

Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu **München.**

1884. Heft IV.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1885.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 5. Juli 1884.

Herr P. Groth hielt (nach einer Untersuchung des Herrn Dr. H. Beckenkamp in Mülhausen im Elsass) einen Vortrag:

„Ueber die Bestimmung der Elasticitäts-coëfficienten der Krystalle.“

Die in den Arbeiten von Voigt¹⁾ mitgetheilten, auf die Elasticitätstheorie Neumann's gegründeten Formeln zur Bestimmung der Spannungsverhältnisse eines regulären Krystalls, welche aus der Symmetrie nach den drei Hexaëderflächen und der Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen abgeleitet sind, erfordern auch eine Symmetrie der regulären Krystalle nach den Dodekaëderflächen. Diese letztere fehlt nun aber den pentagonal-hemiëdrischen und den tetartoëdrischen Krystallen des regulären Systems, und diese müssten daher nach jener Theorie in Bezug auf die Elasticität eine höhere Symmetrie besitzen, als ihre geometrische Form sie zeigt. Dies ist desshalb unwahrscheinlich, weil die Ungleichwerthigkeit der zur Dodekaëderfläche symmetrischen Richtungen jedenfalls in einer ungleichen Molekularstructur nach diesen Richtungen begründet ist, und weil beispielsweise die Aetzfiguren, deren Form wohl sicher von den Cohäsions-

1) Wiedemann's Ann. d. Phys. 1876, Egbd. 7, 5 u. 1882, 16, 277.

verhältnissen des Krystalls nach verschiedenen Richtungen abhängt, bei den genannten Abtheilungen des regulären Krystallsystems jene höhere Symmetrie nicht zeigen.

Nachdem durch Koch und Warburg¹⁾ ein Apparat, welcher durch Anwendung der Fizeau'schen Methode die Bestimmung der Biegung auch sehr kurzer Stäbe gestattete, vorgeschlagen und dadurch die Möglichkeit eröffnet worden war, die Elasticität zahlreicherer krystallisirter Substanzen zu bestimmen, setzte ich es mir vor, jene auffallenden Folgerungen aus der Neumann'schen Theorie durch Untersuchung hemiëdrischer und tetartoëdrischer Krystalle zu prüfen. Bei einem pentagonal-hemiëdrischen Krystalle müssten nach der Theorie in einer Hauptsymmetrieebene die Elasticitätsverhältnisse die folgenden sein: in den beiden zu einander senkrechten Hauptaxen gleiche Maxima, in den Diagonalen (Normalen der Dodekaëderflächen) Minima der Elasticität — oder umgekehrt — und von den Diagonalen ausgehend nach beiden Seiten symmetrische Zu- resp. Abnahme der Elasticität bis zur Richtung der Hauptaxen. Alsdann müssten beispielsweise die Elasticitätscoefficienten senkrecht zu einem Pentagondodekaëder genau so gross sein, wie in der Normale zu einer Fläche des entgegengesetzten Pentagondodekaëders, während diese beiden Richtungen in krystallographischer Beziehung ungleichwerthig sind. Es kommt also bei der Prüfung jener Theorie darauf an, zu bestimmen, ob die Zu- oder Abnahme der Elasticität mit der Neigung gegen die Dodekaëdernormale innerhalb einer Hexaëderfläche beiderseits symmetrisch verläuft oder nicht. Da es sich hierbei weniger um genaue Bestimmung der absoluten Werthe, sondern nur um die allgemeine Feststellung der Art ihrer Aenderung mit der Richtung und der Lage ihrer Maxima und Minima handelt, so schien es mir genügend, eine nach der Hexaëder-

1) Wiedemann's *Ann. d. Phys.* 1878, 5, 251.

fläche geschnittene kreisförmige dünne Platte auf ihre Biegung nach möglichst vielen verschiedenen Richtungen zu untersuchen. Denn selbst wenn deren Biegung nicht direct den Elasticitätscoefficienten zu berechnen gestatten sollte, so müssen doch die Grössen der Biegungen, welche sich bei gleichen Belastungen ergeben, wenn die Platte durch Drehung in ihrer Ebene nach einander in verschiedenen Richtungen gebogen wird, einen Schluss auf die Symmetrie der den verschiedenen Richtungen entsprechenden Elasticitätsverhältnisse gestatten.

Ich bemühte mich daher, den von Koch und Warburg construirten Apparat so zu modificiren, dass er auch für die Untersuchung kreisförmiger Platten zu verwenden wäre, und liess ein derartiges Instrument vor zwei Jahren durch Herrn Breithaupt in Kassel für das mineralogische Institut der Universität Strassburg ausführen. Mit diesem stellte seitdem Herr Dr. Beckenkamp eine Reihe von Vorversuchen an, welche noch zu verschiedenen Verbesserungen des Apparates führten. Derselbe besteht in seiner jetzigen Gestalt, in welcher Herr Breithaupt vor Kurzem ein zweites Exemplar an das hiesige mineralogische Institut lieferte, aus einem beiderseits unterstützten, sehr starken Stahlstabe, auf welchem die zum Tragen der Platte bestimmten Schneiden ruhen, und der ausserdem das Mikroskop zur Beobachtung der Interferenzstreifen trägt. Dieses Mikroskop kann nun aus der horizontalen Stellung in die verticale gebracht und mittelst zweier Mikrometerschrauben um 4 cm parallel und senkrecht zu der Richtung, in welcher die Biegung erfolgt, verschoben werden; dadurch ist es möglich, die Ränder der Platte einzustellen und ihre symmetrische Lage zu den Schneiden zu controliren.¹⁾

1) Ausserdem gestattet der Apparat noch andere Verwendungen, z. B. durch Anbringung eines einfachen drehbaren Tisches über den

Mit dem Apparate des Strassburger Institutes hat nun Herr Dr. Beckenkamp an dem Alaun, dessen Elasticitätscoefficienten bisher noch nicht bestimmt waren, eine Anzahl Messungen mit Hülfe von orientirten Stäbchen ausgeführt. Diese ergaben:

E parallel einer Hauptaxe	1886,
E parallel einer Dodekaëdernormale	2009.

Diese niedrigen Werthe, verglichen mit denen der bisher untersuchten regulären Krystalle Steinsalz, Sylvin und Natriumchlorat, beweisen, dass im Alaun relativ kleine spannende Kräfte schon grosse molekulare Verschiebungen hervorbringen, und dieser Umstand ist von Interesse mit Rücksicht auf die optischen Anomalien des Alaun, welche Reusch durch schwache, beim Act der Krystallisation auftretende Spannungen erklärt hat. Andererseits ist aber die geringe Differenz der beiden Werthe ungünstig für die Lösung der eingangs gestellten Frage durch Messen der Biegungen einer kreisförmigen Platte, da diese Messungen sehr genau ausfallen müssten, um bei der geringen Verschiedenheit der Elasticität nach verschiedenen Richtungen noch erkennen zu lassen, ob die Vertheilung der Elasticitätsverhältnisse eine symmetrische ist oder nicht. Es handelt sich daher vor weiterer Untersuchung um eine theoretische Prüfung der Frage, in wie weit man aus der beobachteten Biegung einer

Schneiden die Messung der Durchmesser der Senarmont'schen oder Röntgen'schen Wärmeleitungscurve auf Krystallen. Messungen der Gestalt, Dimensionen und Orientirung von Aetzfiguren u. s. w. Zu dem letzteren Zwecke ist ein Faden des Mikroskops drehbar und die Drehung messbar; die Einstellung desselben auf die Kante einer Aetzfigur gestattet nun, die Richtung dieser mit derjenigen einer Krystallkante auch dann zu vergleichen, wenn letztere nicht zugleich im Gesichtsfeld des Mikroskops sichtbar ist, nämlich durch Parallelverschiebung des letzteren mittelst der Mikrometerschrauben.

solchen Platte auf den Werth des Elasticitätscoëfficienten schliessen kann.

Herr Dr. Beckenkamp hat diese Untersuchung nun unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt: die kreisförmige Platte ruht mittelst der Schneiden des Apparates auf zwei gleichen und parallelen Sehnen und wird in einem diesen parallelen Durchmesser mittelst einer dritten Schneide belastet. Dieser Durchmesser werde zur y-Axe, der dazu senkrechte Durchmesser zur x-Axe, die zu beiden senkrechte Dickenrichtung der Platte zur z-Axe genommen; der Nullpunkt sei der Schwerpunkt der Platte. Unter der Annahme, dass der Druck in jedem einzelnen Querschnitt parallel der yz-Ebene sich gleichmässig vertheilt, und dass alle Punkte, welche vor der Biegung in der xz-Ebene liegen, auch nachher in derselben liegen, ergiebt sich für die Berechnung des Elasticitätscoëfficienten aus der beobachteten Biegung die Formel:

$$E = \frac{6P}{n\lambda h^3} \left\{ \left(1^2 + \frac{r^2}{2} \right) \arcsin \frac{1}{r} + \frac{3}{2} l \sqrt{r^2 - 1^2} - 2rl \right\},$$

wo P das belastende Gewicht,
 n die Anzahl der halben Wellenlängen,
 λ die Wellenlänge des angewandten (Na-)Lichtes,
 h die Dicke,
 r der Radius der Platte,
 l der halbe Abstand der Lager.

Die gemachten Annahmen treffen nun aber keinenfalls genau zu, sondern es treten in einer solchen Platte noch Drehungen auf, welche die Beziehung zwischen der Biegung und dem Werthe von E zu einer weit complicirteren machen. Dies bestätigte sich durch einige von Dr. Beckenkamp an einer kreisförmigen Alaunplatte angestellte Versuche, welche merklich zu kleine Werthe ergaben und ausserdem zeigten, dass bei dieser Substanz die Grösse der elastischen

Nachwirkung es verhindert, an einer solchen Platte eine grössere Reihe von Beobachtungen nach einander auszuführen. Dr. Beckenkamp gedenkt daher, nach Beschaffung geeigneten Materials von Alaunkrystallen wieder zu der Methode der Untersuchung dünner Stäbchen, nach möglichst vielen Richtungen geschnitten, zurückzukehren.

Versuche mit Platten von Eisenkies lieferten bisher kein Resultat, weil es noch nicht gelang, genügend homogene Krystalle dieses Minerals zu finden.

Zu einer weiteren, sehr merkwürdigen Folgerung führt die eingangs erwähnte Theorie betreffs der nicht rhomboëdrischen hexagonalen Krystalle. Nach Voigt (Wiedemann's Ann. d. Phys. 16, 416—427) müssten diese nämlich in allen Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Axe bilden, denselben Elasticitätscoefficienten besitzen. Es soll die nächste Aufgabe des Verfassers sein, mit dem im hiesigen Institut vorhandenen Apparat die Elasticität des Beryll und Apatit in verschiedenen zur Hauptaxe normalen Richtungen zu untersuchen.