Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXI. Jahrgang 1891.

München.
Verlag der K. Akademie.
1892.

In Commission bei G. Franz.

Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle.

Von A. Brill in Tübingen.

(Eingelaufen 4. Juli.)

Das Verfahren, nach welchem man eine algebraische Function von einer Veränderlichen in der Nähe einer Stelle, wo sie einfach oder in höherer Ordnung verschwindet, in Potenzreihen zu entwickeln pflegt, rührt bekanntlich von Newton her, der in der Abhandlung „Analysis per quantitatum series, fluxiones" etc. gelegentlich der Auflösung numerischer Gleichungen auch den Fall betrachtet, dass die Coefficienten einer Gleichung nicht Zahlen, sondern von einer Veränderlichen (species indefinita) abhängige Grössen sind. Danach nimmt jede Wurzel die Form einer nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabeln fortschreitenden Reihenentwicklung an; die Coefficienten lassen sich durch Einsetzen bestimmen, wenn zuvor die Bruchformen der Exponenten mit Hilfe des bekannten Parallelogramms ermittelt sind.

Neuere Arbeiten haben sich mit dem Nachweis des Convergenzbereiches dieser Reihen und mit der Beseitigung des Parallelogramms beschäftigt, aber die Grundlage unberührt gelassen. Indessen ist das Newton'sche Verfahren ein indirectes und steht gegenüber einem, das mit identischen Umformungen operirt, in mancher Hinsicht zurück.

Wenn man jede Wurzel ohne Rücksicht auf die bereits gefundenen für sich bestimmt, so bedarf es, bei strenger Behandlung, nachträglich des Beweises der Vollzähligkeit; im Falle einer irreducibeln Gleichung des mühsamen Nachweises, dass alle verschieden sind u. s. w. Dies wird entbehrlich, wenn man jene Reihenentwicklungen nicht durch Verification vorläufiger Annahmen herstellt, sondern durch identische Zerlegung der linken Seite derjenigen Gleichung

$$F(xy) = 0,$$

die in der Umgebung der Stelle, für welche die ganze Function F von x und y verschwindet, y als algebraische Function von x definirt, wobei denn, wenn etwa $x = 0$, $y = 0$ diese Stelle ist, soviele Linearfactoren von der Form:

$$y - \mathfrak{P}(x)$$

entstehen — unter $\mathfrak{P}$ eine mit x verschwindende Potenzreihe verstanden — als Entwicklungen von y nach Potenzen von x existiren, die jene Gleichung befriedigen.

Soviel ich weiss, hat man eine solche directe Zerlegung noch nicht versucht, wiewohl der Gedanke nahe liegt und auch für die Theorie der Functionen von zwei Veränderlichen verwerthbar ist. Eine gewisse Schwierigkeit, der man gleich anfangs begegnet, führte mich auf einen für die Functionentheorie bedeutsamen Satz, der, wie ich später bemerkte, bereits von Herrn Weierstrass in allgemeinster Form ausgesprochen worden ist, und der die Ueberführung der Function $F(xy)$ in eine nothwendige Form bezweckt. An dieser „reducirten" Form vollzieht sich dann die Spaltung in Linearfactoren ohne Weiteres, ausgenommen den Fall, dass sich die Glieder niederster Dimension zu einer Potenz vereinigen. Die quadratische Transformation, deren man sich sonst in diesem Fall zur Trennung der Wurzeln zu bedienen pflegt, reicht nicht aus, wenn es sich darum handelt, den Grad hinsichtlich einer der Variabeln zu erhalten. Ich benutze eine solche von höherer Ordnung, die eindeutig nicht umkehrbar ist. Es ist dann nur noch zu zeigen, dass der Spaltungsprocess convergente Factoren liefert.

Die Ausführung enthält das Folgende.

1.

Wenn für $x = 0$, $y = 0$ die ganze Function, oder, wie ich allgemein annehmen will, die gewöhnliche Potenzreihe nach x, y $F(xy)$ verschwindet, so kann man durch eine Transformation von der Form:

$$x' = x + ay$$

die Reihe F so umgestalten, dass das Aggregat der Glieder niederster (n-ter) Dimension für $x = 0$ sich auf y^n reducirt. Multiplicirt man dann F mit einer Reihe von der Form:

$$\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots,$$

wo die Indices die Dimension des betreffenden Gliedes in x, y angeben, so lässt sich bei passender Bestimmung der Coefficienten der α_i das Product in die Form einer Reihe f bringen:

$$\alpha F = f = f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \cdots,$$

welche y in nicht höherer als der n-ten Potenz enthält. Vergleicht man links und rechts die Glieder gleichhoher Dimension, so erhält man gleichzeitig die Coefficienten der Polynome α_i und der $f^{(i)}_{n-1}$ in eindeutiger Weise. Ich übergehe hier das Nähere dieses Verfahrens sowie auch den leicht zu erbringenden Nachweis, dass es eine innerhalb gewisser Grenzen in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ convergente Reihe f liefert, nachdem dies in anderer Weise von Herrn Weierstrass (Functionentheorie, 1886, S. 107) und in weiterer Ausführung für den Fall von zwei Veränderlichen von Herrn Stickelberger (Math. Annalen Bd. 30) gezeigt worden ist.

Ordnet man f nach Potenzen von y, so kommt, weil y^n nur einmal, nämlich in dem Term niederster Dimension auftritt,

$$\begin{aligned} f &= f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \cdots \\ &= y^n + y^{n-1} x \mathfrak{P}'(x) + y^{n-2} x^2 \mathfrak{P}''(x) + \cdots + x^n \mathfrak{P}^{(n)}(x), \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind.

Wie sich nun eine ganze Zahl dadurch in Primfactoren zerlegen lässt, dass man sie zunächst in das Product von zwei kleineren verwandelt, dann mit diesen so fortfährt, bis man zuletzt bloss Primzahlpotenzen erhält, so kann man die hinsichtlich y ganze Function f zunächst in zwei Entwicklungen zu zerlegen verlangen, die in y von niederem Grade sind als f und wiederum in „reducirter" Form erscheinen, und mit diesen so fortfahren.

Diese Aufgabe lässt immer und nur eine Lösung zu, wenn die Anfangsglieder φ_p und ψ_q der neuen Entwicklungen:

$$\begin{aligned} f = \varphi\psi = & (\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \cdots) \\ & (\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \cdots), \end{aligned}$$

wo
$$f_n = \varphi_p \psi_q$$
also
$$p + q = r$$

ist: 1) durch irgend welche vorgängige Spaltung des homogenen Ausdrucks f_n ermittelt sind und 2) keinen Factor gemeinsam haben.

Vergleicht man nämlich beiderseits die Glieder gleichhoher Dimension, so kommt

$$\begin{aligned} f_n &= \varphi_p \psi_q \\ f_{n-1} &= \varphi_p \psi_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} \\ f'_{n-1} - x \varphi_{p-1} \psi_{q-1} &= \varphi_p \psi'_{q-1} + \psi_q \varphi'_{p-1} \\ f''_{n-1} - x(\varphi_{p-1} \psi'_{q-1} + \psi_{q-1} \varphi'_{p-1}) &= \varphi_p \psi''_{q-1} + \psi_q \varphi''_{p-1} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen identischen Gleichungen lassen sich aber, nach einem bekannten Satze der Algebra, die hinsichtlich

x, y ganzen homogenen Functionen $\varphi_{p-1}, \psi_{q-1}$; $\varphi'_{p-1}, \psi'_{q-1}$; $\cdots$ paarweise der Reihe nach eindeutig bestimmen, wenn man die aus den vorhergehenden berechneten jedesmal in die folgenden Gleichungen einführt. Nur wenn φ_p und ψ_q einen Theiler gemeinsam haben, also insbesondere wenn f_n die n-te Potenz eines Linearfactors ist, versagt das Verfahren. Hat aber f_n ungleiche Linearfactoren, so kann man die Zerlegung von f soweit fortsetzen, bis die Einzelreihen mit Potenzen von Linearfactoren beginnen, und bei bloss ungleichen Factoren von f_n wird durch wiederholte Spaltung f in lauter Linearfactoren (hinsichtlich y) von der Form zerlegt:

$$y + a_0 x + a'_0 x^2 + a''_0 x^3 + \cdots,$$

wo die a_0 Constante sind.

Für diese zunächst formale Operation ist später der Nachweis der Convergenz zu erbringen.

2.

Vorher möge der Fall untersucht werden, dass f_n einen p-fachen Factor $(p > 1)$:

$$\varphi_p = (y + ax)^p$$

besitzt. Die zugehörige Entwicklung, von den anderen abgetrennt, sei von der Form:

$$\varphi = (y + ax)^p + x^2 \Phi_{p-1} + x^3 \Phi'_{p-1} + \cdots$$

Setzt man

$$y + ax = y_1, \qquad x = x_1,$$

so gewinnt φ die Gestalt:

$$\varphi = y_1^p + x_1^2 \varphi_{p-1} + x_1^3 \varphi'_{p-1} + \cdots$$

Man ordne jetzt die Glieder nach ihrem Grad in x_1 und schreibe der Reihe nach diejenigen an, deren Coefficienten von Null verschieden sind

$$y_1^p;\; x_1^\alpha y_1^{p-\beta};\; x_1^\gamma y_1^{p-\delta};\; x_1^\varepsilon y_1^{p-\zeta};\; \cdots$$

wo $\alpha - \beta > 0;\ \gamma - \delta > 0;\ \varepsilon - \zeta > 0; \cdots$

ist und $\alpha \leq \gamma \leq \varepsilon \leq \cdots$

ebenso wie $\beta, \delta, \zeta, \cdots$ ganze positive (von Null verschiedene) Zahlen sind. Nun bilde man die (unächten) Brüche:

$$\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{\gamma}{\delta};\ \frac{\varepsilon}{\zeta}; \cdots,$$

und nehme den dem Werth nach kleinsten. Dies erfordert jedenfalls die Aufstellung nur einer endlichen Zahl von Quotienten, weil ihr Werth mit wachsender Dimensionszahl zunimmt, indem der Zähler wächst, während der Nenner die Grösse p nicht überschreitet.[1])

Sei dieser Quotient, auf die einfachste Form gebracht, gleich $\iota/\varkappa$, seien also ι und $\varkappa$ theilerfremd und

$$\frac{\alpha}{\beta} \geqq \frac{\iota}{\varkappa};\ \frac{\gamma}{\delta} \geqq \frac{\iota}{\varkappa};\ \frac{\varepsilon}{\zeta} \geqq \frac{\iota}{\varkappa}; \cdots$$

Führt man dann in die vorliegende Reihe neue Variabelen ein mittelst der Formeln

$$y_1 = y_2\, x_2^{\iota - 1}$$
$$x_1 = x_2^{\varkappa},$$

so wird das Glied

$$y_1^p = y_2^p\, x_2^{p(\iota-1)}$$

hinsichtlich x_2, y_2 von der Dimension $p\iota$, während die Dimension irgend eines anderen Gliedes

$$y_1^{p-\nu}\, x_1^{\mu}$$

gleich
$$(p-\nu)\iota + \varkappa\mu = p\iota + \nu\varkappa\left(\frac{\mu}{\nu} - \frac{\iota}{\varkappa}\right),$$

also höher als $p\iota$ wird, ausser für diejenigen Glieder, für welche, wie für das den Zahlen $\iota, \varkappa$ entsprechende, jener

1) Man hat höchstens bis zu demjenigen Grad in x_1 fortzuschreiten, der durch die in dem Bruch $\frac{\alpha}{\beta}\, p$ enthaltene ganze Zahl sich ausdrückt.

Quotient den Werth $\iota/\varkappa$ besitzt, wo dann die Dimension ebenfalls gleich $p\iota$ wird. Es existirt also in der transformirten Reihe mindestens noch ein Glied von der Dimension des Anfangsgliedes, während keines von niedrigerer Dimension ist. Aus diesen zweien lässt sich ein Linearfactor von der Form:

$$y_2 + b x_2$$

mit von Null verschiedenem Coefficienten b oder doch eine Potenz eines solchen ausscheiden, was nun, nach Massgabe von § 1, wieder zur Spaltung der Reihe φ verwendet werden kann. Denn die Glieder $(p+1)$-ter und höherer Dimension enthalten y_2 höchstens in der $(p-1)$-ten Ordnung; nach Ausscheidung der $p(\iota-1)$-ten Potenz von x_2 besitzt also φ in x_2, y_2 die in § 1 zu Grunde gelegte reducirte Form:

$$\varphi = x_2^{p\iota-1}(\psi_p + x_2^2\psi_{p-1} + x_2^3\psi'_{p-1} + \cdots).$$

Befindet sich unter den Linearfactoren von ψ_p einer, der nur einmal vorkommt:

$$y_2 + b x_2,$$

so lässt sich nach jenem Verfahren aus ψ der Factor absondern

$$y_2 + b x_2 + b' x_2^2 + \cdots,$$

welcher, nach Vereinigung mit dem Factor $x_2^{\iota-1}$ durch Rücksubstitution von x und y die Gestalt annimmt

$$y_1 + b x_1^{\frac{\iota}{\varkappa}} + b' x_1^{\frac{\iota+1}{\varkappa}} + \cdots = y + a x + b x^{\frac{\iota}{\varkappa}} + b' x^{\frac{\iota+1}{\varkappa}} + \cdots,$$

was einer Entwicklung von y nach gebrochenen Potenzen von x entspricht.

Hat ψ_p dagegen $y_2 + bx_2$ zum q-fachen Factor $(q \leq p)$, so schlage man den gezeigten Weg zur Zerlegung der entsprechenden Entwicklung:

$$\chi = (y_2 + b x_2)^q + \chi_{q+1} + \cdots$$

von neuem ein.

Erhält man an Stelle der früheren Zahlen ι, $\varkappa$ jetzt etwa die Zahlen λ, μ, und scheidet sich aus den Gliedern niederster Dimension der neuen Reihe, die man durch die Substitution:

$$\begin{array}{ll} y_2 + bx_2 & = y_3\, x_3^{\lambda-1} \\ x_2 & = x_3^{\mu} \end{array}$$

erhält, etwa der Linearfactor $y_3 + cx_3$ aus, so bekommt man, wenn dieser nur einmal auftritt, eine Entwicklung von der Form:

$$y_3 + cx_3 + c'x_3^2 + c''x_3^3 + \cdots,$$

die durch rückwärts einführen der alten Variabeln in:

$$y_2 + bx_2 + cx_2^{\frac{\lambda}{\mu}} + c'x_2^{\frac{\lambda+1}{\mu}} + \cdots$$

und weiterhin in:

$$y + ax + bx^{\frac{\iota}{\varkappa}} + cx^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)}{\varkappa\mu}} + c'x^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)+1}{\varkappa\mu}} + \cdots$$

übergeht.[1])

Tritt dagegen der Factor $y_3 + cx_3$ mehrfach auf, so hat man wiederum zunächst eine Substitution vorzunehmen u. s. w. Da die Ordnung des ersten Gliedes hinsichtlich y bei jeder neuen Abscheidung, die möglich wird, sich erniedrigt, so hat das angegebene Verfahren im Allgemeinen ein Ende.

---

1) Aus den Zahlen, vermöge deren oben die Exponenten der successiven Transformation gebildet wurden,

$$\frac{\iota}{\varkappa},\ \frac{\lambda}{\mu},\ \frac{\nu}{\varrho},\cdots$$

entstehen diejenigen Exponenten der Reihe in x, die H. J. S. Smith „kritische", Halphen „charakteristische" Zahlen genannt hat. Unter den Brüchen:

$$\frac{\iota}{\varkappa},\ \frac{\iota}{\varkappa}+\frac{\lambda-\mu}{\mu\varkappa},\ \frac{\iota}{\varkappa}+\frac{\lambda-\mu}{\mu\varkappa}+\frac{\nu-\varrho}{\varrho\mu\varkappa},\cdots$$

sind es diejenigen, für welche die hinzutretenden Factoren des Nenners: $\varkappa, \mu, \varrho, \cdots$ von 1 verschieden sind.

Nur in dem einen Fall, dass das erste Glied der transformirten Reihe selbst die Potenz eines linearen Ausdrucks $y_\nu + k x_\nu$ von der Höhe desjenigen der vorhergehenden Reihe ist, also wenn z. B. oben die Function ψ_p wieder p gleiche Factoren besitzt, ist zunächst eine Abscheidung unmöglich. Man wiederhole dann das Verfahren so oft, bis die Factoren verschieden werden. Erhält man aber immer wieder nur p-te Potenzen, so muss man schliessen, dass die vorliegende Reihe überhaupt die p-te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ ist, wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe ist.

In der That, wenn ψ_p (s. oben) eine p-te Potenz ist, wie φ_p, so muss zunächst $\varkappa = 1$ sein. Denn die Rücktransformation:

$$x_2 = x_1^{\frac{\iota}{\varkappa}}\,;\; y_2 = y_1 x_1^{\frac{1-\iota}{\varkappa}},$$

auf das Anfangsglied von φ:

$$x_2^{p(\iota-1)}\psi_p = [(y_2 + b\, x_2)\, x_2^{\iota-1}]^p = \Sigma^\varrho \tbinom{p}{\varrho} (y_2 x_2^{\iota-1})^{p-\varrho}\, b^\varrho\, x_2^{\iota\varrho}$$

($\varrho = 0, 1, \cdots p$) angewandt, liefert:

$$\Sigma^\varrho \tbinom{p}{\varrho} y_1^{p-\varrho}\, b^\varrho\, x_1^{\frac{\iota\varrho}{\varkappa}},$$

also nur dann ganzzahlige Exponenten von x_1, wenn:

$$\varkappa = 1$$

ist. — Wendet man ferner jene Rücksubstitution (mit $\varkappa = 1$) auf die Glieder höherer Dimension $\psi_{p+\sigma}$ $(\sigma \geqq 1)$ an:

$$x_2^{p(\iota-1)}\psi_{p+\sigma} = \Sigma^\varrho\, A_\varrho\, y_2^{p-\varrho}\, x_2^{\varrho+\sigma}\, x_2^{p(\iota-1)}$$

($\varrho = 1, 2, \cdots p$), wo A_ϱ ein Coefficient ist, so kommt:

$$\Sigma^\varrho A_\varrho\, y_1^{p-\varrho}\, x_1^{\iota\varrho+\sigma}.$$

Es ergeben sich also nur Glieder, die bei gleicher Ordnung in y_1 von höherer Ordnung in x_1 sind, wie die bei der Rücktransformation aus ψ_p hervorgegangenen. Dies gilt auch noch nach Einführung von $x = x_1$, $y = y_1 - a x_1$. Weil nun für jede Wiederholung des Transformationsprocesses, sofern immer wieder eine p-te Potenz auftritt, die gleiche Bemerkung gilt, so wird die nach mehrmaliger Wiederholung erhaltene Reihe:

$$\varphi = x_\nu^N [(y_\nu + m x_\nu)^p + \vartheta_{p+1} + \vartheta_{p+2} + \cdots]$$

nach erfolgter Rückwärts-Einführung der Variabeln x, y in die Form übergehen:

$$\varphi = (y + a x + b x^\iota + c x^{\iota+\lambda-1} + \cdots k x^K)^p + \Phi(x, y),$$

wo Φ höchstens von der $(p-1)$-ten Ordnung in y und in Bezug auf x in jedem Glied von höherer Ordnung ist, wie die hinsichtlich y gleich hohen Glieder der p-ten Potenz des Linearfactors.

Weil nun, wenn man den Process unbegrenzt oft wiederholt, der Exponent K unbegrenzt wächst, so geht φ in die p-te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ über, wo in $\mathfrak{P}$ nur ganzzahlige Exponenten vorkommen, w. z. b. w.

Ist insbesondere die Ausgangsfunction $F(xy)$ (§ 1) hinsichtlich der Veränderlichen x, y irreducibel, so können sich nicht immer nur wieder p-te Potenzen als Anfangsglieder ergeben. Denn enthielte die reducirte Form $f(xy)$ einen Factor von der Gestalt:

$$[y + \mathfrak{P}(x)]^p,$$

wo $p > 1$ ist, so würde aus der in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ identischen Gleichung

$$\alpha F = f$$

folgen, dass nicht nur F ihn besitzt, sondern auch der Differentialquotient von F nach y, was mit dem Begriff der Irreducibilität unvereinbar ist.

In allen Fällen gelangt man durch das angegebene Verfahren zu einer Zerlegung der Reihe f in Linearfactoren, und zwar zu einer einzigen. Denn wären zwei verschiedene Zerlegungen möglich, also zugleich:

$$f = (y - \mathfrak{P})(y - \mathfrak{P}') \cdots (y - \mathfrak{P}^{(n-1)})$$
$$= (y - \mathfrak{Q})(y - \mathfrak{Q}') \cdots (y - \mathfrak{Q}^{(n-1)}),$$

und die $\mathfrak{P}$ von den $\mathfrak{Q}$ verschieden, so müsste, weil das eine Product für $y = \mathfrak{P}$ verschwindet, dies auch mit dem anderen der Fall sein, also etwa $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ sein. Dann könnte man beiderseits mit $x - \mathfrak{P}$ dividiren und die Uebereinstimmung eines weiteren Linearfactors links und rechts nachweisen u. s. w.

3.

Es erübrigt nun noch, einen Giltigkeitsbereich nachzuweisen für den in § 1 angegebenen Process der Spaltung der Reihe f in die beiden φ, ψ:

$$f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + x^4 f''_{n-1} + \cdots \equiv$$
$$\equiv (\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \cdots)$$
$$(\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \cdots), \tag{1}$$

wo

$$f_n = \varphi_p \psi_q$$
$$n = p + q$$

ist. Zu dem Zweck wird hinsichtlich der Coefficienten von f die Annahme gemacht, dass sie dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ sind, ein Verhalten, das sich, sofern f überhaupt in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ convergirt, durch eine Transformation von der Form $x = \varrho x'$ und Division der Identität $f = \varphi \psi$ mit einer passend gewählten Constanten immer herstellen lässt.

Man bemerke zunächst, dass die aus der Identität (1) fliessenden Einzelgleichungen nach § 1 alle von der Form sind:

$$\Psi_{q-1} \varphi_p + \Phi_{p-1} \psi_q = F_{n-1} \tag{2}$$

wo $F_{n-1} = A^{(0)} y^{n-1} + \binom{n-1}{1} A^{(1)} y^{n-2} x + \binom{n-1}{2} A^{(2)} y^{n-3} x^2$
$+ \cdots + A^{(n-1)} x^{n-1}$

eine bekannte, φ_p, ψ_q ebensolche theilerfremde, Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} gesuchte, in x, y homogene Functionen sind. Die Coefficienten der letzteren bestimmen sich aus den $n = p + q$ linearen Gleichungen, die man durch Gleichsetzen der Coefficienten von $y^{n-1}, y^{n-2}x, \cdots x^{n-1}$ links und rechts erhält, und zwar enthalten die Ausdrücke die Coefficienten $A^{(i)}$ von F linear und homogen. Irgend ein Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} stellt sich also durch eine Summe dar von der Form:

$$\alpha^{(k)} = \Sigma A^{(i)} R^{(ik)},$$

wo die $R^{(ik)}$ nur noch von den Coefficienten von φ_p, ψ_q abhängen. Ist nun unter allen Ausdrücken $R^{(ik)}$ der dem absoluten Betrag nach grösste absolut genommen $= \frac{\varrho}{n}$, so genügt jeder Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} der Ungleichung:

$$|\alpha^{(k)}| < \varrho A, \tag{2a}$$

wenn A der grösste unter den Coefficienten $|A^{(i)}|$ von F ist. Nun lautet die erste der aus (1) folgenden Identitäten:

$$\varphi_p \psi_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} = f_{n-1},$$

wo φ_p, ψ_q gegeben sind. Die absoluten Beträge der Coefficienten von $\varphi_{p-1}, \psi_{q-1}$ vergrössern sich, wenn man hier statt der Coefficienten von f_{n-1} die zu grossen Werthe 1 einsetzt, also statt f_{n-1} die Function:

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}$$

oder statt ihrer:

$$(x + y)^{n-1}$$

einträgt. Nach 2a erhält man so für den dem absoluten Betrag nach grössten Coefficienten α von φ_{p-1} und ψ_{q-1} die Ungleichung:

$$|\alpha| < \varrho,$$

wo ϱ dieselbe Bedeutung wie oben hat.

Die anderen Identitäten sind sämmtlich von der Form:

$$\psi_{q-1}^{(k)}\varphi_p + \varphi_{p-1}^{(k)}\psi_q - f_{n-1}^{(k)} - x(\psi_{q-1}^{(k-1)}\varphi_{p-1} + \varphi_{p-1}^{(k-1)}\psi_{q-1} + \psi_{q-1}^{(k-2)}\varphi'_{p-1} + \varphi_{p-1}^{(k-2)}\psi'_{q-1} + \cdots) - F_{n-1}^{(k)} \qquad (3)$$

Es erhöht sich wiederum der absolute Betrag der Coefficienten in F, wenn man:

1. Statt der Coefficienten der Einzelfactoren ihre absoluten Beträge einsetzt.
2. Die Coefficienten in $f_{n-1}^{(k)}$ allenthalben gleich 1 macht.
3. Für diejenigen von φ, ψ; bezw. φ', ψ'; $\cdots\ \varphi^{(k-1)}$, $\psi^{(k-1)}$ gewisse sogleich zu bestimmende zu grosse Beträge α bezw. $\alpha', \alpha'', \cdots\ \alpha^{(k-1)}$ einträgt.

Tritt auf diese Weise an Stelle von $F_{n-1}^{(k)}$ die Function:

$$(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots x^{n-1}) + x(y^{p-1} + \cdots + x^{p-1})$$
$$(y^{q-1} + \cdots + x^{q-1})(2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots)$$

oder gar:

$$(y + x)^{n-1}(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots),$$

so folgt um so mehr — wegen (2a) — für die Coefficienten $\alpha^{(k)}$ von $\varphi_{p-1}^{(k)}$, $\psi_{q-1}^{(k)}$:

$$\alpha^{(k)} < \varrho(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots) \qquad (4)$$

Die anstatt der Coefficienten von φ, ψ; φ', ψ'; $\cdots$ eingeführten Beträge $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots\ \alpha^{(k-1)}$ wollen wir, weil dies in der That eine Vergrösserung bedeutet, folgeweise den Gleichungen entnehmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varrho \\ \alpha' &= \varrho(1 + \alpha\alpha) \\ \alpha'' &= \varrho(1 + 2\alpha\alpha') \\ \alpha''' &= \varrho(1 + 2\alpha''\alpha + \alpha'\alpha') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (4\text{a})$$

welche aus der Relation (4) hervorgehen, wenn man das Zeichen $<$ durch $=$ ersetzt.

Aber dieselben Gleichungen ergeben sich aus dem speciellen Problem: Die in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ durch folgende Reihe definirte Function:

$$f = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \xi^3 + \xi^4 + \cdots = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \frac{\xi^3}{1-\xi}$$

in ihre Linearfactoren zu zerlegen

$$f = \left(\eta - \frac{\xi}{2\varrho} + \alpha\,\xi^2 + \alpha'\,\xi^3 + \alpha''\,\xi^4 + \cdots\right) \left(\eta + \frac{\xi}{2\varrho} - \alpha\,\xi^2 - \alpha'\,\xi^3 - \alpha''\,\xi^4 - \cdots\right). \tag{5}$$

In der That gehen für diese Identität die allgemeinen Gleichungen (3) genau in diejenigen (4a) über. Andererseits berechnen sich die $\alpha^{(i)}$ in (5) mittelst der Binomialformel aus:

$$\eta = \frac{\xi}{2\varrho}\left(1 - \frac{4\varrho^2\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\xi}{2\varrho}\left(1 - 2\varrho^2\xi - 2\varrho^2(1+\varrho^2)\xi^2 - \cdots\right)$$

und weil aus der Convergenzbedingung: $\dfrac{4\varrho^2\xi}{1-\xi} < 1$

sich die obere Grenze ableitet: $|\xi| \leq \dfrac{1}{4\varrho^2+1}$,

so folgt, dass auch die Reihen der $\varphi^{(k)}_{p-1}$, $\psi^{(k)}_{q-1}$ convergiren, wenn der absolute Betrag der Veränderlichen x die Grenze nicht übersteigt:

$$|x| \leq \frac{1}{4\varrho^2+1}.$$

Hiermit ist ein Convergenzbereich für die Reihen φ, ψ und also ein Giltigkeitsbereich für die Identität:

$$f = \varphi\psi$$

nachgewiesen.

Ein solcher existirt demnach auch für die ganze Zerlegung, weil dieselbe nur in der wiederholten Anwendung des Spaltungsprocesses besteht.