

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

**k. b. Akademie der Wissenschaften**

zu München.

---

1882. Heft IV.

---

**München.**

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1882.

In Commission bei G. Franz.

Herr Bauer legt vor und bespricht die Abhandlung:

„Von der allgemeinen Inversion.“ Von J. S.  
Vaněček.

1. In einer Note „Sur l'inversion générale“, welche ich der Académie des Sciences mitgetheilt habe (10. April 1882), habe ich die Idee einer allgemeinen Methode der Transformation durch reciproke Radien kurz entwickelt.

Einem Punkte  $a$  entspricht in Bezug auf einen allgemeinen Kegelschnitt  $K$  eine Polare  $A$ . Diese Polare schneidet eine gegebene Gerade  $R$  in einem Punkte  $a_1$ , dessen Polare  $A_1$  die Gerade  $A$  im Punkte  $a_2$  trifft. Die Punkte  $a, a_1, a_2$  bilden in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  (die Basis der Transformation) ein Poldreieck, über welches wir folgende Theoreme aufstellen können:

Durchläuft der Eckpunkt eines Poldreieckes  $a, a_1, a_2$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  eine Curve  $P$  der  $p$ -ten Ordnung und der Eckpunkt  $a_1$  eine Curve  $R$  der  $r$ -ten Ordnung, dann beschreibt sein dritter Eckpunkt  $a_2$  eine andere Curve ( $a_2$ ) der  $2pr$ -ten Ordnung, welche die Schnittpunkte der Curven  $P, R$  mit  $K$  zu vielfachen Punkten hat.

Und:

Umhüllt die Seite  $A$  eines Polardreieckes  $A, A_1, A_2$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  eine Curve  $P$  der  $p$ -ten Classe und die zweite Seite  $A_1$  eine andere

Curve  $R$  der  $r$ -ten Classe, dann umhüllt die dritte Seite  $A$ , eine Curve ( $A_2$ ), welche von der  $2pr$ -ten Classe ist und die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven  $P$ ,  $R$  mit  $K$  zu vielfachen Tangenten hat.

2. In dem Vorigen hat einem Punkte der gegebenen Figur wieder ein Punct der derivirten entsprochen. Wir können aber auch dem Punkte eine Gerade und umgekehrt entsprechen lassen.

Die Polare  $A$  des Punctes  $a$  schneidet die Curve  $R$  im Puncte  $a_1$ . Die Verbindungsgerade  $A_2$  der Puncte  $a$ ,  $a_1$  ist die früher besprochene Gerade  $A_2$ , welche die Curve ( $A_2$ ) umhüllt.

Da die Puncte  $a$ ,  $a_1$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  conjugierte Pole sind, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Bewegt sich eine veränderliche Strecke  $aa_1$  derart, dass ihre Endpunkte  $a$ ,  $a_1$ , welche stets conjugirte Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  bleiben, respective die Curven  $P$  der  $p$ -ten Ordnung und  $R$  der  $r$ -ten Ordnung durchlaufen, dann umhüllt die Gerade  $aa_1$  eine Curve ( $A_2$ ) der  $2pr$ -ten Classe. Diese Curve hat die gemeinschaftlichen Tangenten der Polarcurven  $P_1$ ,  $R_1$  von  $P$  und  $R$  mit  $K$  zu vielfachen Tangenten.

Weiter:

Bewegt sich ein veränderlicher Winkel ( $A$ ,  $A_1$ ) derart, dass seine Schenkel  $A$ ,  $A_1$ , welche stets conjugirte Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  bleiben, respective die Curven  $P$  der  $p$ -ten Classe und  $R$  der  $r$ -ten Classe umhüllen, dann beschreibt der Scheitelpunct  $a_2$  des Winkels eine Curve ( $a_2$ ) der  $2pr$ -ten Ordnung. Die Schnittpuncte der Polarcurven  $P_1$ ,  $R_1$  von  $P$ ,  $R$  mit dem Kegelschnitte  $K$  sind die vielfachen Puncte der Curve ( $a_2$ ).

3. Setzen wir nun voraus, dass zwei von den Curven  $P, R, (a_2)$  coincidiren. Da die Scheitelpuncte  $a, a_1, a_2$  des Poldreieckes  $a, a_1, a_2$  mit einander verwechselt werden können, so bleibt sich gleich, welche die zusammenfallenden Curven sind. Unsere nächste Aufgabe ist, die dritte Curve zu bestimmen.

Es sei gegeben eine Curve  $M$ , in welcher sich zwei von den Curven  $P, R, (a_2)$  vereinigen, und welche von der  $m$ -ten Ordnung ist. Dieselbe schneidet die Basis  $K$  in  $2m$  Punkten. Die Polare  $A$  eines solchen Punctes  $a$  ist die Tangente der Basis in diesem Puncte und schneidet die Curve  $M$  noch in  $m-1$  Punkten. Die Polaren aller dieser Puncte gehen durch den Punct  $a$ , welcher demnach ein  $(m-1)$ -facher Punct der inversen Curve  $(a_2)$  ist. Daraus ist ersichtlich, dass die Curve  $M$  mit der Basis  $2m(m-1)$  Punkte gemeinschaftlich hat, oder dass dieselbe der  $m(m-1)$ -ten Ordnung ist.

Der Punct  $a$  transformirt sich in die Tangente  $A$  selbst, deren Berührungspunct  $a$  wir als zwei unendlich nahe Puncte betrachten können. Zählen wir daher diese  $2m$  Tangenten auch zu der Curve, die wir erhalten sollen, dann ist dieselbe im Allgemeinen der  $m(m+1)$ -ten Ordnung. Allein wir betrachten bloss die eigentliche Curve ohne alle die Geraden, in welche dieselbe nebst dem ausartet.

Ein  $n$ -facher Punct  $b$  der Curve  $M$  transformirt sich in  $m$  vielfache Puncte  $n$ -ter Ordnung, welche auf der Polare  $B$  des Punctes  $b$  liegen.

Daraus folgt:

Wenn zwei Eckpuncte  $a, a_1$  eines Poldreieckes  $a, a_1, a_2$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  eine Curve  $M$  der  $m$ -ten Ordnung durchlaufen, dann beschreibt der dritte Eckpunct  $a_2$  eine Curve  $(a_2)$  der  $m(m-1)$ -ten Ord-

nung, welche die Schnittpuncte der Curven  $M, K$  zu vielfachen Punkten hat.

Und:

Umhüllen zwei Seiten  $A, A_1$  eines Polardreiecks  $A A_1 A_2$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  eine Curve  $M$  der  $m$ -ten Classe, dann umhüllt die dritte Seite  $A_2$  eine andere Curve ( $A_2$ ), welche von der  $m(m-1)$ -ten Classe ist und die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven  $M, K$  zu vielfachen Tangenten hat.

4. Die Polaren der Punkte der Curve  $M$  umhüllen die reciproke Curve  $M_1$  derselben, welche von der  $m$ -ten Classe ist. Die Tangenten der Curve  $M_1$  werden in der Weise gepaart, dass sie stets zwei conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  sind. Der Ort des Durchschnittspunctes  $a_2$  von solchen zwei Geraden ist nach dem vorigen Theorem eine Curve der  $m(m-1)$ -ten Ordnung.

Also:

Bewegt sich ein veränderlicher Winkel ( $A, A_1$ ) derart, dass die Schenkel desselben stets conjugirte Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$  bleiben, und eine Curve der  $m$ -ten Classe umhüllen, dann beschreibt der Scheitelpunct  $a_2$  desselben eine Curve der  $m(m-1)$ -ten Ordnung.

Und:

Bewegt sich eine Sehne  $aa_1$ , deren Länge veränderlich ist, in der Weise, dass die Endpunkte  $a, a_1$  derselben stets conjugirte Pole bleiben und eine Curve  $m$ -ter Ordnung durchlaufen, dann umhüllt die Sehne eine Curve  $m(m-1)$ -ter Classe.