \frac{1}{6} . 3 = \frac{1}{2}$; und statt M hat man hier $M + M' = 80 + 40 = 120$. Dieses giebt (§. 42)

$$\left(\sqrt{\left[0{,}0049 + \left(\tfrac{1}{2} + h - H\right) . \frac{10{,}14 . H}{H + h} .\right.}\right.$$

$$\left.\left(1 - \frac{10 . \left(\ln.(b + 2h) - \ln.(b + 2H)\right)}{2 . (h - H)}\right) - 0{,}07\right) . h$$

$$= \frac{M + M'}{31{,}87} = 3{,}765.$$

Ich finde nun, wenn ich die Gröſse zur Linken E nenne,

I.

I. Für h = 4 und H = 3;

$\frac{1}{2} + h - H = 1,5$; $\ln. (b + 2\,H) = 2,8903717$

$\frac{10,14 . H}{H + h} = 4,345$; $\ln. (b + 2\,H) = 2,7725887$

$2 . (h - H) = 2$. $\text{Diff.} = 0,0689929$

$\times\, 10$

$= 0,689929$;

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0,0049 + 6,517 . \left(1 - \frac{1,17783}{2}\right)\right)} - 0,07\right) . 4$$

$$= 6,55 \ldots$$

Man sieht, dafs h merklich < 4 seyn mufs. Doch mufs $\frac{1}{2} + h - H$ allemal eine bejahte Zahl bleiben.

II. Für h = 2,5 und H = 2

$\frac{1}{2} + h - H = 1$ $\ln. (b + 2\,h) = 2,7080502$

$\frac{10,14 . H}{H + h} = 4,5066$ $\ln. (b + 2\,H) = 2,6390573$

$2 . (h - H) = 1$ $\text{Diff.} = 0,0689929$

$\times\, 10$

$= 0,689929$;

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0,0049 + 4,5066 . \left(1 - \frac{0,689929}{1}\right)\right)} - 0,07\right) . 2,5$$

$$= 2,785.$$

Wenn nun gleich ein anderer Werth von H den von E gröfser geben könnte, so dafs er der Zahl 3,765 näher käme, so wird er doch immer noch zu klein bleiben, und es läfst sich übersehen, dafs h jetzt etwas zu klein ist. Ich finde nun ferner

III. Für $h = 2{,}7$ und $H = 2$

$\frac{1}{2} + h - H = 1{,}2$ $\qquad$ $\ln.(b + 2h) = 5{,}0369526 - \ln.10$

$\frac{10{,}14.\,H}{H + h} = 4{,}3149$ $\qquad$ $\ln.(b + 2H) = 4{,}9416424 - \ln.10$

$2.(h - H) = 1{,}4$ $\qquad$ $\text{Diff.} = 0{,}0953102$

$\times 10$

$= 0{,}953102$;

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}2.\,4{,}3149.\left(1 - \frac{0{,}953102}{1{,}4}\right)\right)} - 0{,}07\right).\,2{,}7$$

$= 3{,}2872.$

Weil dieser Werth von E schon ziemlich nahe an den erfoderlichen 3,765 gränzt, so wollen wir, bevor wir mit einem neuen Werth von h Proberechnungen anstellen, denjenigen Werth von H suchen, welcher für dasselbe h den Werth von $E^{(m)}$ giebt.

IV. Für $h = 2{,}7$ und $H = 1{,}8$

$\frac{1}{2} + h - H = 1{,}4$ $\qquad$ $\ln.(b + 2h) = 5{,}0369526 - \ln.10$

$\frac{10{,}14.\,H}{H + h} = 4{,}056$ $\qquad$ $\ln.(b + 2H) = 4{,}9126549 - \ln.10$

$2.(h - H) = 1{,}8$ $\qquad$ $\text{Diff.} = 0{,}1242977$

$\times 10$

$= 1{,}242977$;

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}4.\,4{,}056.\left(1 - \frac{1{,}242977}{1{,}8}\right)\right)} - 0{,}07\right).\,2{,}7$$

$= 3{,}3947.$

V. Für $h = 2{,}7$ und $H = 1{,}6$

$\frac{1}{2} + h - H = 1{,}6$ $\qquad$ $\ln.(b + 2h) = 5{,}0369526 - \ln.10$

$\frac{10{,}14.\,H}{H + h} = 3{,}773$ $\qquad$ $\ln.(b + 2H) = 4{,}8828019 - \ln.10$

$2.(h - H) = 2{,}2$ $\qquad$ $\text{Diff.} = 0{,}1541507$

$\times 10$

$= 1{,}541507$;

also

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}6.\ 3{,}773.\ \left(1 - \frac{1{,}541507}{2{,}2}\right)\right)} - 0{,}07\right).\ 2{,}7$$

$$= 3{,}6342.$$

VI. Für $h = 2{,}7$ und $H = 1{,}5$

$\frac{1}{2} + h - H = 1{,}7$

$\frac{10{,}14.\ H}{H + h} = 3{,}6214$

$2.\ (h - H) = 2{,}4$

$$\begin{aligned} \text{ln.}\ (b + 2\ h) &= 5{,}0369526 - \text{ln.}\ 10 \\ \text{ln.}\ (b + 2\ H) &= 4{,}8675344 - \text{ln.}\ 10 \\ \hline \text{Diff.} &= 0{,}1694182 \\ & \quad \times 10 \\ \hline &= 1{,}694182\ ; \end{aligned}$$

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}7.\ 3{,}6214.\ \left(1 - \frac{1{,}694182}{2{,}4}\right)\right)} - 0{,}07\right).\ 2{,}7$$

$$= 3{,}448.$$

Aus no. IV, V und VI ersieht man, dafs für $h = 2{,}7$ die Zahl 3,6342 ohne merklichen Fehler für $E^{(m)}$ genommen werden kann. Da nun $E^{(m)} = 3{,}765$ werden soll, so folgt, dafs der Werth von h noch um sehr wenig vergröfsert werden mufs, und dafs H nicht merklich von 1,6 abweicht. Ich finde nun

VII. Für $h = 2{,}76$ und $H = 1{,}6$

$\frac{1}{2} + h - H = 1{,}66$

$\frac{10{,}14.\ H}{H + h} = 3{,}7211$

$2.\ (h - H) = 2{,}32$

$$\begin{aligned} \text{ln.}\ (b + 2\ h) &= 7{,}3395379 - \text{ln.}\ 100 \\ \text{ln.}\ (b + 2\ H) &= 7{,}1853870 - \text{ln.}\ 100 \\ \hline \text{Diff.} &= 0{,}1541509 \\ & \quad \times 10 \\ \hline &= 1{,}541509\ ; \end{aligned}$$

also

$$E = \left(\sqrt{\left(0{,}0049 + 1{,}66.\ 3{,}7211.\ \left(1 - \frac{1{,}541509}{2{,}32}\right)\right)} - 0{,}07\right).\ 2{,}76$$

$$= 3{,}785.$$

Man

Man hat daher sehr genau

$$h = qt = 2{,}76 \text{ F.} \qquad H = \alpha v = 1{,}6 \text{ F.}$$

Jetzt nehme man zur Rechten von qt eine Wassertiefe, für das aufgeschwellte Wasser an, die etwas gröfser als qt, z. B. = 2,9 Fufs sey, die ich hier (Fig. 12) durch kf andeute, und berechne die Entfernung tk = λ' aus §. 42, wo man λ' statt λ schreibt. Für diese Anwendung der Gleichung §. 42 hat man überdas

$$H' = qt = 2{,}76 \text{ statt } H$$

$$h' = kf = 2{,}9 \text{ statt } h$$

$$\varepsilon' = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \varepsilon = 0{,}0005 \cdot \lambda' \text{ statt } \varepsilon$$

$$\lambda' \text{ statt } \lambda$$

zu substituiren. Diese Substitution giebt

$$\frac{\left(\frac{M}{3{,}187 \cdot b \cdot h'} + 0{,}07\right)^2 - 0{,}0049}{1014 \cdot \frac{b H'}{H' + h'} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot \left(\ln.(b+2h') - \ln.(b+2H')\right)}{2 \cdot (h' - H')}\right)} = \frac{0{,}0005 \cdot \lambda' + h' - H'}{\lambda'};$$

also

$$\lambda' = \frac{h' - H'}{\left(\frac{\left(\frac{M}{3{,}187 \cdot b \cdot h'} + 0{,}07\right)^2 - 0{,}0049}{1014 \cdot \frac{b H'}{H' + h'} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot \left(\ln (b+2h') - \ln.(b+2H')\right)}{2 \cdot (h' - H')}\right)} - 0{,}0005\right)}.$$

Die wirkliche Berechnung giebt nun

$$b \cdot h' = 10 \cdot 2{,}9 = 29$$

$$3{,}187 \cdot b h' = 92{,}423$$

$$\frac{M}{3{,}187 \cdot b h'} = \frac{80}{92{,}423} = 0{,}8656$$

$$\text{add. } 0{,}07$$

$$= 0{,}9356$$

(M

$$\left(\frac{M}{3{,}187 \cdot bh'} + 0{,}07\right)^2 = 0{,}9356^2 = 0{,}8753$$

$$\text{subtr. } 0{,}0049$$

$$= 0{,}8704$$

$$\frac{bH'}{H' + h'} = \frac{10 \cdot 2{,}76}{5{,}66} = 4{,}8763$$

$$\times \quad 1014$$

$$1014 \cdot \frac{bH'}{H' + h'} = 4944$$

$$\text{ln. } (b + 2h') = \text{ln. } 15{,}80 = 7{,}365180 - \text{ln. } 100$$

$$\text{ln. } (b + 2H') = \text{ln. } 15{,}52 = 7{,}347299 - \text{ln. } 100$$

$$\text{Diff.} = 0{,}017881$$

$$\times \quad 10$$

$$= 0{,}17881$$

$$2 \cdot (h' - H') = 0{,}28$$

$$1 - \frac{b \cdot \left(\text{ln. } (b + 2h') - \text{ln. } (b + 2H')\right)}{2 \cdot (h' - H')} = 1 - \frac{0{,}17881}{0{,}28};$$

$$= 0{,}3614$$

also

$$\lambda' = \frac{0{,}14}{\dfrac{0{,}8704}{4944 \cdot 0{,}3614} - 0{,}0005} = -\frac{0{,}14}{0{,}000487}$$

$$= -287 \text{ F.}$$

Hier fällt also die kf nicht zur Rechten, sondern 287 Fuſs weit von tq zur Linken von t, z. B. in my. In dieser Entfernung von t fälle man also die lothrechte my, und nehme sie = 2,9 Fuſs, und ziehe die gerade mtn, bis sie den Wasserspiegel δη schneidet; so giebt sich die Stelle n, bis zu welcher sich die Aufschwellung verbreitet.

Auch ohne Construction giebt sich die Stelle n nunmehr leicht durch bloſse Rechnung.

Es ist nämlich

$$tn = \frac{ts}{mu - ts} \cdot mt$$

$$mu = my - uy = my - \left(\alpha\gamma + \frac{\gamma u}{\lambda} \cdot \varepsilon\right)$$

$$ts = tq - qs = tq - \left(\alpha\gamma + \frac{\gamma s}{\lambda} \cdot \varepsilon\right),$$

woraus sich also tn berechnen läſst.

Im jetzigen Falle ist $my = 2{,}9$; $\gamma s = 1000$; $\lambda = 6000$ und $\varepsilon = 3$. Die Wasserhöhe $\alpha\gamma$ ist durch wirkliche Messung gegeben oder gleichfalls berechnet. Wäre z. B. $\alpha\gamma = 1{,}2$ F., so hätte man

$$mu = 2{,}9 - \left(1{,}2 + \frac{1000 - 287}{6000} \cdot 3\right) = 1{,}4435$$

$$ts = 2{,}76 - \left(1{,}2 + \frac{1000}{6000} \cdot 3\right) = 1{,}06;$$

also

$$tn = \frac{1{,}06}{0{,}3835} \cdot 287 = 793 \text{ Fuſs.}$$

und

$$\gamma n = 1793 \text{ F.}$$

Anm. Indem das Seitenwasser in der Breite ωq (Fig. 12) beyflieſst, ist die im Querschnitte durch tq flieſsende Wassermenge nur noch $= 80$ C. F. für jede Secunde. In jedem folgenden Querschnitte zur Linken von tq flieſst desto mehr Wasser durch, je näher derselbe an ωr liegt. Erst vom Querschnitte ωr an flieſst längs $\omega\alpha$ die gesammte Wassermenge $80 + 40$ durch jeden folgenden Querschnitt. Es dient also zur Sicherheit des Resultats, daſs ich schon für den Querschnitt tq die Durchfluſsmenge $= M + M'$ genommen habe. Es wird nämlich um so weniger die Aufschwellung über die gefundene Stelle n hinaus-

hinausgehen. Dürfte man auf genaue Resultate rechnen, so würde man das gefundene Resultat noch dadurch genauer erhalten, daſs man die Gränze der Aufschwellung noch auf die Hälfte von ωq zur Linken von n nähme; z. B. 4 Fuſs zur Linken von n, wenn $\omega q = 8$ Fuſs wäre.

Zweyte Methode

zur Verallgemeinerung der Formel $M = 91 . \sqrt{\frac{\zeta . b^3 h^3}{\lambda . (b + 2h)}}$ (§. 2. I.*).

Für horizontale Canäle.

§. 48.

Ich habe schon vormals (Handb. der mechan. Wissensch. Erlangen 1802) für horizontale Canäle die Differentialformel

$$\frac{M^2}{91^2} = - \frac{b^3 y^3}{b + 2y} . \frac{dy}{dx}$$

mitgetheilt, um hiermit der chezyschen Grundformel eine Form zu geben, unter der sie auch auf Canäle mit horizontalem Boden anwendbar ist. Es ist nämlich oben schon bemerkt worden, daſs die von anderen Hydraulikern angegebenen Formeln, und so auch die chezysche, nur auf geneigte Canäle oder *auf Canäle mit geneigtern Boden* anwendbar sind, und zwar nur für solche Neigungen des Bodens, bey welchen die Neigung der Wasserfläche eine dem Boden parallele Lage annimmt, wenigstens eine solche, die in der Ausübung dafür gelten kann. Bey solchen ist $\frac{\zeta}{\lambda}$ eine unveränderliche Gröſse, die nämlich in allen Querschnitten immer denselben Werth hat. Bey horizontalen Canälen fällt aber gleich ins Auge, daſs diese Unveränderlichkeit mit der chezyschen Formel gar nicht bestehen kann (und überhaupt mit keiner Formel, welche eine

 paral-

parallele Lage der Wasserfläche mit dem Boden voraussetzt, wie ich erst weiter unten noch bemerken werde), weil bey solchen die Wasserfläche horizontal seyn müſste, wenn sie dem Boden parallel wäre; folglich $\frac{\zeta}{\lambda} = 0$ würde; also gar kein Abfluſs in Canälen mit horizontalem Boden erfolgen könnte. Da nur bey einem geneigten Wasserspiegel Abfluſs erfolgen kann, und ein solcher Abfluſs auch in Canälen mit horizontalem Boden erfolgt, so muſs auch in solchen Canälen die Wasserfläche eine Neigung und $\frac{\zeta}{\lambda}$ in jedem Querschnitte einen bestimmten Werth haben, damit der überschriebene Werth von M nicht $= 0$ werde.

Soll überdas der einfache Ausdruck

$$91.\ \sqrt{\left(\frac{\zeta}{\lambda} \cdot \frac{b^3\, h^3}{b + 2\, h}\right)} = M \quad (\natural$$

immer denselben Werth für M geben, man mag zur Bestimmung von b und h, welchen Querschnitt man will, wählen, so muſs nothwendig $\frac{\zeta}{\lambda}$ eine veränderliche Gröſse seyn, weil bey einem geneigten, dem Boden sich nähernden Spiegel der Quotient $\frac{b^3\, h^3}{b + 2\, h}$ bey einem gleich breiten Canal, wie wir ihn hier voraussetzen, nothwendig veränderlich seyn muſs, und das Product aus einer unveränderlichen Gröſse in eine veränderliche nicht die unveränderliche M geben könnte. Für jeden Querschnitt hat also $\frac{\zeta}{\lambda}$ einen eigenen Werth, der allgemein, der *Gröſse* nach, durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedruckt werden muſs; aber zugleich in Rücksicht auf die einander entgegengesetzten Aenderungen von x und y (wo man sich unter x jede vom Anfange des Canals aus genommene Abscisse, und unter y die zu dieser Abscisse gehörige Wasserhöhe im Canale zu denken hat)

durch

durch $-\frac{dy}{dx}$. Und dieser Quotient mufs so beschaffen seyn, dafs allemal

$$\mathfrak{A}^2 . \left(-\frac{b^3 y^3}{b+2y} . \frac{dy}{dx}\right) = M^2$$

werde, oder

$$\frac{M^2}{\mathfrak{A}^2} = -\frac{b^3 y^3}{b+2y} . \frac{dy}{dx} \quad (☿$$

Diese Differentialgleichung nähert sich also in so fern der Wahrheit, als der Satz, dafs die Gleichung (♄) immer der Wahrheit nahe genug komme, wo man auch y im Canale nehmen mag, angenommen werden kann. Dieser Satz kann aber darum gelten, weil die Gleichung (♄) bey geneigten oder abhängigen Canälen, in welchen die Tiefe unveränderlich ist, allemal seine Anwendbarkeit (wenn auch nicht genau, doch zu genügenden Bestimmungen) behält, was auch $\frac{\zeta}{\lambda}$ für einen Werth haben mag. Eben hieraus folgt nun eine zweyte Methode, das Verhalten der hierher gehörigen mannigfaltigen Bestimmungsstücke gegen einander so zu bestimmen, dafs sich die Resultate wenigstens auf eine für die Ausübung genügende Weise der Wahrheit nähern.

Wäre die chezysche Formel (♄) bey gleich tiefen Canälen in völliger Schärfe richtig, wie auch der Quotient $\frac{\zeta}{\lambda}$ beschaffen seyn möchte, so gäbe die Gleichung (☿) die Gestalt der Wasserfläche gleichfalls in völliger Schärfe. Da aber ♄ nur als Näherungsformel gelten kann, so ist auch die ☿ nur nähernd. Ebendarum müssen aber die hieraus sich ergebenden Resultate auch mit den aus der vorigen Methode abgeleiteten nahe zusammenfallen. Und dieses Nahezusammenfallen mufs für die Brauchbarkeit beyder Methoden sprechen.

§. 49.

§. 49.

Es kommt nun zunächst auf die Integrirung der allgemeinen Gleichung (☿) an, die sehr einfach ist. Man setze $b + 2y = z$, also $y = \frac{z - b}{2}$, und $dy = \frac{1}{2} dz$; so wird

$$\left(\frac{M}{91}\right)^2 . x = - \int \frac{b^3 z^3 - 3 b^4 z^2 + 3 b^5 z - b^6}{16. z} . dz$$

$$= \frac{- \frac{1}{3} b^3 z^3 + \frac{3}{2} b^4 z^2 - 3 b^5 z + b^6 . \ln . z}{16} + C.$$

Für $x = o$ wird $y = h$, also $z = b + 2h$; daher

$$\left(\frac{M}{91}\right)^2 . x = - \frac{b^3}{16} . \Big(\frac{(b+2y)^3 - (b+2h)^3}{3} - \frac{3b}{2} . \big((b+2y)^2 - (b+2h)^2\big)$$

$$+ 3b^2 . \big((b+2y) - (b+2h)\big) - b^3 . \big(\ln . (b+2y) - \ln . (b+2h)\big)\Big),$$

und, für $x = \lambda$, also für $y = H$

$$\left(\frac{M}{91}\right)^2 . \lambda = - \frac{b^3}{16} . \Big(\frac{(b+2H)^3 - (b+2h)^3}{3} - \frac{3b}{2} . \big((b+2H)^2 - (b+2h)^2\big)$$

$$+ 3b^2 . \big((b+2H) - (b+2h)\big) - b^3 . \big(\ln . (b+2H) - \ln . (b+2h)\big)\Big),$$

oder

$$\frac{16 . \lambda}{b^3} . \frac{M^2}{91^2} = \frac{(b+2h)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} . \big((b+2h)^2 - (b+2H)^2\big)$$

$$+ 6 . b^2 . (h - H) - b^3 . \big(\ln . (b+2h) - \ln . (b+2H)\big),$$

woraus die Auflösungen aller hierher gehörigen Aufgaben abgeleitet werden müssen.

§. 50.

Bey einem wirklich angelegten Canale könnte nur die einzige Frage von Nutzen seyn:

Aufg. Man hat irgendwo im Canale die Wassertiefe $= H$ gefunden; in der Entfernung λ aufwärts findet man sie $= h$; die

Breite ist durchaus $= b$; man soll M finden. Die allgemeine Formel (§. 49) giebt

$$M = \frac{91.\,b}{4}.\sqrt{\frac{b}{\lambda}}.\Big[\frac{(b+2h)^3-(b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2}.\big((b+2h)^2-(b+2H)^2\big)$$
$$+ 6.\,b^2.\,(h-H) - b^3.\big(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\big)\Big].$$

§. 51.

Zur Prüfung des vorstehenden Calculs dient folgendes:

Die Grundformel $M = 91.\sqrt{\frac{\zeta}{\lambda}.\frac{b^3\,h^3}{b+2h}}$ ist auf keine besondern Umstände beschränkt, nicht auf die Voraussetzung des freyen Laufs über den horizontalen Boden; es können auch unterhalb der Stelle, wo man H nimmt, Hindernisse der Bewegung eintreten, die dem freyen Laufe entgegen sind. Wenn also die in der letzten Gleichung in [ ] eingeschlossene Grösse mit Σ bezeichnet wird, so müfste allgemein

$$M = 91.\sqrt{\frac{b^3}{\lambda}.\frac{\Sigma}{16}}$$

seyn.

Vergleicht man dieses mit der Gleichung

$$M = 91.\sqrt{\frac{\zeta}{\lambda}.\frac{b^3\,h^3}{b+2h}},$$

so müfste in solchen Fällen, wo h nicht merklich von H verschieden wäre, welches in Fällen wie Fig. 13 gar wohl Statt finden könnte,

$$\frac{\zeta\,h^3}{b+2h} = \frac{\Sigma}{16}$$

werden, oder, $h - H$ statt ζ geschrieben,

$$\Sigma = 16.\,(h-H).\,\frac{h^3}{b+2h},$$

wie

wie man auch findet. Differentiirt man nämlich den Werth von Σ, so findet man

$$\left(2.\ (b+2h)^2 - 6.b.\ (b+2h) + 6.b^2 + \frac{2b^3}{b+2h}\right).\ dh.$$

Wenn also $h - H = dh$ wäre, so müfste

$$\left(2.\ (b+2h)^2 - 6.b.\ (b+2h) + 6.b^2 + \frac{2b^3}{b+2h}\right).\ (h-H)$$

$$= 16.\ \frac{h^3}{b+2h}.\ (h-H)$$

werden, oder

$$2.\ (b+2h)^2 - 6.b.\ (b+2h) + 6.b^2 - \frac{2b^3}{b+2h} = \frac{16.h^3}{b+2h},$$

oder auch

$$(b+2h)^3 - 3b.\ (b+2h)^2 + 3b^2.\ (b+2h) - b^3 = 8.h^3.$$

Es ist aber die Gröfse zur Linken

$$= \left\{\begin{array}{l} \quad b^3 + 6b^2h + 12b.h^2 + 8h^3 \\ - 3b^3 - 12b^2h - 12bh^2 \\ + 3b^3 + 6b^2h \\ - b^3 \end{array}\right\} = 8.h^3;$$

also hiermit die Richtigkeit des Calculs bestätigt.

§. 52.

Aus den oben vorgetragenen Lehren weifs man schon hinlänglich, dafs die Anwendung der allgemeinen Formel auf erst noch anzulegende Canäle von der auf schon angelegte verschieden ist. In dieser Voraussetzung theile ich nun hier die folgenden Berechnungen mit, ohne solche Bemerkungen, die ich schon bey der ersten Methode beygebracht habe, hier noch einmal zu wiederholen.

§. 53.

Aufg. *Es ist die Länge des ganzen Canals* $= \lambda$, *seine Breite* $= b$, *und seine Wassertiefe am Anfange* $= h$ *vorgeschrieben;*

*ben; man soll die Wassertiefe H am Ende des Canals nebst der in jeder Sec. abfließenden Wassermenge M finden; freyen Lauf des Wassers vorausgesetzt *).*

Aufl. Der ganze Ausdruck zur Rechten in der Gleichung (am Ende §. 49) heiſse Σ, so muſs man denjenigen Werth von H suchen, welcher das Maximum von Σ oder, nach meiner Bezeichnung, $\Sigma^{(m)}$ giebt. Alsdann hat man

$$\frac{16.\ \lambda.\ M^2}{8281.\ b^3} = \Sigma^{(m)};$$

also

$$M = \frac{91.\ b}{4} \cdot \sqrt{\frac{b.\ \Sigma^{(m)}}{\lambda}}.$$

Ex. Es sey $\lambda = 1000$ Fuſs; $h = 3$; $b = 10$; so wird

I. Für $H = 1{,}4$ F.

$$b + 2h = 16 \qquad b + 2H = 12{,}8$$
$$(b + 2h)^2 = 256 \qquad (b + 2H)^2 = 163{,}84$$
$$(b + 2h)^3 = 4096 \qquad (b + 2H)^3 = 2097{,}15$$
$$(b+2h)^3 - (b+2H)^3 = 1998{,}8 \qquad \ln.(b + 2h) = 5{,}0751738 - \ln.\ 10$$
$$(b+2h)^2 - (b+2H)^2 = 92{,}16 \qquad \ln.(b + 2H) = 4{,}8520302 - \ln.\ 10$$
$$h - H = 1{,}6 \qquad \text{Diff.} = 0{,}2231436$$
$$6\ b^2 = 600 \qquad \times 1000$$
$$= 223{,}1436;$$

also

*) λ könnte auch nur ein Theil von der Länge des ganzen Canals seyn, so daſs h und H überhaupt zwey Wassertiefen im Canale bezeichneten, die auf die Länge λ von einander entfernt wären, wobey aber allemal h die obere und H die untere, d. h. vom Anfange weiter entfernte Wassertiefe bezeichnet.

also

$$\Sigma = 666,3 - 1382,4 + 960 - 223,14$$
$$= 20,8$$

und

$$M = \frac{91.10}{4} \cdot \sqrt{\frac{208}{1000}} = 103,7 \text{ Cub. F.}$$

II. Für $H = 1,3$

$$b + 2h = 16$$
$$(b + 2h)^2 = 256$$
$$(b + 2h)^3 = 4096$$
$$(b+2h)^3 - (b+2H)^3 = 2095,7$$
$$(b+2h)^2 - (b+2H)^2 = 97,2$$
$$h - H = 1,7$$

$$b + 2H = 12,6$$
$$(b + 2H)^2 = 158,76$$
$$(b + 2H)^3 = 2000,3$$
$$\ln.(b + 2h) = 5,0751738 - \ln.10$$
$$\ln.(b + 2H) = 4,8362819 - \ln.10$$
$$\text{Diff.} = 0,2388919$$
$$\times\ 1000$$
$$= 238,8919;$$

also

$$\Sigma = 698,6 - 1458 + 1020 - 238,89$$
$$= 21,7$$

und

$$M = \frac{91.10}{4} \cdot \sqrt{\frac{217}{1000}} = 105,96.$$

III. Für $H = 1,2$

$$b + 2H = 12,4$$
$$(b + 2H)^2 = 153,76$$
$$(b + 2H)^3 = 1906,6$$
$$(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 2189,4$$
$$(b + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 102,2$$
$$h - H = 1,8$$

$$\ln.(b + 2h) = 5,0751738 - \ln.10$$
$$\ln.(b + 2H) = 4,8202815 - \ln.10$$
$$\text{Diff.} = 0,2548923$$
$$\times\ 1000$$
$$= 254,8923;$$

also

$$\Sigma = 729,8 - 1533 + 1080 - 254,89 = 21,9$$

und

und

$$M = \frac{91.10}{4} \cdot \sqrt{\frac{219}{1000}} = 106{,}47 \text{ Cub. F.}$$

Das nahe Beysammenliegen der beyden Werthe von M (II und III) giebt zu erkennen, daſs wir ohne merklichen Fehler

$$H = 1{,}2 \text{ Fuſs und } M = 107 \text{ Cub. F.}$$

beybehalten können. So hat man nämlich $H^{(k)}$ und $M^{(m)}$.

Die Uebereinstimmung mit dem Resultate der Iten Methode ist in der That überraschend. Dieselben Data gaben nämlich oben (§. 11) gleichfalls $M^{(m)} = 107$ C. F. Der zugehörige Werth von $H^{(k)}$ war oben um 0,2 Fuſs gröſser als hier. Es ist leicht einzusehen, daſs bey gedachter Zusammenstimmung der Werthe von $M^{(m)}$ nicht auch zugleich die von $H^{(k)}$ so nahe zusammenfallen können, weil oben die Hypothese der schiefen Ebene für die Form der Wasserfläche zum Grunde gelegt wurde.

§. 54.

Nunmehr läſst sich auch das ganze Längenprofil für die flieſsende Wassermasse im Canale leicht verzeichnen. Man ziehe nämlich nach einem willkührlichen Maaſsstabe eine gerade Linie $= \lambda$, errichte nach einem etwa 10mal so groſsen Maaſsstabe am Anfange derselben ein Perpendikel $= h$, und am Ende ein Perpend. $= H$.

Nunmehr berechne man für Höhen H', H'', H''' etc., die zwischen H und h fallen, z. B. im vor. Ex. für $H' = 1{,}3$; $H'' = 1{,}4$; $H''' = 1{,}5$ etc., die zugehörigen Werthe von Σ', Σ'', Σ''' etc. Dann erhält man für die zugehörigen Entfernungen jener Höhen vom Anfange des Canals, wenn solche mit λ', λ'', λ''' etc. bezeichnet werden,

$$\lambda' = \frac{91^2.\ b^3.\ \Sigma'}{16.\ M^2}$$

$$\lambda'' = \frac{91^2.\ b^3.\ \Sigma''}{16.\ M^2}$$

etc.

In diesen Entfernungen darf man also jetzt nur jene Perpendikel H', H'', H''' etc. errichten, und die oberen Endpunkte derselben durch Linien so unter einander verbinden, daſs das Auge keine Ecken bemerkt.

§. 55.

Aufg. *Es sind H, h, λ und b vorgeschrieben, ohne freyen Lauf zu bedingen; man soll M finden.*

Aufl. Man berechne den Werth von Σ, d. h. von der ganzen Gröſse zur Rechten in der allgemeinen Gleichung (§. 49. am Ende), so erhält man hiernächst

$$M = \frac{91 . b}{4} \cdot \sqrt{\frac{b \Sigma}{\lambda}}.$$

Um aber beurtheilen zu können, ob H nicht kleiner angenommen worden, als die Natur der Sache gestattet, nämlich nicht $< H^{(k)}$, berechne man Σ auch noch für einen Werth von H, welcher kleiner als der vorgeschriebene ist. Findet man diesen Werth von Σ gröſser als den vorigen, so ist der vorgeschriebene Werth von H gestattet.

Ex. Es sey $\lambda = 1000$; $b = 10$; $h = 3$; dabey soll das Wasser am Ende des Canals noch 2 Fuſs hoch stehen; es wird M gesucht, wofern die Voraussetzung $H = 2$ Statt findet.

Hier wird

$$b + 2\,h = 16 \qquad b + 2\,H = 14$$

$$(b + 2\,h)^2 = 256 \qquad (b + 2\,H)^2 = 196$$

$$(b + 2\,h)^3 = 4096 \qquad (b + 2\,H)^3 = 2744$$

$$(b + 2\,h)^3 - (b + 2H)^3 = 1352 \qquad \ln. 16 - \ln. 14 = 0{,}1335314$$

$$(b + 2\,h)^2 - (b + 2H)^2 = 60 \qquad \times\ 1000$$

$$h - H = 1 \qquad = 133{,}5314;$$

also

also

$$\Sigma = 450{,}66 - 900 + 600 - 133{,}53$$
$$= 17{,}13$$

und

$$M = \frac{91.10}{4} \cdot \sqrt{\frac{171{,}3}{1000}} = 94{,}66.$$

Daſs der angenommene Werth von H Statt hat, weiſs man schon aus dem vorigen §.

Die Vergleichung mit dem Resultate der ersten Methode (§. 12) zeigt wieder eine nahe Zusammenstimmung; dort fand man aus denselben Bestimmungsstücken den Werth von M um $\frac{1}{20}$ gröſser als hier.

Berechnungen

zur zweyten Methode für Canäle mit abhängigem Boden.

Erster Weg.

§. 56.

Die Differentialgleichung (§. 48) läſst sich noch allgemeiner, nämlich auch für Canäle mit abhängigem Boden, abfassen, wenn man

$$-\frac{d\left(y + \frac{\lambda - x}{\lambda} \cdot \varepsilon\right)}{d\,x} \text{ statt } \frac{\zeta}{\lambda}$$

setzt. Dieses giebt

$$\frac{M^2}{91^2} = \frac{b^3\,y^3\,.\,(\varepsilon\,d\,x - \lambda\,d\,y)}{\lambda.\,(b + 2\,y).\,d\,x},$$

woraus sich aber auf directem Wege nichts brauchbares ableiten läſst.

§. 57.

Ich habe hier zwey verschiedene Wege betreten, um die vorstehende verwickelte Differentialformel ohne genaue Integrirung doch zur Darstellung brauchbarer Resultate zu benützen. Sie giebt nämlich

$$\frac{M^2}{\mathfrak{A}^2} \cdot x = \frac{b^3}{\lambda}\left(\int \frac{\varepsilon y^3 \, dx}{b+2y} + \int \frac{\lambda y^3 \, dy}{b+2y}\right).$$

Das zweyte Integral in der Parenthese ist oben schon gefunden worden. Es ist also nur noch $\int \frac{\varepsilon y^3 \, dx}{b+2y}$ zu suchen.

Gedachtes zweytes Integral bezieht sich auf die Wassermenge, welche abfliessen würde, wenn $\varepsilon = 0$ wäre oder der Boden eine horizontale Lage hätte; das erste auf die Wassermenge, welche wegen des Abhanges des Bodens noch weiter abfliessen muss.

In Bezug auf diesen blos wegen des Gefälles ε abfliessenden Theils fiel ich nun auf den Gedanken, statt der veränderlichen Tiefe y die unveränderliche mittlere $\frac{h+H}{2}$ zu gebrauchen. Dieses giebt

$$\int \frac{\varepsilon y^3 \, dx}{b+2y} = \frac{\varepsilon . (h+H)^3}{8 . (b+h+H)} . x;$$

also, für $x = \lambda$, das Integral

$$\frac{\varepsilon . (h+H)^3 . \lambda}{8 . (b+h+H)};$$

folglich (§. 49)

$$\odot) \quad \frac{M^2}{\mathfrak{A}^2} . \lambda = \frac{b^3}{16} . \left(\begin{array}{l} \frac{2\varepsilon (h+H)^3}{b+h+H} + \frac{(b+2h)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{36}{2}\left((b+2h)^2 - (b+2H)^2\right) \\ + 6 . b^2 . (h-H) - b^3 . \left(\ln (b+2h) - \ln . (b+2H)\right) \end{array}\right).$$

§. 58.

§. 58.

Wird bey gehindertem Laufe $H = h$, so verschwinden alle nach dem ersten folgenden Glieder der Gleichung (⊙), und es wird schlechthin

$$\frac{M^2}{91^2} \cdot \lambda = \frac{b^3}{16} \cdot \frac{2\,\varepsilon \,.\, (2\,h)^3}{b + 2\,h} = b^3 \cdot \frac{\varepsilon\, h^3}{b + 2h},$$

also
$$M = 91 \,.\, \sqrt{\frac{\varepsilon \,.\, b^3\, h^3}{\lambda \,.\, (b + 2\,h)}},$$

welches die *chezysche*, für diesen Fall eintretende, Grundformel ist. Ueberhaupt geben die Glieder, welche nach dem ersten in der Parenthese folgen, zu erkennen, um wieviel das erste abgeändert werden mufs, wenn H nicht $= h$ ist, und die Gleichung kann nicht nur bis zu $H = h$ sondern auch für $H > h$ angewendet werden, weil der auf den horizontalen Boden sich beziehende Theil derselben für $H > h$ verneint wird, oder für einen horizontalen Boden die Voraussetzung $H > h$ eine entgegengesetzte Bewegung gäbe, welche den Abflufs vom Canale, der durch das erste Glied ausgedruckt wird, vermindert. Jemehr daher der Werth von H den von h überschreitet, desto mehr wird von dem ersten Gliede in der Parenthese abgezogen.

§. 59.

Aufg. *Es werden* h, b, λ *und* ε *vorgeschrieben; man soll nach der Formel* (⊙ (§. 57) H *und* M *für den freyen Lauf finden.*

Aufl. Wenn der ganze Ausdruck in der Parenthese zur Rechten $= A$ gesetzt wird, so mufs man denjenigen Werth von H suchen, welcher $A^{(m)}$ giebt; alsdann wird

$$M^{(m)} = \frac{91}{4} \cdot \sqrt{\frac{b^3\; A^{(m)}}{\lambda}}.$$

Ex. Es sey $\lambda = 1000$, $b = 10$, $h = 4$, $\varepsilon = 2$; man soll M und H finden. Hier wird nun

I. Für $H = 3,6$

$h + H = 7,6$

$(h + H)^3 = 439$

$b + 2h = 18$

$(b + 2h)^2 = 324$

$(b + 2h)^3 = 5832$

$6 . b^2 (h - H) = 240$

$b + 2H = 17,2$

$(b + 2H)^2 = 295,8.$

$(b + 2H)^3 = 5088$

$(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 744$

$(b + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 28,2$

$\ln. (b + 2h) = 5,1929568 - \ln. 10$

$\ln. (b + 2H) = 5,1474944 - \ln. 10$

$\text{Diff.} = 0,0454624$

$\times 1000$

$= 45,4624;$

also
$$A = \frac{4 \cdot 439}{17,6} + 248 - 423 + 240 - 45,46$$
$$= 587,77 - 468,46 = 119,31.$$

II. Für $H = 3,4$

$h + H = 7,4$

$(h + H)^3 = 405,22$

$b + 2h = 18$

$(b + 2h)^2 = 324$

$(b + 2h)^3 = 5.832$

$6 . b^2 . (h - H) = 360$

$b + 2H = 16,8$

$(b + 2H)^2 = 282,24$

$(b + 2H)^3 = 4741$

$(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 1091$

$(b + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 41,76$

$\ln. (b + 2h) = 5,1929568 - \ln. 10$

$\ln. (b + 2H) = 5,1239639 - \ln. 10$

$\text{Diff.} = 0,0689929$

$\times 1000$

$= 68,993;$

also
$$A = \frac{4 \cdot 405,22}{17,3} + 363,66 - 626,40 + 360 - 68,99$$
$$= 816,81 - 695,39 = 121,42.$$

III.

III. Für $H = 3,2$

$$h + H = 7,2$$
$$(h + H)^3 = 373,25$$
$$b + 2h = 18$$
$$(b + 2h)^2 = 324$$
$$(b + 2h)^3 = 5832$$
$$6 . b^2 (h - H) = 480$$
$$b + 2H = 16,4$$

$$(b + 2H)^2 = 268,96$$
$$(b + 2H)^3 = 4411$$
$$(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 1421$$
$$(b + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 55,04$$
$$\ln. (b + 2h) = 5,1929568 - \ln. 10$$
$$\ln. (b + 2H) = 5,0998664 - \ln. 10$$
$$\text{Diff.} = 0,0930904$$
$$\times 1000$$
$$= 93,09 ;$$

also
$$A = \frac{4 . 373,25}{17,2} + 473,66 - 825,60 + 480 - 93,09$$
$$= 1041,26 - 918,69 = 122,57.$$

Der sehr geringe Unterschied der beyden letzteren Werthe von A giebt zu erkennen, daſs man mit hinlänglicher Genauigkeit den Nro. III. für $A^{(m)}$ annehmen könne. Dieses giebt nun

$$M^{(m)} = \frac{91}{4} . \sqrt{122,57} = 251,86.$$

Man kann also

$$M = 252 \text{ Cub. F. und } H = 3,2$$

beybehalten.

Die Vergleichung mit dem Resultate der ersten Methode (§. 17) zeigt wieder eine sehr gute Zusammenstimmung. Dort gaben dieselben Data

$$M^{(m)} = 257 \text{ Cub. F. und } H = 3,6 \text{ F.},$$

wo M nur $\frac{1}{50}$ gröſser ist als nach der jetzigen Berechnung. Daſs die Werthe von H um einen gröſseren aliquoten Theil verschieden seyn können als die von M, begreift man aus dem obigen Vortrage.

§. 60.

Aufg. *Für einen anzulegenden Canal werden* h, H, λ, b *und* ε *vorgeschrieben; man soll entscheiden, ob die Forderung für* H *Statt finde, und für diesen Fall* M *angeben.*

Aufl. Man berechne den zugehörigen Werth von A nach (§. 57 ⊙) und dann noch einen Werth von A für einen Werth von H, welcher etwas kleiner ist als der vorgeschriebene. Giebt die letztere Berechnung einen grösseren Werth von A als die erstere, so findet der vorgeschriebene Werth Statt, und der zuerst gefundene Werth von A giebt nunmehr

$$M = \frac{91}{4} \cdot \sqrt{\frac{b^3 A}{\lambda}}.$$

Anm. Nimmt man $H > h$, so weiss man schon aus den oben vorgetragenen Lehren, dass H Statt finden muss.

Ex. Es soll ein 10 Fuss breiter Canal zu 1000 Fuss lang angelegt werden; das Wasser soll am Anfange desselben 2 Fuss, am Ende 3 Fuss tief stehen, und das absolute Gefäll des Bodens = 1, 5 F. seyn. Wieviel Wasser wird in jeder Secunde abfliessen?

Hier hat man $h = 2$, $H = 3$; also keinen freyen Abfluss; ferner $\varepsilon = 1,5$; $b = 10$ und $\lambda = 1000$; daher (§. 57 ⊙)

$h + H = 5$	$(b + 2H)^2 = 256$
$(h + H)^3 = 125$	$(b + 2H)^3 = 4096$
$b + 2h = 14$	$(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = -1352$
$(b + 2h)^2 = 196$	$(b + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = -60$
$(b + 2h)^3 = 2744$	ln. $(b + 2h) = 2,6390573$
$6 . b^2 . (h - H) = -600$	ln. $(b + 2H) = 2,7725887$
$b + 2H = 16$	Diff. $= -0,1335314$
	$\times 1000$
	$= -133,5314$;

also

also

$$A = \frac{375}{15} - 450{,}7 + 900 - 600 + 133{,}53$$
$$= 1058{,}53 - 1050{,}7 = 7{,}83,$$

und nun

$$M = \frac{91}{4} \cdot \sqrt{7{,}83} = 63{,}7 \text{ C. F.}$$

Dieselben Data hatte man oben (§. 18). Die dortige Methode giebt für jetziges Beyspiel

$$A = \frac{3.0{,}5}{5} \cdot \left(1 - \frac{10. (\ln. 14 - \ln. 16)}{-2}\right) = 0{,}1;$$

also

$$M = 91.20. \sqrt{\frac{1}{1000}} = 57{,}5 \text{ C. F.}$$

Dieser Werth kommt dem vorigen noch ziemlich nahe.

Weitere Anwendungen ergeben sich leicht aus der Menge oben vorgetragener Berechnungen.

Berechnungen

zur zweyten Methode für Canäle mit abhängigem Boden.

Zweyter Weg.

§. 61.

Wenn die längs der horizontalen $\beta\alpha$ (Fig. 2) durch $\beta\delta$ und $\varkappa\eta$ in 1 Sec. abfliesende Wassermenge $= N'$ gesetzt wird, und die längs $\gamma\alpha$ durch $\delta\gamma$ und $\alpha\eta$ abfliesende $= N$, so wird wenigstens beynahe

$$N = \left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot N' \quad (\text{♄}$$

seyn.

Der

Der Werth von N′ ergiebt sich aus §. 50, indem man $h + \varepsilon$ statt h schreibt; nämlich

$$N' = \frac{91 \cdot b}{4} \cdot \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \cdot \Big[\frac{(b+2h+2\varepsilon)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} \cdot \big((b+2h+2\varepsilon)^2 - (b+2H)^2 \big)$$

$$+ 6\,b^2 \cdot (h+\varepsilon-H) - b^3 \cdot \big(\ln.(b+2h+2\varepsilon) - \ln.(b+2H) \big) \Big]$$

folglich, wenn die durch $\gamma\,\delta$ und $\alpha\,\eta$ abfliefsende Wassermenge mit M bezeichnet wird,

$$M = \frac{91.b}{4} \left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \cdot \Big[\frac{(b+2h+2\varepsilon)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} \cdot \big((b+2h+2\varepsilon)^2$$

$$- (b+2H)^2 \big) + 6b^2 \cdot (h+\varepsilon-H) - b^3 \cdot \big(\ln.(b+2h+2\varepsilon) - \ln.(b+2H) \big) \Big]$$

oder auch

$$\mathfrak{E})\quad \frac{\lambda M^2}{91^2} = \frac{b^3}{16} \cdot \left(\frac{h}{\varepsilon+h}\right)^{\frac{3}{2}} \Big[\frac{(b+2h+2\varepsilon)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} \big((b+2h+2\varepsilon)^2$$

$$- (b+2H)^2 \big) + 6\,b^2 \cdot (h+\varepsilon-H) - b^3 \cdot \big(\ln.(b+2h-2\varepsilon) - \ln.(b+2H) \big) \Big].$$

Der Factor $\left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}}$ in der Gleichung 𝔥 ist hypothetisch, wie es auch die *chezy'sche* Grundformel ist. Ich bin aber durch eine doppelte Veranlassung zu diesem Factor gekommen: 1.) Betrachtungen über die Bewegungen des Wassers längs $\gamma\,\alpha$ und längs $\beta\,\alpha$ führen leicht darauf, dafs

$$N > \frac{h}{h+\varepsilon} \cdot N', \text{ doch aber auch } < \left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot N'$$

seyn müsse. Wäre z. B. $h = 1$, $\varepsilon + 3$, so wäre gewifs

$$N > \frac{1}{4}\,N', \text{ aber auch } < \frac{1}{2}\,N'.$$

Man wird sich daher nie sehr von der Wahrheit entfernen, wenn man einen mittleren Ausdruck $N = \left(\frac{h+\varepsilon}{h}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot N'$ zum Grunde legt.

2) Man

2) Man denke sich ein mit seinem oberen Rande bis an δ reichendes Behältniſs ganz mit Wasser angefüllt, und nun in einer lothrechten Wand einen rectangelförmigen Einschnitt von δ bis in γ herab, aus welchem das Wasser frey abschieſsen kann; dann diesen Einschnitt bis in β verlängert, so daſs das Wasser auch aus diesem frey abschieſsen kann; die Abfluſsmenge aus jenem sey $= N$, aus diesem $= N'$, so giebt die sehr bekannte Theorie

$$N : N' = h^{\frac{3}{2}} : (h + \varepsilon)^{\frac{3}{2}},$$

also

$$N = \left(\frac{h}{h + \varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} . \ N'.$$

Hier tritt aber der bedeutende Umstand ein, daſs das Wasser im ersten Falle nicht horizontal nach $\gamma\,\alpha$ abflieſst; im zweyten Falle aber dem horizontalen Boden $\beta\,\alpha$ folgen muſs. Diese Betrachtung leitete mich gleichfalls darauf, daſs man sich der Wahrheit sehr nähern müsse, wenn man $\sqrt{\left(\frac{h}{h + \varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}}$ statt $\left(\frac{h}{h + \varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}$ setzte, und dieses giebt

$$N = \left(\frac{h}{h + \varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}} . \ N',$$

wenn man unter N' die längs $\beta\,\alpha$, und unter N die längs $\gamma\,\alpha$ abflieſsende Wassermenge versteht.

Uebrigens erhellet beym ersten Anblick der Formel D, daſs sie für $\varepsilon = 0$ den unveränderten richtigen Ausdruck für Canäle mit horizontalem Boden giebt; für $\varepsilon + h = H$; also $b + 2\,h + 2\,\varepsilon = b + 2\,H$ giebt sie ebenso richtig $M = 0$.

§. 62.

Aufg. *Es werden $\lambda = 1000$ rhl. Fuſs, $b = 10$, $h = H = 4$, und $\varepsilon = 2$ vorgeschrieben; man soll M finden.*

Aufl.

Aufl. Man weiſs, daſs H zugleich mit h vorgeschrieben seyn kann, wenn H = h angenommen wird; dieses setzt nämlich voraus, daſs hier nicht vom freyen Laufe die Rede sey. Hier läſst sich also die Formel 𝔈 geradezu anwenden. Sie giebt

$$\frac{M^2}{91^2} \cdot \lambda = 34 \cdot (1605{,}3 - 2400 + 1200 - 200{,}67)$$
$$= 34 \cdot 204{,}33 = 6947{,}22;$$
daher $M = 91 \cdot \sqrt{6{,}94722} = 239{,}8$ C. F.

Anm. Für diesen Fall, wo nämlich H = h seyn soll, hätte man die Formel 𝔈 gar nicht nöthig, weil für sie die *chezy'sche* Grundformel gilt; dieses giebt aber

$$M = 91 \cdot b\,h \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda} \cdot \frac{b\,h}{b + 2h}}$$
$$= 91 \cdot 40 \cdot \sqrt{0{,}002 \cdot \frac{40}{18}}$$
$$= 242{,}6 \text{ C. F.}$$

ein Werth, der vom vorigen noch nicht um $\frac{1}{85}$ verschieden ist.

§. 63.

Aufg. *Es werden $\lambda = 1000$, $b = 10$, $h = 4$, $H = 3{,}4$ und $\varepsilon = 2$ vorgeschrieben; man soll M finden.*

Aufl. Man findet

$b + 2h + 2\varepsilon = 22$

$(b + 2h + 2\varepsilon)^2 = 484$

$(b + 2h + 2\varepsilon)^3 = 10648$

$6 \cdot b^2 (h + \varepsilon - H) = 1560$

$\frac{b^3}{16} \cdot \left(\frac{h}{\varepsilon + h}\right)^{\frac{3}{2}} = 34$

$b + 2H = 16{,}8$

$(b + 2H)^2 = 282{,}24$

$(b + 2H)^3 = 4741$

$(b + 2\varepsilon + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 5907$

$(b + 2\varepsilon + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 201{,}76$

$\ln.(b + 2\varepsilon + 2h) = 5{,}3936275 - \ln.10$

$\ln.(b + 2H) = 5{,}1239639 - \ln.10$

$\text{Diff.} = 0{,}2696636$

$\times 1000$

$= 269{,}6636;$

also

also

$$\frac{M^2}{91^2} \cdot \lambda = 34 \cdot \left(1969 - 3026,4 + 1560 - 269,66\right)$$
$$= 7920;$$

folglich

$$M = 91 \sqrt{7,92} = 256 \text{ C. F.}$$

Dieselben Bestimmungsstücke $\lambda = 1000$, $b = 10$, $h = 4$, $\varepsilon = 2$ und $H = 3,4$ gaben (§. 17)

$$M = 257 \text{ C. F.}$$

Eine so genaue Uebereinstimmung übersteigt alle Erwartung.

Anm. Ohne Zweifel wird man solche Uebereinstimmungen von Formeln, die ganz verschiedene Gestalten haben und auf ganz verschiedenen Gründen beruhen, mit Bewunderung wahrnehmen. Da es mir aber weniger um diese Bewunderung als um strenge Untersuchung der Wahrheit und Vervollkomnung hierher gehöriger Kenntnisse zu thun ist, so muſs ich selbst auf die Abweichungen aufmerksam machen, die sich dennoch bey genauerer Vergleichung hier bemerken lassen. Eine solche Abweichung zeigt sich vorzüglich in zusammen gehörigen Werthen von H und M, die sich bey freyem Laufe aus den übrigen Bestimmungsstücken ergeben.

§. 64.

Ex. Es werden folgende Werthe für den freyen Lauf vorgeschrieben: $\lambda = 1000$; $b = 10$; $h = 4$; $\varepsilon = 2$; man soll M und H finden. Man erhält

I. Für $H = 3$

$b + 2h + 2\varepsilon = 22$	$(b + 2H)^2 = 256$
$(b + 2h + 2\varepsilon)^2 = 484$	$(b + 2H)^3 = 4096$
$(b + 2h + 2\varepsilon)^3 = 10648$	$(b + 2\varepsilon + 2h)^3 - (b + 2H)^3 = 6552$
$6 \cdot b^2(h + \varepsilon - H) = 1800$	$(b + 2\varepsilon + 2h)^2 - (b + 2H)^2 = 228$
$\frac{b^3}{16} \cdot \left(\frac{h}{+h}\right)^{\frac{3}{2}} = 34$	$\ln.\ (b + 2\varepsilon + 2h) = 3,0910424$
	$\ln.\ (b + 2H) = 2,7725887$
$b + 2H = 16$	Diff. $= 0,3184537$
	$\times 1000$
	$= 318,4537$;

also

also

$$\frac{M^2.\ \lambda}{91^2} = 34 \cdot \left(2184 - 3420 + 1800 - 318{,}4537\right)$$
$$= 34 \cdot\ 245{,}55 = 8348{,}7.$$

II. Für $H = 2{,}6$

$6b^2.(h+\varepsilon-H) = 2040$ ln. $(b+2\varepsilon+2h) = 5{,}3936275 - \text{ln.}10$

$b+2H = 15{,}2$ ln. $(b+2H) = 5{,}0238805 - \text{ln.}10$

$(b+2H)^2 = 231{,}04$ Diff. $= 0{,}3697470$

$(b+2\varepsilon+2h)^3 - (+2H)^3 = 7136{,}2$ $\times 1000$

$(b+2\varepsilon+2h)^2 - (b+2H)^2 = 252{,}9$ $= 369{,}747$;

also

$$\frac{M^2\ \lambda}{91^2} = 34 \cdot \left(2378{,}7 - 3793{,}5 + 2040 - 369{,}74\right)$$
$$= 34 \cdot\ 255{,}46 = 8685.$$

III. Für $H = 2{,}4$

$6b^2\ (h+\varepsilon-H) = 2160$ ln. $(b+2\varepsilon+2h) = 5{,}3936275 - \text{ln.}10$

$b+2H = 14{,}8$ ln. $(b+2H) = 4{,}9972122 - \text{ln.}10$

$(b+2H)^2 = 219{,}04$ Diff. $= 0{,}3964153$

$(b+2H)^3 = 3241{,}8$ $\times 1000$

$(b+2\varepsilon+2h)^3 - (b+2H)^3 = 7406{,}2$ $= 396{,}4153$;

$(b+2\varepsilon+2h)^2 -)b+2H)^2 = 264{,}96$

also

$$\frac{M^2\ \lambda}{91^2} = 34 \cdot \left(2468{,}7 - 3974{,}4 + 2160 - 396{,}4\right)$$
$$= 34 \cdot\ 258 = 8762.$$

IV. Für $H = 2{,}3$

$6b^2\ (h+\varepsilon-H) = 2220$ ln. $(b+2\varepsilon+2h) = 5{,}3936275 - \text{ln.}10$

$b+2H) = 14{,}6$ ln. $(b+2H) = 4{,}9836066 - \text{ln.}10$

$(b+2H)^2 = 213{,}16$ Diff. $= 0{,}4100209$

$(b+2H)^3 = 3112{,}1$ $\times 1000$

$(b+2\varepsilon+2h)^3 - (b+2H)^3 = 7536$ $= 410{,}02$;

$(b+2\varepsilon+2h)^2 - (b+2H)^2 = 271$

also

also

$$\frac{M^2 \lambda}{91^2} = 34 \cdot (2512 - 4065 + 2220 - 410)$$
$$= 34 \cdot 257 = 8738.$$

Das nahe Beysammenliegen der Werthe III und IV giebt zu erkennen, daſs man $H = 2{,}4$ als $H^{(1)}$ beybehalten kann; also

$$M = 91. \sqrt{8{,}762} = 269{,}3 \text{ Cub. F.}$$

Dieselben Bestimmungsstücke gaben (§. 17) $M = 257$ C. F. für den freyen Lauf, welches noch nicht um $\frac{1}{22}$ vom jetzigen Werth verschieden ist, also immer noch eine gute Zusammenstimmung giebt. Aber in den Werthen von H (§. 17 und hier) zeigt sich ein bedeutender Unterschied. Dort fand man $H = 3{,}4$ Fuſs, hier nur $H = 2{,}4$ F.

Der Umstand, daſs bey so verschiedenen Werthen von H, die von $H = 3{,}4$ (s. den vor. §.) bis zu $H = 2{,}4$ F. abnehmen, die zugehörigen Werthe von M sich nur von 269,3 bis zu 256 C. F. (im vor. §.) abändern, ist den Berechnungen auf diesem zweyten Wege nicht günstig. Ungleich regelmäſsiger sind die Resultate auf dem ersten Wege (§. 59), wenn vom freyen Laufe die Rede ist.

Beschluſs.

§. 65.

Ich habe mich bey der ersten Methode am längsten aufgehalten, nicht weil ich sie für die zuverläſsigste erklären müſste, sondern weil es natürlich war, die hier zu machenden Anwendungen

 gleich

gleich bey derjenigen Methode zu zeigen, welche zuerst vorgetragen wurde, und so auch die allgemeinen Bemerkungen, welche für jede Methode gelten, gleich bey der ersten anzubringen.

Es bleibt aber zum Beschluſs dieser Abhandlung noch eine Frage übrig, die sich von jedem Leser erwarten läſst: welche von den hier mitgetheilten Formeln wird sich der Wahrheit am meisten nähern und daher zum Gebrauch am meisten empfohlen zu werden verdienen? Zur kurzen Uebersicht will ich die verschiedenen Formeln hier zusammenstellen.

I. Für horizontale Canäle.

1.) $$M = 91 . bh . \sqrt{\frac{bH}{\lambda . (h+H)}} . \left(h - H - \tfrac{1}{2} b . \ln . (b+2h) - \ln . (b+2H)\right) \quad (\S.\ 7.)$$

2.) $$M = 3{,}187 . bh . \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1014 . \frac{h-H}{\lambda} . \frac{H\,b}{H+h} \times \left(1 - \frac{b . \left(\ln . (b+2h) - \ln . (b+2H)\right)}{2 . (h-H)}\right)\right)}\right]$$

(§. 42. nur dort $\varepsilon = 0$ gesetzt.)

3.) $$M = \frac{91 . b}{4} \frac{b}{\lambda} . \left[\frac{(b+2h)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} \left((b+2h)^2 - (b+2H)^2\right) + 6 b^2 . (h-H) - b^3 . \left(\ln . (b+2h) - \ln . (b+2H)\right)\right]$$

(§. 50.)

II. Für Canäle mit abhängigem Boden.

1.) $$M = 91 . bh . \sqrt{\left[\frac{bH . (\varepsilon + h - H)}{\lambda . (H+h)} . \left(1 - \frac{b . \ln . (b+2h) - \ln . (b+2H)}{2 . (h-H)}\right)\right]} \quad (\S.\ 5.)$$

2.) M

$$2.)\ M = 3{,}187.\,bh.\left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1014.\,\frac{\varepsilon + h - H}{\lambda}.\,\frac{H\,b}{H+h}\right.}\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1 - \frac{b.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)}{2.\,(h-H)}\right)\right)\right]$$

(§. 42.)

$$3.)\ M = \frac{91.\,b}{4}.\sqrt{\frac{b}{\lambda}}.\left[\frac{2\varepsilon(b+H)^3}{b+h+H} + \frac{(b+2h)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2}.\left((b+2h)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. - (b+2H)^2\right) + 6.\,b^2.\,(h-H) - b^3.\left(\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)\right)\right]$$

(§. 50.)

$$4.)\ M = \frac{91.\,b}{4}\left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{5}{4}}.\sqrt{\frac{b}{\lambda}}.\left[\frac{(b+2h+2\varepsilon)^3 - (b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2}\left((b+2h+2\varepsilon)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. - (b+2H)^2\right) + 6.\,b^2.(h+\varepsilon-H) - b^3.\left(\ln.(b+2h+2\varepsilon) - \ln.(b+2H)\right)\right]$$

(§. 61.)

III. Für Canäle mit steigendem Boden.

Dieselben Formeln wie Nr. II. Nur wird der Werth von ε verneint ausgedrückt.

IV. Für Canäle, bey welchen Breite und Tiefe zugleich veränderlich sind.

$$M = 91.\sqrt{\frac{(\varepsilon+h-H).\,bh}{\lambda}}\left\{\begin{array}{l} (h-H).\,b + \frac{B-b}{N}\left(H + (h-H).\,\frac{N - 2.(b+2H)}{2\,N}\right) \\ + \left(\frac{b\,H}{N} - \frac{\left((B-b).\,H + (h-H).\,b\right).\ (b+2H)}{N^2}\right. \\ \left. \quad + \frac{(B-b).\ (h-H).\ (b+2H)^2}{N^3}\right) \\ \quad \times \left(\ln.\,(B+2h) - \ln.\,(b+2H)\right) \end{array}\right\}$$

(§. 28.)

§. 66.

Die Formel (vor. §. II Nr. 1) beruht auf der *chezy'schen* Grundformel

$$M = 91 . bh. \sqrt{\frac{\zeta}{\lambda} . \frac{bh}{b+2h}},$$

die nur für solche Werthe von $\frac{\zeta}{\lambda}$ gilt, welche eine unveränderliche Wassertiefe längs dem ganzen Canale zur Folge haben, die also der Wasserfläche eine dem Canalboden parallele Lage gestatten. Die Ableitung der allgemeineren Formel aus der so sehr beschränkten *chezy'schen* beruht auf folgender Betrachtung:

Der Widerstand, den die vorangehenden Wassertheilchen den nachfolgenden entgegensetzen und welchen alle von den benetzten Wandflächen leiden, bestimmt die Grösse der Abflussmenge oder den Werth von M.

Die Summe aller dieser Widerstände längs dem ganzen Canale, wodurch die Bewegung der ganzen Masse bestimmt wird, hängt von der Gestalt der Oberfläche des Wassers zwischen dem ersten und letzten Querschnitte ab, und eben diese Gestalt wird durch die Art, wie Boden und Seitenwände der Bewegung hinderlich fallen, bestimmt. Insofern nun angenommen werden kann, dass der Widerstand in jedem Wasserquerschnitte durch die Fläche dieses Querschnittes mit dem benetzten Umfang desselben dividirt bestimmt wird, und dass von Strecke zu Strecke, auf bedeutende Längen, die Oberfläche nicht merklich von einer schiefen Ebene abweicht, so kann die Summe der Widerstände nicht merklich verschieden ausfallen, es mag die Wasserfläche im Ganzen eine etwas gekrümmte Fläche oder eine schiefe Ebene bilden, weil die *Summe aller jener*

Quo-

Quotienten für die etwas gekrümmte Fläche von der für die Voraussetzung der ununterbrochenen schiefen Ebene kaum merklich für die Ausübung verschieden seyn kann. Kann also die *chezy'sche* Formel, welche auf die Voraussetzung $H = h$ beschränkt ist, als Näherungsgleichung gebraucht werden, so kann auch die allgemeinere (vor. §. II Nro. 1) als eine solche, *in Bezug auf die Bestimmung von M*, gelten, wenn sie gleich das wahre Verhältniſs der verschiedenen Entfernungen mit minderer Genauigkeit angiebt. Am häufigsten kommt es aber darauf an, *den Werth von M* auf eine genügende Weise zu bestimmen, oder zusammengehörige Werthe von λ, ε, b, h und M oder auch von λ, ε, b, H und M zu haben, und es kommt selten darauf an, mit gleicher Genauigkeit auch die Gestalt der Wasserfläche oder das Verhältniſs der verschiedenen Tiefen zu kennen, das doch auch durch die Hypothese der schiefen Ebene nie sehr unrichtig gefunden werden kann.

Dabey muſs ich noch bemerken, daſs die Hypothese der schiefen Ebene eigentlich Hypothese des gleichförmigen Abhangs der Wasserfläche sowohl gegen den Boden als gegen die durch das Ende des Bodens gezogene Horizontallinie ist, wobey also auf die *wahre* Horizontallinie Rücksicht genommen werden muſs.

Bey einer sehr bedeutenden Länge kann nämlich $\beta\,\alpha$ (Fig. 14) als eine durch α gezogene wahre Horizontallinie nicht mehr als gerade Linie angenommen werden, sondern als Stück eines gröſsten Kreisbogens auf unserer Erdoberfläche; der gleichförmig fallende Boden $\gamma\,\alpha$ muſs sich der $\beta\,\alpha$ gleichförmig nähern, und die Oberfläche $\delta\,\eta$ muſs sich von der gleichfalls wahren horizontalen $\delta\,\varepsilon$ gleichförmig entfernen; also ist $\delta\,\eta$ eigentlich keine schiefe Ebene, sondern gleichfalls ein Kreisbogen. Aber alle von der schiefen Ebene her-

hergenommenen Sätze in Bezug auf Lage der Oberfläche gegen den Boden und gegen die horizontale gelten ebenso wie die schiefe Ebenen.

Aufserdem wird zur Beurtheilung des von den Umständen abhängenden Grades der Genauigkeit des Resultates folgende Bemerkung nicht überflüfsig seyn.

Es sey $\delta\mu$ der $\gamma\alpha$ gleichlaufend, so liegt η, ein Punct in der Wasserfläche, entweder zwischen α und μ, oder zwischen ε und μ; letzteres nur, wo Aufschwellung Statt findet. Im *ersteren* Falle kommt die bey der allgemeinen Gleichung zum Grunde liegende Voraussetzung der Wahrheit desto näher, je näher η an μ fällt, oder je kleiner $\frac{h-H}{h}$ ist, weil die Wassertiefe nirgends kleiner als $\alpha\,\eta$ und nirgends gröfser als $\gamma\,\delta$ seyn kann. Wie daher auch die Gestalt des Wasserspiegels zwischen η und δ beschaffen seyn mag, so kann bey einem kleinen Werthe von $\frac{h-H}{h}$ die Summe der Widerstände nicht viel von der verschieden seyn, welche Statt fände, wenn $\eta\,\delta$ eine von η bis δ gleichförmig steigende Linie wäre. Dieses mufs noch Statt finden, wenn auch $\frac{h-H}{h}$ ein Bruch von bedeutender Gröfse, z. B. $\frac{2}{3}$, wäre. Aber wenn $\frac{h-H}{h}$ ein nur etwas kleiner Bruch, z. B. nicht $> \frac{1}{4}$, wäre, so kann auch offenbar die Gestalt der Wasserfläche zwischen η und δ nicht viel von der gleichförmig steigenden $\eta\,\delta$ abweichen, weil nur langsame und allmälige Aenderungen der Richtungen der Oberfläche zwischen diesen beyden Puncten eintreten können. In solchen Fällen also, wo das Verhältnifs zwischen h und H, welches die allgemeine Formel giebt, so beschafschaffen ist, daſs $\frac{h-H}{h}$ etwa nicht über $\frac{1}{4}$ beträgt, kann auch das wahre Verhältniſs zwischen h und H nicht merklich von dem, welches die Formel giebt, abweichen.

Im *letzteren* Falle, wo nämlich η zwischen ε und μ fällt, kommt die bey der allgemeinen Formel zum Grunde liegende Voraussetzung wieder der Wahrheit desto näher, je näher η an μ oder an ε fällt; also je kleiner $\frac{H-h}{h}$ oder je kleiner $\frac{\varepsilon+h-H}{h}$ ist. Und wenn einer der drey Brüche

$$\frac{h-H}{h}, \quad \frac{H-h}{h}, \quad \frac{\varepsilon+h-H}{h}$$

nicht über $\frac{1}{4}$ beträgt, so kann man immer versichert seyn, daſs das angenommene oder das durch die Formel bestimmte Verhältniſs zwischen h und H dem wirklichen Erfolg genau genug entspreche. Ist derjenige von diesen Brüchen, welcher dem Bruche $\frac{1}{4}$ am nächsten kommt, gröſser als $\frac{1}{4}$, so wird das Verhältniſs zwischen h und H allerdings minder sicher; aber ein sehr bedeutender Fehler kann doch nie eintreten. Der Werth von M bleibt immer hinlänglich genau, insofern die *chezy'sche* Grundformel für $h = H$ als hinlänglich genau gelten kann.

Die Gleichung (§. 65, I, 1) ist aus der (II. 1) unmittelbar abgeleitet, indem nur $\varepsilon = 0$ gesetzt wurde; sie ist also eben so consequent als die schon erwähnte.

Die

Der wichtige Umstand, dafs die allgemeine Gleichung (II, 1) beyde Neigungen, die des Bodens $= \varepsilon$ und die der Wasserfläche $\varepsilon + H - h$ besonders erhält, beseitigt die Beschränktheit, welche allen vorher bekannt gewesenen Formeln über die Bewegung des Wassers in offenen Canälen anklebte, und setzt uns in den Stand, auch die Canäle mit horizontalem Boden dem Calcul zu unterwerfen.

Die Beschränkung auf *gleichförmige* Bewegung, welche nur für $H = h$ möglich ist, und die bey freyem Laufe nie eintritt, stand bisher nicht nur der Anwendbarkeit jener Formeln, welche *Chezy*, *Dubuat* und *Prony* gegeben haben, in den allerhäufigsten Fällen der Ausübung im Wege, sondern sie leitet auch noch auf die Vermuthung, dafs die für diesen Fall beschränkte *chezy'sche* Grundformel

$$M = \phi.\ b\,h \sqrt{\frac{\zeta.\ b\,h}{\lambda.\ (b + 2h)}}$$

(wo ich ϕ statt des bisher gebrauchten numerischen Coëfficienten gesetzt habe) auf Fälle, wo wirklich durchaus gleiche Wassertiefe Statt findet, genauer passen würde, als Vergleichungen ihrer Resultate mit Beobachtungen, bey welchen man so gerade hin $H = h$ und durchaus gleichen Abhang des Canalbodens angenommen hat, ergeben. Eben darum mögten auch wohl neue Beobachtuugen bey Canälen von ganz verschiedenen Gefällen des Bodens erfoderlich seyn, um die Resultate der Beobachtung mit denen der Formel (II, 1) vergleichen und den numerischen Coëfficient 91 näher prüfen zu können. Vielleicht würde er einiger Abänderung bedürfen.

§. 67.

§. 67.

Die Formel (§. 65, II. 2) ist ganz so aus der gleichfalls auf die Voraussetzung unveränderlicher Wassertiefe beschränkten *prony'schen* Grundformel abgeleitet, wie die II. 1 aus der *chezy'schen*. Ihre Resultate fallen mit denen von II. 1 sehr nahe zusammen. Es läſst sich nicht läugnen, daſs die Resultate der *prony'schen* Grundformel mit denen jener Beobachtungen, aus welchen sie abgeleitet ist, etwas näher zusammenfallen, als die Resultate der *chezyschen* Grundformel; aber in der Anwendung auf Fälle, wo nicht gerade jene fast nie Statt findende Voraussetzung $H = h$ gilt, verschwindet der Erfolg des Näherzusammenfallens so, daſs die Abweichung wenig Aufmerksamkeit verdient. Und wenn nun überdas die Voraussetzung der unveränderlichen Tiefe bey den zum Grunde gelegten Beobachtungen nicht einmal wirklich Statt hatte, und neue Beobachtungen etwas veränderte Resultate ergeben, welche auf eine Abänderung des Coëfficienten ϕ in der *chezy'schen* Grundformel führen, so müſsten in solchem Falle auch alle jene *prony'sche* Berechnungen umgeändert werden, die in seiner Formel die Zahlen gegeben haben, welche in meine allgemeine Gleichung II. 2 übergegangen sind. Und da sich nicht behaupten läſst, daſs in den von *Prony* gebrauchten Beobachtungen die zum Grunde liegende Voraussetzung unveränderlicher Tiefen längs dem ganzen Canale wirklich Statt gefunden habe, so bleibt es auch unentschieden, ob die *prony'sche* Grundformel dieser Voraussetzung genauer entspreche, als die *chezy'sche*. Aus diesen Gründen und wegen des unbedeutenden Unterschiedes zwischen den Resultaten der verschiedenen Formeln bin ich nicht der Meinung, daſs bey wirklichen Anwendungen die Formel II. 2 der II. 1 vorzuziehen sey.

Dasselbe gilt also auch von I. 2, die aus II. 2 folgt, indem man nur $\varepsilon = 0$ setzt.

§. 68.

Die Formel §. 65, I. 3 ist strenge aus der *chezy'schen* abgeleitet, so dafs sie immer denselben Werth für M giebt, man mag, in welcher Entfernung man will, vom Anfange des Canals die Wassertiefen h und H nehmen. Offenbar erhält sie hierdurch einen wesentlichen Vorzug vor der I. 1, welche nur auf die Wassertiefen am Anfange und am Ende des Canals Rücksicht nimmt, und in welcher also λ allemal die Länge des ganzen Canals bezeichnet. Es fällt auch in die Augen, dafs einer in aller Schärfe richtigen Formel jene Eigenschaft zukommen müfste, wofern die *chezy'sche* Formel selbst der Natur völlig angemessen wäre. In dieser Voraussetzung gäbe dann die Formel I. 3 zugleich die wahre Gestalt der Wasserfläche, und sie gäbe zusammengehörige Wassertiefen für jede Entfernung in aller Schärfe. Wo daher Aufgaben für *horizontale* Canäle vorkommen, ist die Formel I. 3 die vorzüglichste. Aber es folgt aus der Natur der Sache, dafs in Bezug auf die Bestimmung von M die Hypothese, welche die Oberfläche als eine schiefe Ebene gelten läfst, keine bedeutende Verschiedenheit in Vergleichung mit der wahren Gestalt der Wasserfläche zur Folge haben kann, und dafs überhaupt die Verschiedenheit des Resultates nur im Werthe von H, wenn die übrigen Stücke bestimmt sind, oder im Werthe von h bey angenommener Bestimmung der übrigen Stücke, oder im Werthe von λ, wenn die übrigen Stücke festgesetzt sind, bewirkbar werden kann, worüber ich mich schon (§. 66) näher erklärt habe.

§. 69.

Die allgemeinere Formel §. 65, II. 3., welche für jedes Gefäll des Bodens gilt, ist auf eine sehr consequente Weise aus der I. 3 abgeleitet worden. Sie ist nicht, wie die I. 1, auf die

Hypo-

Hypothese der schiefen Ebene gegründet *), sondern steht in näherem Bezuge auf die wahre Gestalt der Wasserfläche. Wo es daher auf genauere Bestimmung zusammengehöriger Werthe von h, H und λ (unter λ den Abstand irgend einer Wassertiefe h von irgend einer andern H verstanden) ankommt, würde ich die Formel II. 3 der II. 1 vorziehen.

§. 70.

Die Formel §. 65 II. 4, die sich für $\varepsilon = 0$ d. i. für horizontale Canäle in die I. 3 verwandelt, beruht auf einer Hypothese, deren Anwendung zwar ohne grofsen Fehler gestattet zu seyn scheint, aber doch nicht offenbar genug ist, um sie mit der hier erfoderlichen Sicherheit gelten zu lassen. Nahes Zusammenfallen der aus diesen verschiedenen Methoden sich ergebenden Resultate bestätigt ihre genaue Abhängigkeit von dem bey der *chezy'schen* Grundformel zum Grunde liegenden Gesetze, und zugleich die Annäherung der *chezy'schen* Formel selbst zum Gange der Natur. Zu III und IV finde ich weitere Erinnerungen unnöthig.

Uebrigens werde ich kaum bemerken dürfen, dafs überall von der *mittleren* Geschwindigkeit der Wassertheilchen in einem Querschnitte die Rede ist. Zuweilen kann es darauf ankommen, die

von

*) Ich bediene mich des Ausdrucks: *Hypothese der schiefen Ebene* überall nur zur Abkürzung. Ich verstehe darunter nur die Voraussetzung, dafs der Wasserspiegel nicht merklich von einer Ebene abweiche und dafs seine etwaige Höhlung bey Seite gesetzt werden könne. Von den mechanischen Gesetzen, nach welchen Bewegung auf einer schiefen Ebene erfolgt, und einer davon hergenommenen Hypothese ist hier nirgends die Rede.

Tab. XIII.