Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXI. Jahrgang 1891.

München.
Verlag der K. Akademie.
1892.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme.

Von Leo Königsberger in Heidelberg.

(Eingelaufen 7. November.)

Ich erlaube mir im Folgenden einige Sätze bezüglich der Irreductibilität partieller Differentialgleichungssysteme mitzutheilen, deren ausführliche Darlegung nächstens im „Journal für Mathematik" erscheinen wird.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die sich bekanntlich stets auf die Form bringen lässt

$$(1)\qquad \frac{\partial G\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right)}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial z_1} = G_1\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right),$$

worin G und G_1 ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen

$$z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$$

algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(2)\qquad G\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

ist, soll irreductibel genannt werden, wenn keines ihrer Integrale das Element eines Integralsystems irgend eines Systems algebraischer partieller Differentialgleichungen mit beliebig vielen abhängigen und nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln $z_1, z_2 \cdots z_\mu$ bildet, oder, was dasselbe ist, wenn keines ihrer Integrale eine algebraische partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln befriedigt.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ist also irreductibel, wenn sie mit keiner gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung ein Integral gemein hat.

Man zeigt dann leicht,

> dass eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, aber niederen Grades[1]) nie ein Integral gemein haben kann, dass aber, wenn dieselbe mit einem partiellen Differentialgleichungssystem höherer Klasse[2]) oder derselben (ersten) Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integral gemein hat, dann auch sämmtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Elemente von Integralsystemen des partiellen Differentialgleichungssystems bilden werden,

und daraus wieder unmittelbar,

---

1) Der Grad der partiellen Differentialgleichung wird durch den Grad der Gleichung (2) in Bezug auf t definirt.

2) Die Klasse eines partiellen Differentialgleichungssystems wird durch die Anzahl der abhängigen Variabeln bestimmt.

dass, wenn eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung **ein** Integral gemein hat, sie alle Integrale mit derselben gemein haben, also selbst ein algebraisches Integral der letzteren sein muss.

Die angeführten Sätze führen nun mit einigen Modificationen auf die allgemeine Irreductibilitätsdefinition und die aus dieser entspringenden Sätze für beliebige partielle Differentialgleichungssysteme.

Sei das partielle Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse mit den m abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_m$ und den μ unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \cdots z_\mu$ vorgelegt

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = G_1 \\ \dfrac{\partial G}{\partial t_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = G_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial G}{\partial t_1} \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1} = G_m, \end{cases}$$

worin $G_1, G_2, \cdots G_m$ ganze Functionen der Grössen

$$(\alpha) \cdots z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t_1,$$

und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (α) algebraisch irreductiblen Gleichung

$$(4)\ G\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

ist, so soll dasselbe ein **irreductibles** genannt werden, wenn **kein** System von $1, 2, 3, \cdots$ oder $m-1$ Integralelementen $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$ wiederum $1, 2, 3, \cdots$ oder $m-1$ Elemente eines Integralsystems eines partiellen Differentialgleichungssystems beliebiger Klasse und beliebigen Gradesbildet, in welchem von den nach z_1 genommenen partiellen Differentialquotienten nur

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \text{ oder } \cdots, \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \cdots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial z_1}$$

enthalten sind, oder welches die Form hat

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1 \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = v_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdot \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u_k}{\partial z_1} = v_k \\ \psi_{k+1}\Big(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_k, v_1, v_2, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_{k+\varepsilon}, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu}\Big) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{k+\varepsilon}\Big(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_k, v_1, v_2, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_{k+\varepsilon}, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu} \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \end{array} \right.$$

worin k eine der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ bedeuten darf, und $\psi_1, \cdots \psi_{k+\varepsilon}$ algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen sind.

Mit Hülfe dieser Definition lässt sich nun der Fundamentalsatz der Irreductibilität folgendermassen aussprechen:

Wenn **ein** Integralsystem des **irreductibeln** Differentialgleichungssystems (3) einen Theil der Elemente oder alle Elemente eines Integralsystems des algebraischen partiellen Differentialgleichungssystems höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren Grades

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = H_1 \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = H_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial z_1} = H_\lambda \end{array} \right.$$

bildet, worin $H_1, H_2, \cdots H_\lambda$ ganze Functionen der Grössen

$$(\beta) \cdots\cdot z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1,$$

und τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (β) algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(7)\ H\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau\right) = 0$$

ist, so werden alle Integralsysteme von (3) das Differentialgleichungssystem (6) befriedigen.