Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1882. Heft I.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1882.

In Commission bei G. Franz.

Herr Professor v. Jolly legt vor und bespricht:

Theorie der elliptischen Doppelbrechung.

Von E. Lommel.

In einer vorausgegangenen Mittheilung[1]) habe ich gezeigt, dass sich die Drehung der Polarisationsebene in isotropen Mitteln aus den einfachen Vorstellungen, welche meiner Lichttheorie zu Grunde liegen, in befriedigender Weise erklärt. Die nämlichen Principien, auf die Fortpflanzung des Lichtes in krystallisirten Körpern angewandt, führen auch zur Erklärung der elliptischen Doppelbrechung. Man braucht den Gleichungen, welche die Mitbewegung der Körpertheilchen in Krystallen bestimmen[2]), nur diejenigen Glieder hinzuzufügen, welche der vorigen Mittheilung zufolge die Einwirkung des schraubenartigen Baues der Moleküle ausdrücken, während die Bewegungsgleichungen des Aethers ungeändert die nämlichen bleiben wie in isotropen Körpern.

Bildet die Normale der fortgepflanzten ebenen Welle, zugleich die z-Achse unseres rechtwinkligen Coordinatensystems, mit der Richtung der Schraubenaxen der Moleküle einen Winkel, dessen Cosinus w_3 ist, so sind

$$- 2\,\delta w_3^2 m \frac{d(y'-y)}{dt} \quad \text{und} \quad + 2\,\delta w_3^2 m \frac{d(x'-x)}{dt}$$

1) Diese Sitzungsberichte, Bd. 11. p. 454. 1881.

2) Wied. Ann. Bd. 4. p. 58. 1878.

die Zusatzglieder, welche zu den resp. nach der x- und y-Axe gerichteten Kraftcomponenten hinzugefügt werden müssen. Die Schraubenaxe jedes Moleküls nehmen wir als zusammenfallend an mit einer seiner drei auf einander senkrechten Elasticitätsaxen. In Bezug auf diese gegebenen Richtungen wird die Lage des Coordinatensystems, dessen xy-Ebene die fortgepflanzte Welle ist, bestimmt durch die Cosinus

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\ u_2,\ v_2,\ w_2;\ u_3,\ v_3,\ w_3$$

der Winkel, welche resp. die x-, y- und z-Axe mit jenen drei Richtungen einschliessen.

Die Bewegungsgleichungen der Körpertheilchen lauten alsdann:

$$(1)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2(x'-x)}{dt^2} + 2\,km\,\dfrac{d(x'-x)}{dt} + 2\,\delta w_3^2 m\,\dfrac{d(y'-y)}{dt} \\ \qquad + mN_1(x'-x) + mT_3(y'-y) + mT_2(z'-z) \\ \qquad\qquad + 2\,m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt} - \dfrac{dx'}{dt}\right) = 0, \\ m\,\dfrac{d^2(y'-y)}{dt^2} - 2\,\delta w_3^2 m\,\dfrac{d(x'-x)}{dt} + 2\,km\,\dfrac{d(y'-y)}{dt} \\ \qquad + mT_3(x'-x) + mN_2(y'-y) + mT_1(z'-z) \\ \qquad\qquad + 2\,m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt} - \dfrac{dy'}{dt}\right) = 0, \end{cases}$$

diejenigen des Aethers aber wie immer:

$$(2)\quad \begin{cases} \mu\,\dfrac{d^2(x-\xi')}{dt^2} = \omega^2\left(\dfrac{d^2(x-\xi')}{dx^2} + \dfrac{d^2(x-\xi')}{dy^2} + \dfrac{d^2(x-\xi')}{dz^2}\right) \\ \qquad\qquad + 2\,m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt} - \dfrac{dx'}{dt}\right), \\ \mu\,\dfrac{d^2(y-\eta')}{dt^2} = \omega^2\left(\dfrac{d^2(y-\eta')}{dx^2} + \dfrac{d^2(y-\eta')}{dy^2} + \dfrac{d^2(y-\eta')}{dz^2}\right) \\ \qquad\qquad + 2\,m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt} - \dfrac{dy'}{dt}\right). \end{cases}$$

Darin bedeuten x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten der gemeinschaftlichen Gleichgewichtslage der in demselben Volumenelement enthaltenen Körpermasse m und Aethermasse μ, und x', y', z'; ξ, η', ζ' ihre resp. Coordinaten zur Zeit t. Ferner ist:

$$
(3)\begin{cases}
N_1 = p_1^2 u_1^2 + p_2^2 v_1^2 + p_3^2 w_1^2\\
N_2 = p_1^2 u_2^2 + p_2^2 v_2^2 + p_3^2 w_2^2\\
N_3 = p_1^2 u_3^2 + p_2^2 v_3^2 + p_3^2 w_3^2
\end{cases}
$$

$$
(4)\begin{cases}
T_1 = p_1^2 u_2 u_3 + p_2^2 v_2 v_3 + p_3^2 w_2 w_3\\
T_2 = p_1^2 u_1 u_3 + p_2^2 v_1 v_3 + p_3^2 w_1 w_3\\
T_3 = p_1^2 u_1 u_2 + p_2^2 v_1 v_2 + p_3^2 w_1 w_2,
\end{cases}
$$

wo p_1, p_2, p_3 die mit 2π multiplicirten Schwingungszahlen der Eigenschwingungen darstellen, deren das Molekül parallel zu seinen drei Elasticitätsaxen fähig ist.

Man genügt den obigen Differentialgleichungen durch das Werthsystem:

$$
(5)\begin{cases}
x-\xi' = Al, \quad y-\eta' = Bl, \quad z-\zeta' = 0,\\
x'-x = Ll, \quad y'-y = Ml, \quad z'-z = 0,\\
\qquad l = e^{-(K + \frac{q}{c}i)z + qit},
\end{cases}
$$

worin q die mit 2π multiplicirte Schwingungszahl der fortgepflanzten Welle ausdrückt, während die Constanten A, B, L, M, ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c und das Absorptionsvermögen K noch zu bestimmen sind.

Setzt man die Werthe (5) in die Gleichungen (2), so werden sie:

$$
\mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2\,m\nu q i\left(1 + \frac{L}{A}\right) = 0,
$$

$$
\mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2\,m\nu q i\left(1 + \frac{M}{B}\right) = 0,
$$

und zeigen zunächst, dass

$$(6) \qquad \frac{L}{A} = \frac{M}{B} = \varrho$$

sein muss, während zur Bestimmung von K und c die einzige complexe Gleichung

$$(7) \quad \mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2\,m\nu qi(1 + \varrho) = 0$$

zurückbleibt.

Die Gleichungen (1) dagegen nehmen nach Substitution der Werthe (5) die folgende Gestalt an:

$$(N_1 - q^2 + 2(k-\nu)qi)\,L + (T_3 + 2\,\delta w_3^2 qi)\,M - 2\,\nu qiA = 0,$$
$$(N_2 - q^2 + 2(k-\nu)qi)\,M + (T_3 - 2\,\delta w_3^2 qi)\,L - 2\,\nu qiB = 0,$$

oder wenn man gemäss (6) $L = A\varrho$, $M = B\varrho$ einführt und

$$(8) \qquad 2\,qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right) = s$$

setzt:

$$(9) \begin{cases} N_1 - q^2 - s + \left(T_3 + 2\,\delta w_3^2 qi\right)\dfrac{B}{A} = 0, \\ N_2 - q^2 - s + \left(T_3 - 2\,\delta w_3^2 qi\right)\dfrac{A}{B} = 0. \end{cases}$$

Werden diese beiden Gleichungen, nachdem

$$(10) \qquad \frac{B}{A} = \beta$$

gesetzt worden, von einander abgezogen, so ergibt sich zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$(11) \quad (T_3 + 2\,\delta w_3^2 qi)\beta^2 - (N_2 - N_1)\beta - (T_3 - 2\,\delta w_3^2 qi) = 0,$$

aus welcher zwei Werthe von β, nämlich

$$(12) \qquad \beta = \frac{T_3 - 2\,\delta w_3^2 q i}{T_3^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2} \times$$
$$\left(\tfrac{1}{2}(N_2 - N_1) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}\right),$$

hervorgehen, zu welchen vermöge (9) die folgenden zwei Werthe von s sich zuordnen:

$$(13) \qquad s = \tfrac{1}{2}(N_1 - q^2 + N_2 - q^2)$$
$$\pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}.$$

Da nach (8):

$$\varrho = \frac{si + 4\,\nu(k - \nu)q^2}{s^2 + 4\,(k - \nu)^2 q^2}$$

ist, so zerfällt die Gleichung (7) in folgende zwei:

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{K^2}{q^2} = \dfrac{\mu}{\omega^2}\left(1 + \dfrac{4\,m\nu^2}{\mu} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2}\right), \\[2ex] 2 \cdot \dfrac{K}{q} \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{\mu}{\omega^2} \cdot \dfrac{2\,m\nu}{\mu q} \cdot \dfrac{s^2 + 4\,k(k - \nu)q^2}{s^2 + 4\,(k - \nu)^2 q^2}, \end{cases}$$

aus welchen sich, wenn man zur Abürzung

$$(15) \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{4\,m\nu^2}{\mu} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2} = P \\[2ex] \dfrac{2\,m\nu}{\mu q} \cdot \dfrac{s^2 + 4\,k(k - \nu)q^2}{s^2 + 4\,(k - \nu)^2 q^2} = Q \end{cases}$$

setzt und $\omega/\sqrt{\mu}$, d. i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether, gleich 1 annimmt, c und K wie folgt ergeben:

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} + P\right), \\[2ex] \dfrac{K^2}{q^2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} - P\right). \end{cases}$$

Jedem der beiden Werthe von s oder β, welche wir fortan mit s_1, s_2 und β_1, β_2 bezeichnen wollen, entspricht hienach ein zugehöriger Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (c_1 und c_2) und des Absorptionsvermögens (K_1 und K_2).

Es ist aber

$$\beta_1 = \frac{T_2 - 2\,\delta w_3^2 qi}{T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2} + \tfrac{1}{2}(N_2 - N_1)\right),$$

oder, wenn man

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\psi = \dfrac{T_2}{\sqrt{T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}}, \\[2ex] \sin\psi = \dfrac{2\,\delta w_3^2 q}{\sqrt{T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}}, \end{cases}$$

und

$$(18)\quad \alpha = \frac{\sqrt{T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2}}{\sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_2^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2} + \tfrac{1}{2}(N_2 - N_1)}$$

setzt,

$$(19)\qquad \beta_1 = \frac{1}{\alpha}\cdot e^{-\psi i} \quad \text{und} \quad \beta_2 = -\alpha\,.\,e^{-\psi i}.$$

Da sonach $A = B/\beta_1 = \alpha e^{\psi i} B$ ist, so erhält man, indem man der Einfachheit wegen ξ statt $x - \xi'$ und η statt $y - \eta'$ schreibt, zur Geschwindigkeit c_1 gehörig die beiden Schwingungscomponenten:

$$\xi_1 = \alpha B e^{-(K_1 + \frac{q}{c_1} i)z + qit + \psi i}, \quad \eta_1 = B e^{-(K_1 + \frac{q}{c_1} i)z + qit};$$

und ebenso, da $B = \beta_2 A = -\alpha e^{-\psi i} A$ ist, die mit der Geschwindigkeit c_2 sich fortpflanzenden Schwingungen:

$$\xi_2 = Ae^{-(K_2+\frac{q}{c_2}i)z+qit}, \quad \eta_2 = -\alpha A e^{-(K_2+\frac{q}{c_2}i)z+qit-\psi i},$$

oder, wenn man bloss die reellen Antheile dieser Ausdrücke beibehält:

$$(20)\quad \begin{cases} \xi_1 = \alpha B e^{-K_1 z} \cos(qt - \frac{q}{c_1}z + \psi), \\ \eta_1 = B e^{-K_1 z} \cos(qt - \frac{q}{c_1}z), \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \xi_2 = A e^{-K_2 z} \cos(qt - \frac{q}{c_2}z), \\ \eta_2 = -\alpha A e^{-K_2 z} \cos(qt - \frac{q}{c_2}z - \psi). \end{cases}$$

Indem man zur Abkürzung $Be^{-K_1 z} = a_1$, $Ae^{-K_2 z} = a_2$ setzt, erkennt man leicht, dass ξ_1, η_1 einerseits und ξ_2, η_2 andrerseits resp. die Coordinaten der beiden Ellipsen:

$$(22)\quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2 a_1^2} + \frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{2\,\xi_1\eta_1\cos\psi}{\alpha a_1^2} = \sin^2\psi$$

und

$$(23)\quad \frac{\xi_2^2}{a_2^2} + \frac{\eta_2^2}{\alpha^2 a_2^2} + \frac{2\,\xi_2\eta_2\cos\psi}{\alpha a_2^2} = \sin^2\psi$$

sind, und es ergibt sich somit, dass nach der gegebenen Richtung in dem Krystall zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Wellen, deren Bahnellipsen einander ähnlich, aber um einen rechten Winkel gegen einander gedreht sind, mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreiten.

Betrachten wir nun die Bahnellipsen etwas genauer, indem wir z. B. die Gleichung der ersteren (22), welche der grösseren Geschwindigkeit c_1 entspricht, zu ihren Axen transformiren, so bestimmt sich der Winkel φ, welchen die Axenrichtung mit der x-Axe einschliesst, aus der Gleichung:

$$\text{(22)} \qquad tg 2\varphi = -\frac{2\,\alpha\cos\psi}{1-\alpha^2},$$

welche, wenn statt α und $\cos\psi$ die obigen Werthe eingesetzt werden, in

$$\text{(24a)} \qquad tg 2\varphi = -\frac{2\,T_3}{N_2 - N_1}$$

sich umgestaltet.

Nun haben wir früher[1]) gezeigt, dass die Schwingungsrichtungen und die Geschwindigkeiten der beiden geradlinig polarisirten Wellen, welche sich in dem Krystall bei gewöhnlicher Doppelbrechung fortpflanzen, durch die Axen der Ellipse

$$(N_1 - q^2)x^2 + (N_2 - q^2)y^2 + 2\,T_3 xy = 1$$

bestimmt werden, welche ein senkrecht zur Wellennormale geführter Diametralschnitt des „Absorptionsellipsoides" ist, dessen Gleichung, auf das Coordinatensystem der Haupt-Elasticitätsaxen bezogen,

$$(p_1^2 - q^2)x_1^2 + (p_2^2 - q^2)y_1^2 + (p_3^2 - q^2)z_1^2 = 1$$

lautet. Transformirt man auch diese Ellipse zu ihren Axen, so ergibt sich der Winkel φ', den die Axenrichtung mit der Richtung der x bildet, aus der Gleichung

$$tg 2\varphi' = -\frac{2\,T_3}{N_2 - N_1},$$

also genau wie oben (24a). Die Axenrichtungen der Bahnellipse (22) fallen sonach mit denjenigen der letzteren Ellipse zusammen, und man überzeugt sich leicht, dass die grosse

1) Theorie der Doppelbrechung, Wied. Ann. 4. p. 60.

Axe der ersteren mit derjenigen Axe der letzteren coincidirt, zu welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_1 gehört. Es ergibt sich also, dass die grossen Axen der beiden Bahnellipsen dieselbe Lage haben, wie die gradlinigen Schwingungen, welche sich mit den entsprechenden Geschwindigkeiten in dem Krystall fortpflanzen würden, wenn seine Moleküle symmetrisch gebaut wären.

Vermöge derselben Transformationsrechnung findet man sofort auch das Axenverhältniss γ der beiden Bahnellipsen, nämlich:

$$\gamma = \frac{2\,\alpha \sin\psi}{1 + \alpha^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\,\alpha^2 \cos^2\psi}}, \tag{22}$$

oder auch, wenn man statt α und ψ ihre obigen Werthe einführt:

$$\gamma = \frac{2\,\delta w_3^2 q}{\sqrt{\frac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\,\delta^2 w_3^4 q^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2}}. \tag{25a}$$

Dieses Verhältniss wird $= 0$, wenn $w_3 = 0$ ist, d. h. nach allen Richtungen senkrecht zur Schraubenaxe pflanzen sich geradlinig polarisirte Strahlen fort, und zwar, wie schon aus den Grundgleichungen (1) hervorgeht, nach den Gesetzen der gewöhnlichen Doppelbrechung.

Das Verhältniss γ wird dagegen $= 1$, wenn $T_3 = 0$ und $N_2 = N_1$ wird, d. h. wenn der obige Diametralschnitt des Absorptionsellipsoids mit der Wellenebene ein Kreis ist, oder wenn die Wellennormale mit einer der beiden optischen Axen zusammenfällt. Die optischen Axen sind also jetzt dadurch ausgezeichnet, dass sich in ihrer Richtung zwei entgegengesetzt kreisförmig polarisirte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Ihre Lage ist, wie man sieht, von der Grösse δ unabhängig und demnach genau dieselbe, welche sie unter den nämlichen Elasticitätsverhältnissen in einem Krystall ohne Rotationsvermögen besitzen würden. Diese Circularpolarisation kann indessen nur dann eintreten, wenn die Schraubenaxe in die Richtung der grössten oder der kleinsten molekularen Elasticität fällt; wenn dagegen die Schraubenaxe mit der Richtung mittlerer Elasticität zusammenfällt, und demnach senkrecht steht zur Ebene der optischen Axen, so findet in dieser, wegen $w_3 = 0$, Doppelbrechung nach den gewöhnlichen Gesetzen statt.

Der Phasenunterschied D der beiden elliptischen Wellen ist:

$$D = qz\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) = qz \cdot \frac{\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}}{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}}.$$

Bei farblos durchsichtigen Krystallen, für welche das Absorptionsvermögen K sehr klein und demnach (zufolge der zweiten Gleichung 16) auch Q sehr klein ist, kann man genähert

$$\frac{1}{c^2} = P$$

nehmen. Vernachlässigt man in dem Nenner des Ausdrucks P (erste der Gleichungen 15) auch noch die kleine Grösse $4(k-\nu)^2q^2$ gegenüber s^2, so erhält man:

$$\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} = P_2 - P_1 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right) = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{s_1 - s_2}{s_1 s_2},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (13):

$$(26) \qquad D = qz \cdot \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{2}{s_1 s_2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\delta^2 w_3^2 q^2}.$$

Statt wie bisher die Richtung der Wellennormale durch die Cosinus u_3, v_3, w_3 der drei Winkel, welche sie mit den drei Hauptelasticitätsaxen einschliesst, anzugeben, führen wir jetzt die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 ein, welche sie mit den beiden optischen Axen, d. i. mit den Normalen der Kreisschnitte des Ellipsoids

$$(p_1^2 - q^2)x_1^2 + (p_2^2 - q^2)y_1^2 + (p_3^2 - q^2)z_1^2 = 1$$

bildet. Die reciproken Quadrate s'_1 und s'_2 der Halbaxen des der Wellenebene parallelen Diametralschnitts sind alsdann bekanntlich durch die Gleichungen:

$$s'_1 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - 2q^2) + \tfrac{1}{2}(p_1^2 - p_3^2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$s'_2 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - 2q^2) + \tfrac{1}{2}(p_1^2 - p_3^2)\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

ausgedrückt, aus welchen

$$s'_1 - s'_2 = (p_1^2 - p_3^2)\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2$$

folgt. Anderseits ergibt sich aus der Gleichung dieses Diametralschnitts:

$$(N_1 - q^2)x^2 + (N_2 - q^2)y^2 + 2T_3xy = 1$$

die nämliche Differenz in folgender Gestalt:

$$s'_1 - s'_2 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2},$$

so dass man hat:

$$(27)\quad \tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 = \left(\tfrac{1}{2}(p_1^2 - p_3^2)\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right)^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit Θ den Winkel, den jede der optischen Axen mit der z_1-Axe (d. ist mit der zur Schraubenaxe parallelen Haupt-Elasticitätsrichtung) bildet, so ist

$$\cos\vartheta_1 = u_3\sin\Theta + w_3\cos\Theta$$
$$\cos\vartheta_2 = - u_3\sin\Theta + w_3\cos\Theta,$$

folglich:

$$w_3 = \frac{\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2}{2\cos\Theta},$$

oder, da

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{p_2^2 - p_3^2}{p_1^2 - p_3^2}}$$

ist:

$$(28) \qquad w_3^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{p_1^2 - p_3^2}{p_2^2 - p_3^2}\left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right)^2.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (27) und (28) gestaltet sich nun der Ausdruck für den Phasenunterschied wie folgt:

$$(26a) \qquad D = qz \cdot \frac{4\,m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{p_1^2 - p_3^2}{p_2^2 - p_3^2} \cdot \frac{(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)^2}{s_1 s_2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)} \times$$

$$\sqrt{\left((p_2^2 - p_3^2) \cdot \frac{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2}{(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)^2}\right)^2 + \delta q^2}.$$

Hierin sind die Grössen s_1, s_2, c_1, c_2 nach Massgabe der Gleichungen (13), (15) und (16) ebenfalls noch von der Richtung der Wellenormale (oder von ϑ_1 und ϑ_2) abhängig. Man wird jedoch, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, statt ihrer auch die Werthe s'_1, s'_2, c'_1 und c'_2 setzen dürfen, welche für den nämlichen Krystall bei normaler Doppelbrechung ($\delta = 0$) gelten würden, ja man wird, falls ϑ_1 und ϑ_2 hinreichend klein sind, den Nennér

$$s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$$

als constant ansehen dürfen, indem man ihm denjenigen Werth beilegt, welchen er für die z_1-Axe annimmt.

Werden jetzt auch noch in den Ausdruck für das Axenverhältniss (25a) die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 eingeführt, so stellt sich derselbe noch in folgender Form dar:

$$(25\text{b})\quad \gamma = \delta q : \left((p_2^2 - p_1^2) \frac{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2}{(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)^2} + \sqrt{\left((p_2^2 - p_1^2) \frac{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2}{(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)^2} \right)^2 + \delta^2 q^2} \right)$$

Die bisherigen Entwickelungen gelten ganz allgemein für zweiaxige Krystalle. Man erhält aus ihnen die für einaxige Krystalle giltigen Formeln, wenn man $p_2 = p_1$ und sonach $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ setzt, wo nun $\vartheta = \arccos w_3$ den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der optischen Axe, die zugleich die Axe des schraubenartigen Baues ist, einschliesst. Der Phasenunterschied wird alsdann:

$$(29)\qquad D = qz \cdot \frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{\cos^2\vartheta}{s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} \sqrt{\left((p_1^2 - p_3^2) \operatorname{tg}^2\vartheta \right)^2 + 4^2 \delta^2 q^2}.$$

Nun ist aber, wenn wir die bereits oben angewendete Annäherung zulassen:

$$\frac{1}{c_1^2} - 1 = \frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{s_1}, \qquad \frac{1}{c_2^2} - 1 = \frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{s_2},$$

folglich:

$$\frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{s_1 s_2} = \frac{\mu}{4\, m\nu^2} \cdot \left(\frac{1}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{c_2^2} - 1 \right).$$

Mit demselben Grade der Annäherung hat man ferner [1]):

$$p_1^2 - q^2 = \frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{n^2 - 1}, \quad p_3^2 - q^2 = \frac{4\, m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{n'^2 - 1},$$

1) Wied. Ann. Bd. 4. p. 65. 1878.

also:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4\,m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{n'^2 - n^2}{(n^2 - 1)(n'^2 - 1)},$$

wo n' den Hauptbrechungscoefficienten der aussergewöhnlichen, n denjenigen der gewöhnlichen Strahlen bezeichnet. Nach Einsetzung dieser Werthe ergibt sich:

$$\text{(30)} \qquad D = qz \cdot \frac{\left(\frac{1}{c_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{c_2^2} - 1\right)}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{n'^2 - n^2}{(n^2 - 1)(n'^2 - 1)} \sin^2\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\mu\delta}{m\nu^2}\, q\cos^2\vartheta\right)^2}.$$

Wenn der Winkel ϑ klein ist, sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 nur wenig von einander und von derjenigen Geschwindigkeit verschieden, welche bei Abwesenheit des Rotationsvermögens längs der Krystallaxe stattfinden würde. Man kann daher genähert

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = n$$

annehmen. Ersetzt man ferner q durch seinen Werth $2\pi/\lambda$, und dividirt beiderseits durch $2\pi z$, so dass die Formel nun den Gangunterschied

$$d = \frac{D}{2\pi z}$$

für die Einheit der im Krystall durchlaufenen Strecke nach Wellenlängen gemessen angibt, so hat man:

$$\text{(31)} \qquad d =$$

$$\sqrt{\left(\frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} \cdot \frac{n'^2 - n^2}{2\,n\lambda} \sin^2\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\pi\mu\delta}{m\nu^2} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2} \cos^2\vartheta\right)^2}.$$

Hieraus ergibt sich der Gangunterschied d_0 in der Richtung der Axe (für $\vartheta = 0$):

$$d_0 = \frac{\pi\mu\delta}{m\nu^2} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2},$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$a = \frac{\pi\mu\delta}{m\nu^2}$$

gesetzt wird:

$$(32) \qquad d_0 = a \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2}.$$

Setzen wir noch der Kürze wegen:

$$(33) \qquad b = \frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} \cdot \frac{n'^2 - n^2}{2n\lambda},$$

so erhalten wir für den Gangunterschied:

$$(34) \qquad d = \sqrt{(b\sin^2\vartheta)^2 + (d_0\cos^2\vartheta)^2},$$

und für das Axenverhältniss:

$$(35) \quad \gamma = \frac{d_0\cos^2\vartheta}{b\sin^2\vartheta + \sqrt{(b\sin^2\vartheta)^2 + (d_0\cos^2\vartheta)^2}}.$$

Diese beiden Gleichungen haben genau dieselbe Form wie diejenigen von Cauchy, mit welchen Jamin[1]) seine am Bergkrystall durchgeführten zahlreichen Messungen der Grössen d und γ verglichen hat, nur dass nach Cauchy

$$b = \frac{n}{n'} \cdot \frac{n' - n}{\lambda}$$

sein soll.

---

1) Jamin, Mémoire sur la double Réfraction elliptique du Quartz. Ann. de Chimie et de Physique. 3. Série. Tome 30. p. 55. 1850.

Jamin gibt die Wellenlänge des weissen Lichts, auf welches sich seine Beobachtungen beziehen, zu $\lambda = 0{,}000561$ mm an. Nehmen wir für n' und n aus den Beobachtungen von Mascart die Werthe für die Fraunhofer'sche Linie D, deren Wellenlänge der obigen am nächsten kommt, nämlich $n' = 1{,}55338$ und $n = 1{,}54423$, so ergibt sich nach Formel (33):

$$b = 16{,}030$$

während d_0 nach Jamins Messung den Werth 0,1200 hat. Indem Jamin den von Malus gegebenen Werth von n (1,5484) benutzt und $n' - n$ durch directe Messung zu 0,00905 bestimmt, findet er nach Cauchy's Formel:

$$b = 16{,}034.$$

Der Umstand, dass der Werth von b, welchen Jamin seiner Rechnung zu Grunde gelegt hat, so genau mit dem aus unserer Formel (33) sich ergebenden übereinstimmt, hat zur Folge, dass diese Rechnung unmittelbar als Bestätigung unserer Theorie anzusehen ist, und daher nicht wiederholt zu werden braucht.

Zu einer weiteren Bestätigung unserer Theorie gibt die Formel (32) Anlass. Dem Gangunterschiede d_0 ist nämlich die Drehung $\varDelta$ der Polarisationsebene proportional, welche eine senkrecht zur Axe geschnittene Bergkrystallplatte hervorbringt, oder es ist

$$\varDelta = C \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2}. \qquad (36)$$

Die folgende Tabelle, in welcher die von Stefan beobachteten Werthe der Drehungen für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien mit den aus Formel (36) unter Zugrundelegung der von Mascart gemessenen Brechungscoefficienten und der von Ketteler angewendeten Wellenlängen berechneten zusammengestellt sind, zeigt, dass die

Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung eine sehr befriedigende ist.

Tabelle.

Drehung der Polarisationsebene im Quarz.

$\log C = 0{,}7831534$

Fraunhofer'sche Linien	λ	n	Δ beobachtet	Δ berechnet	Differenz
B	0,68661	1,54099	15,55	15,79	— 0,24
C	0,65602	1,54188	17,22	17,35	— 0,13
D	0,58878	1,54423	21,67	21,74	— 0,07
E	0.52680	1,54718	27,46	27,46	0,00
F	0,48597	1.54966	32,69	32,57	+ 0,12
G	0,43077	1,55492	42,37	42,28	+ 0,09
H	0,39674	1,55816	50,98	50,46	+ 0,52

Die Formel (36) stellt übrigens nicht bloss für den Quarz, sondern für alle activen Körper den Zusammenhang dar zwischen der Drehung der Polarisationsebene, der Wellenlänge und dem Brechungscoefficienten; sie ist nichts anderes als das vervollständigte Biot'sche Gesetz. Man darf jedoch bei ihrer Anwendung nicht vergessen, dass sie aus den obigen genauen Formeln vermöge einer Reihe von Approximationen hervorgegangen ist, welche nicht für alle Körper in gleichem Grade zulässig sind, und darf daher auch nicht erwarten, dass sie sich in allen Fällen den Beobachtungen ebenso genau anschliesse wie in obigem Beispiel.

Berichtigung.

In der Abhandlung „Theorie der Drehung der Polarisationsebene" ist zu lesen:

pag. 455 Z. 8 von unten, pag. 456 Z. 2 und Z. 8 von unten, pag. 457 Z. 11 und Z. 13 von unten: k statt K.

pag. 457 Z. 1 von unten, pag. 458 Z. 12 von unten, pag. 459 Z. 7 von unten, pag. 460 Z. 2 und Z. 5 von oben: q statt 9.

pag. 459 Z. 7 von unten: c statt C.