Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 11. Juni 1892.

1. Herr Ludwig Boltzmann hält einen Vortrag: „über ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen".

2. Herr Paul Groth theilt die Resultate von Versuchen „über Auflösung und Wachsthum der Krystalle" mit, welche Herr A. C. Gill im mineralogischen Laboratorium der k. Akademie angestellt hat.

3. Herr Adolf v. Baeyer spricht „über die Synthese des Dihydrobenzols", über welche er an anderer Stelle ausführlicher berichten wird.

Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen.

Teil I.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 11. Juni.*)

Wir denken uns einen feinen, mit Masse und Trägheit (aber nicht mit Gewicht) begabten Stoff und nennen denselben Kürze halber den Aether. Er soll alle Körper und auch das sogenannte Vacuum durchdringen. Ob die Eigenschaften, welche wir demselben beilegen werden, durch eine Molekularstructur verwirklicht werden können, lassen wir dahingestellt und denken uns den Aether vorläufig als Continuum, ganz in demselben Sinne, wie Kirchhoff in den Kapiteln über Elasticitätslehre und Hydromechanik seiner Vorlesungen über mathematische Physik die ponderable Materie auffasst. Wir setzen überall Isotropie voraus, schliessen also Krystalle vorläufig aus. Wo nicht gerade electromotorische Kräfte thätig sind, soll der Aether nach denselben Gesetzen, wie eine incompressible Flüssigkeit strömen; zu den Kräften, welche in einer solchen wirksam sind, soll aber noch zweierlei hinzukommen:

1. Soll er an jeder Stelle (vielleicht durch die daselbst befindliche ponderable Materie, aber auch im sogenannten Vacuum) einen Widerstand erfahren, welcher der Geschwindigkeit an dieser Stelle proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Die hierdurch verrichtete Arbeit soll in (Joule'sche) Wärme verwandelt werden.

2. Soll an jeder Stelle ein Drehmoment auf das daselbst befindliche Volumelement des Aethers wirken, welches der gesammten Verdrehung desselben proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Ich schliesse mich hierin vollkommen den Ideen Thomson's[1]) an; der Begriff der Drehung eines Volumelementes ist dabei in dem von Stokes und Helmholtz gebrauchten Sinne zu verstehen.[2])

Wir setzen zunächst voraus, dass die ponderable Materie ruhe und bezeichnen mit F, G, H die Verschiebungen, mit φ, χ, ψ die Geschwindigkeitscomponenten irgend eines Aetherteilchens mit den Coordinaten x, y, z zur Zeit t in den Coordinatenrichtungen. Dann sind:

---

1) Sir W. Thomson, math. and phys. papers 3. art 99.

2) Stokes, on the Theories of the internal friction of fluids in motion etc., Trans. Cambr. Phil. soc. April 1845.

Helmholtz, über die Integrale der hydrodyn. Gleichungen, welche Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal Bd. 55.

Kirchhoff, 10. Vorlesung über Mechanik. Teubner 1883.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

die doppelten Drehungeu eines daselbst befindlichen Volumelementes des Aethers. Gemäss unserer Annahme wirken daher auf das Volumelement die Drehmomente:

$$\frac{a\,d\tau}{2\pi\mu};\ \frac{b\,d\tau}{2\pi\mu};\ \frac{c\,d\tau}{2\pi\mu}$$

um die Coordinatenaxen, deren Arbeit während der Zeit dt gleich:

$$\left(\frac{a}{4\pi\mu}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{b}{4\pi\mu}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{c}{4\pi\mu}\cdot\frac{dc}{dt}\right) dt\,d\tau$$

ist. μ ist eine, innerhalb eines homogenen isotropen Körpers constante Grösse. Wählen wir eine Zeit, wo noch keine electrischen oder magnetischen Störungen vorhanden wären, das Feld sich also vollkommen im Normalzustande befand, zum Zeitanfange, so ist die vom Zeitanfange bis zur Zeit t von den Drehmomenten im Volumelemente $d\tau$ geleistete Arbeit:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\pi\mu}\,d\tau \qquad 2)$$

Hierbei sind freilich die Coordinaten x, y, z des Aethertheilchens als variabel aufzufassen; wollte man darunter fixe Coordinaten verstehen, so könnte man unter φ, χ, ψ die Componenten der daselbst zu irgend einer Zeit t herrschenden Geschwindigkeit des Aethers in den Richtungen der Coordinatenaxen verstehen, sodass man hätte:

$$\left.\begin{aligned} F &= \int_0^t \varphi\, d\, t \\ G &= \int_0^t \chi\, d\, t \\ H &= \int_0^t \psi\, d\, t \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Drehung, welche das im Punkt $x\ y\ z$ befindliche Volumelement $d\,\tau$ während der Zeit $d\,t$ um die x-Axe erfährt, wäre dann gleich:

$$\frac{d\,t}{2}\left(\frac{d\,\psi}{d\,y} - \frac{d\,\chi}{d\,z}\right)$$

und a wäre die doppelte Summe der Drehungen, welche alle durch den Punkt $x\ y\ z$ von der Zeit Null bis t hindurchgegangenen Volumelemente im Momente des Durchganges um die x-Axe erfuhren. Analoge Bedeutung hätten b und c bezüglich der y- und z-Axe.

Beide Auffassungen führen weder bei der stationären Aetherbewegung (Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction stationärer und angenähert stationärer elektrischer Ströme, Magnetismus), noch bei sehr kleinen Schwingungen (Licht) zu verschiedenen Gleichungen. Audere Phänomene wurden aber bisher kaum quantitativ mit den Gleichungen verglichen.

Bezeichnen wir ferner die Dichte des Aethers mit $\frac{k}{4\pi}$, so ist die kinetische Energie des im Volumelemente $d\,\tau$ befindlichen Aethers:

$$\frac{k}{8\pi}\left(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2\right) d\,\tau \qquad 4)$$

Wir denken uns, bloss um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, auf jedes Volumelement $d\,\tau$ des Aethers beliebige Kräfte mit den Componenten:

$$X\,d\tau,\quad Y\,d\tau,\quad Z\,d\tau \tag{5}$$

wirkend, deren Arbeit während der Zeit dt also:

$$\left(X\frac{dF}{dt}+Y\frac{dG}{dt}+Z\frac{dH}{dt}\right)d\tau\,dt \text{ ist.}$$

Da ausserdem in dem betreffenden Volumelemente die Arbeit:

$$C\cdot\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]dt\,d\tau \tag{6}$$

in Wärme umgesetzt werden soll, so lautet die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$0=\int d\tau\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\left(a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}\right)\\&+k\left[\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\chi\frac{d\chi}{dt}+\psi\frac{d\psi}{dt}\right]\\&+4\pi\left(X\frac{dF}{dt}+Y\frac{dG}{dt}+Z\frac{dH}{dt}\right)\\&+4\pi C\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei dies Integral über den ganzen in Betracht kommenden Raum zu erstrecken ist. Befinden sich daselbst verschiedene Körper, so wollen wir deren Trennungsflächen niemals als absolute Discontinuitätsstellen, sondern vielmehr als Uebergangssichten denken, innerhalb deren die Werte von μ, k und C, wenn auch rasch, so doch continuirlich von den im Innern des einen zu den im Innern des anderen Körpers geltenden Werten übergehen.

Wir substituiren für $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ deren Werte aus den Gleichungen 2) und integriren jedes Glied partiell. Nach der gemachten Annahme giebt es im Innern keine discontinuirlichen Trennungsflächen, an der äusseren in grosser Entfernung gedachten Oberfläche unseres Raums aber sollen

F, G und H verschwinden, sodass also alle Oberflächenintegrale verschwinden. Substituirt man ferner für φ, χ, ψ deren Werte aus den Gleichungen 1), so geht die Gleichung 7) über in:

$$\int d\tau \left\{ \begin{aligned} & \frac{dF}{dt}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right) + k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi C\frac{dF}{dt} + 4\pi X\right] \\ + & \frac{dG}{dt}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right) + k\frac{d^2G}{dt^2} + 4\pi C\frac{dG}{dt} + 4\pi Y\right] \\ + & \frac{dH}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right) + k\frac{d^2H}{dt^2} + 4\pi C\frac{dH}{dt} + 4\pi Z\right] \end{aligned} \right\} = 0 \qquad 8)$$

Da die Kräfte und Beschleunigungen mit Ausnahme natürlich der von den Bewegungshindernissen herrührenden von den augenblicklich herrschenden Geschwindigkeiten unabhängig sind, so sind in dieser Gleichung $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ und $\frac{dH}{dt}$ als unabhängig zu betrachten und es müssen deren Coefficienten separat verschwinden. Man kann übrigens die Veränderungen von F, G und H in ächte Variationen verwandeln, dadurch, dass man den Grössen X, Y, Z während eines sehr kurzen Zeitintervalles sehr grosse Werte erteilt. (Vergl. Maxwell on physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 475 Gleichung 53. Phil. Mag. (4) vol. 21.)

Setzen wir daher lediglich zur Abkürzung:

$$f = -\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{dF}{dt}; \quad g = -\frac{k}{4\pi}\frac{dG}{dt}; \quad h = -\frac{k}{4\pi}\frac{dH}{dt} \qquad 9)$$

$$p = -C\frac{dF}{dt}; \quad q = -C\frac{dG}{dt}; \quad r = -C\frac{dH}{dt} \qquad 10)$$

$$u = p + \frac{df}{dt}; \quad v = q + \frac{dg}{dt}; \quad w = r = \frac{dh}{dt} \qquad 11)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}4\pi\cdot u &= \frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right)\\ 4\pi\cdot v &= \frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right)\\ 4\pi\cdot w &= \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

was genau mit den Gleichungen übereinstimmt, welche Maxwell für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern fand. (Vergl. meine Vorlesungen über Maxwells Theorie l. t. z. Barth. 1891 pag. 84. Art. 88.)

Direct könnten diese Gleichungen nach der folgenden, ebenfalls schon von Thomson l. c. in ähnlicher Weise angewandten Methode gewonnen werden. Das Volumelement $d\tau$ sei ein Parallelepiped, dessen eine Ecke die Coordinaten $x\ y\ z$ hat, während die anderen um ξ resp. η, ζ grössere Coordinaten haben. Daher wirkt darauf um die y-Axe das Drehmoment:

$$m=\frac{b\,\xi\,\eta\,\zeta}{2\,\pi\,\mu}$$

Das Volumelement ist aber mit den umgebenden so verbunden, dass es sich nicht davon loslösen, und ohne diese mitzudrehen, diese Drehung ausführen kann. Es werden daher von den umgebenden Aetherteilchen auf die 4 Seitenflächen, welche der y-Axe parallel sind, Tangentialkräfte ausgeübt werden müssen, welche zusammen das gleiche Drehungsmoment liefern. Nehmen wir an, dass im Gegensatze zum Verhalten gewöhnlicher elastischer Körper hier Winkeländerungen des Parallelepipedes keine erheblichen elastischen Kräfte wachrufen, also die gewöhnlichen Tangentialkräfte der Elasticitätslehre nahe Null sind, so wird sich das Drehmoment unter beide Flächenpaare gleichmässig verteilen. Auf die eine Fläche Φ vom Inhalte $\xi\,\eta$, welche zur z-Axe senkrecht steht, wirkt daher die Kraft $\frac{m}{2\zeta}$ in der positiven, auf die Gegenfläche Φ' die gleiche Kraft in der negativen x-Richtung. Diese Kräfte werden an den Trennungsflächen je zweier Volumelemente wirken und natürlich an Intensität sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Raum ändern. Da aber Φ' und Φ sich dadurch unterscheidet, dass z um ζ grösser ist, so wirkt mit Beachtung des Kleinen 2. Ordnung auf letztere Fläche die Kraft:

$$\frac{1}{2\zeta}\left(m+\frac{d\,m}{d\,z}\zeta\right)$$

Beide Kräfte zusammen liefern daher:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\,m}{d\,z}=\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{d\,z}$$

in der x-Richtuug. Ganz analog ist die Resultirende:

$$-\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}\frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{d\,y}$$

Zieht man von diesen Molekularkräften den Reibungswiderstand $C\frac{d\,F}{d\,t}$ ab, setzt die so erhaltene Gesammtkraft gleich der mit der Masse $\frac{k\,\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}$ multiplicirten Beschleunigung in der x-Richtung, und multiplicirt schliesslich mit $\frac{4\,\pi}{\xi\,\eta\,\zeta}$, so folgt sofort die obige Gleichung:

$$k\frac{d^2 F}{d\,t^2}+4\,\pi\,C\frac{d\,F}{d\,t}=\frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{d\,z}-\frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{d\,y}.$$

Die Grundgleichungen des Elektromagnetismus für bewegte Körper findet man hieraus, indem man unter $x\;y\;z$

nicht die Coordinaten einer fixen Stelle des Raumes, sondern eines Punktes der ponderabeln Körper versteht, welcher deren etwaige Bewegung mitmacht. In Räumen, wo sich keine ponderable Materie befindet, kann dem Aether jede beliebige damit verträgliche Bewegung zugeschrieben werden. Diese Bewegungen müssen sich mit den im früheren beschriebenen Bewegungen superponiren. (Vergl. Hertz über die Grundgleichungen der Elektrodynamik in bewegten Körpern. Wied. Ann. Bd. 41. p. 369; 1890. Ges. Abh. pag. 256.)

Wie man sieht, basirt die gesammte Beweisführung auf den Ausdrücken 2), 4), 5), 6) für die Energie des Aethers. Man kann nun den Ausdruck 2) auch in anderer Weise als durch die bisher superponirten Drehmomente erhalten. Man denke den Aether in einem isotropen Medium als einen homogenen, isotropen, elastischen Körper und F, G, H als die Verschiebungen eines Teilchens desselben, die Energie der elastischen Kräfte ist dann, wie bekannt:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda = K\Big[\Big(\frac{dF}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dG}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dz}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{dG}{dz} + \frac{dH}{dy}\Big)^2 \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{dH}{dx} + \frac{dF}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dy} + \frac{dG}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\Big)^2\Big]\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

(Vergl. Kirchhoff 11. Vorlesung über Mechanik 3. Auflage pag. 122.)

Wir wollen $\Theta = -1$ setzen und jedes Glied von der Ferne

$$\int d\tau K \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dG}{dy}$$

zuerst partiell nach x, hierauf partiell nach y integrieren. Wenn K überall denselben Wert hat, die Trennungsfläche zweier Körper keine mathematische Discontinuitätsstelle enthält, und F, G, H an der im Unendlichen gedachten Begrenzungsfläche des gesammten betrachteten Körpersystems verschwinden, so verschwinden auch die auf die Oberfläche bezüglichen Glieder, und die Gleichung 13) verwandelt sich in:

$$\Lambda = \frac{K}{2}\left[\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)^2\right],$$

was mit dem Ausdruck 2) übereinstimmt, wenn man $K = \frac{1}{4\pi\mu}$ setzt. Es würden also dann ebenfalls die Maxwell'schen Gleichungen für den Elektromagnetismus folgen. Hierbei ist freilich zu bemerken, dass für einen festen Körper mit freier im Endlichen liegenden Oberfläche Θ keinen negativen Wert haben kann. Allein bei einem überall unbegrenzten Körper, wie es der Aether ist, dürften auch negative Werte von Θ zulässig sein, wenigstens sobald es sich nur um eine dynamische Illustration, wie hier, handelt.[1]) Schreibt man obendrein dem Aether Incompressibilität zu, so ist eo ipso:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0$$

und der Factor Θ, welcher bei dieser Grösse steht, gleichgültig und daher kommen die Maxwell'schen Gleichungen nicht bloss für $\Theta = -1$, sondern für jeden beliebigen Wert des Θ zum Vorschein. Namentlich gilt dies auch für $\Theta = \infty$, was Incompressibilität zur Folge hat. Für andere Werte des Θ würde eine verallgemeinerte Maxwell'sche Theorie erhalten, wie sie Helmholtz aus den Fernwirkungsgleichungen ableitete. Der schreiende Widerspruch, welcher zwischen der Existenz so magnetisierbarer Körper, wie Eisen und der Annahme, dass K in allen Körpern gleich ist, zu bestehen scheint, kann, wie ich glaube, durch die Voraussetzung behoben werden, dass die hohe Magnetisierbarkeit des Eisens nicht durch Herrschen eines kleineren Wertes von K

1) Der durch $\Theta = -1$ bedingte Zustand, welchen Thomson l. c. den quasilabilen nennt, wurde entdeckt durch Loschmidt in dessen Schrift über die Natur des Aethers, Wien bei Gerold und Sohn 1862, vgl. Fortschritte der Physik, Jahrgang 1862. pag. 68.

in seinem Innern bewirkt wird, sondern durch darin schon vorherbestehende Molekülarmagnete d. h. kleine elektrische Ströme von unveränderlicher Intensität, die bei der Magnetisierung bloss gerichtet werden.

Hier ist freilich noch eines zu bemerken. Dem Aether, welchen wir anfangs als incompressible Flüssigkeit voraussetzten, werden neue Eigenschaften einer festen Substanz beigelegt. Er müsste sich also gewissen Kräften gegenüber wie ein fester, anderen wie ein flüssiger Körper verhalten. Analogien dafür an ponderabeln Körpern fehlen nicht. Man denke an Tresca's Versuche über den Ausfluss fester Körper, welche mit grossem Drucke durch Oeffnungen gepresst werden. Bei solchen Körpern werden trotz der Anwendbarkeit der Elasticitätsgleichungen innerhalb gewisser Grenzen doch die Verschiebungen F, G, H einen beliebig grossen Wert annehmen können. Die Theorie dieser Körper ist offenbar die Erforschung der Natur des Aethers von grösster Wichtigkeit. Vgl. Stokes, über die Natur des Aethers, wie sie sich aus der Aberration ergibt. Phil. mag. July 1846. Scient. pap. vol. I pag. 153. Hier will ich nur noch eine Untersuchung anschliessen, ob diese Hypothese nicht in quantitativer Beziehung auf Widersprüche stösst.

Sei ein homogenes, isotropes Medium, z. B. Luft gegeben. Daselbst habe C einen sehr kleinen Wert; bei gegebenem Werte der Geschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}$$

des Aethers sei also die in der Zeit und Volumeneinheit in Wärme umgesetzte lebendige Kraft des Aethers $C\omega^2$ sehr klein. Ein solcher Körper heisst ein schlechter Elektricitätsleiter, weil bei gegebener Stromstärke $\delta = C\omega$ umgekehrt die erzeugte Joule'sche Wärme $\frac{\delta^2}{C}$ sehr gross ist. Sei:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dx}; \quad H = \frac{dW}{dz}.$$

Der Druck an irgend einer Stelle ist dann:

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

Die gesammte Kraft X, welche auf einen im Aether befindlichen Körper in der Richtung der x-Axe wirkt, ist:

$$X = \int p\, d\, s \cos(n, x) = \int\int p\, d\, y\, d\, z = \int \frac{d\, p}{d\, x}\, d\, \tau$$

wobei $d\tau$ ein Volumelement, $d\, s$ ein Oberflächenelement des Körpers, n die zu letzterem gezogene Normale ist. Die Substitution des Wertes für p liefert:

$$X = -\int d\, \tau \frac{k}{4\pi}\left[\frac{d\, W}{d\, x}\cdot\frac{d^2 W}{d\, x^2} + \frac{d\, W}{d y}\cdot\frac{d^2 W}{dx\, dy} + \frac{d\, W}{d z}\cdot\frac{d^2 W}{dx\, dz}\right]$$

und die partielle Integration liefert:

$$X = \int k \frac{d\tau}{4\pi}\frac{d\, W}{d\, x}\Delta W$$

Setzt man $\Delta W = -4\pi\varepsilon$ und betrachtet bloss die Coordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ der elektrischen Masse $\varepsilon\, d\, \tau$ als variabel, so erhält man:

$$X = -k\frac{d}{d\xi}\int \varepsilon\, W\, d\, \tau$$

(Vergl. Maxwell scient. pap. vol. I pag. 497.)

Wir wollen hier aber nur ein ganz specielles Beispiel in einer ganz directen Weise behandeln. In dem oben beschriebenen Medium sollen sich zwei gleichnamig geladene Körper befinden. Der erste derselben soll nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte A und dem Radius ϱ, der zweite nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkt B und dem Radius ϱ' abweichen. Wir wählen A zum Coordinatenanfangspunkt und ziehen die negative Abscissenaxe gegen B hin. Die Länge $AB = \gamma$ soll sehr gross sein gegenüber den beiden Radien ϱ und ϱ'. Setzen wir wieder:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dy}; \quad H = \frac{dW}{dz},$$

so entspricht diesem Problem bekanntlich die Lösung:

$$W = \frac{M}{r} + \frac{N}{s},$$

wobei M und N Functionen der Zeit, r und s die Entfernungen des Punktes mit den Coordinaten $x\ y\ z$ (des Aufpunktes, von A respective B sind. Ferner ist:

$$\varphi = \frac{dV}{dx}; \quad \chi = \frac{dV}{dy}; \quad \psi = \frac{dV}{dz};$$

wobei V die Ableitung von W nach der Zeit ist, also:

$$V = \frac{M'}{r} + \frac{N'}{s}, \text{ wo:}$$

$$M' = \frac{dM}{dt}; \quad N' = \frac{dN}{dt}.$$

Dies liefert überall $a = b = c = 0$. Daher folgt aus den Gleichungen 12):

$$u = p + \frac{df}{dt} = -C\varphi - \frac{k}{4\pi}\frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} M' &= \alpha\, e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \\ N' &= \beta\, e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

α und β sind Constanten.

Das Aethervolumen, welches in der Zeit dt dem ersten Körper entströmt, ist:

$$4\pi\varrho^2 \frac{M'}{\varrho^2} dt;$$

alles andere kann als unendlich klein vernachlässigt werden. Der gesammte Aether, welcher von der Zeit 0 bis zur Zeit ∞

dem ersten Körper entströmt, womit dieser also geladen war, hat nach dem Ausströmen das Volumen:

$$\Omega = 4\pi \cdot \int_0^\infty M' \, dt = k \frac{\alpha}{C} \qquad 15)$$

da $\frac{k}{4\pi}$ die Dichte des Aethers nach dem Ausströmen ist. (Die Körper selbst können aus beliebiger ponderabler Masse bestehen, worin wir uns den Aether durch irgend welche Kräfte (chemische) beliebig verdichtet denken.)

Die Masse des Aethers, womit der erste Körper geladen war, ist also:

$$m = \frac{k^2 \alpha}{4\pi C} \qquad 16)$$

Dieselbe Grösse hat für den zweiten Körper den Wert:

$$\frac{k^2 \beta}{4\pi C}$$

Wir wollen nun die gesammte Kraft X suchen, welche auf den ersten Körper infolge des Aetherdruckes ausgeübt wird. Derselbe sendet beständig durch innere Kräfte Aether normal zu seiner Oberfläche aus. Wäre er absolut kugelförmig, so müsste die durch obige Formeln angegebene Aetherbewegung ein wenig modificiert werden, damit die Aetherausstrahlung überall normal zur Körperoberfläche geschieht. Es vereinfacht die Rechnung, wenn man umgekehrt die Gestalt des Körpers so von der Kugelform abweichen lässt, dass dessen Oberfläche überall senkrecht auf der durch die obigen Gleichungen definierten Aetherströmung steht; d. h. der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = c$$

genügt, wobei c eine Constante ist.

Seien x y z die Coordinaten eines Punktes der Körperoberfläche und setzen wir:

$$y^2 + z^2 = \eta^2$$

so ist also:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + \eta^2}} = c,$$

also, da γ gross gegen r ist:

$$\frac{\alpha}{r} = c + \frac{\beta x}{\gamma^2} \tag{17}$$

Der Druck im Punkte mit den Coordinaten $x\,y\,z$ ist (wieder mit Vernachlässigung des unendlich kleinen höherer Ordnung):

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left(\frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{2\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right)$$

p_0 bedeutet den Druck in sehr grosser Entfernung. Setzen wir in der Klammer im ersten Glied für $\frac{1}{r^4}$ seinen Wert aus der Gleichung 17) ein und dann in den Gliedern von der niedrigsten Grössenordnung für c wieder seinen angenäherten Wert $\frac{\alpha}{r}$ so folgt:

$$p = p_0 - \frac{k}{4\pi}\left(\frac{c^2}{\alpha^3} + \frac{6\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right).$$

Sämmtliche Punkte des Körpers, für welche x zwischen x und $x + dx$, η zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, besetzen einen Gürtel von der Fläche:

$$2\pi\eta\sqrt{dx^2 + d\eta^2}.$$

Der Druck, welcher auf diesen Gürtel wirkt, hat in der Richtung der positiven Abscissenaxe die Componente $-2\pi p\,d\eta$. Da $\eta\,d\eta$, über den ganzen Körper integriert, gleich Null ist, so verschwinden dabei die beiden ersten constanten Glieder im Ausdruck von p, und die gesammte auf den ersten Körper in der Richtung der Abscissenaxe wirkende Kraft ist:

$$X = \frac{3\,k\,\alpha\,\beta}{2\,\gamma^2} \cdot \int \frac{x\,\eta\,d\,\eta}{r^3}$$

Hier kann der Körper wieder als Kugel betrachtet und

$$x = r\cos\vartheta$$
$$\eta = r\sin\vartheta$$

gesetzt werden, wodurch man, da r constant ist, erhält:

$$X = \frac{3\,k\,\alpha\,\beta}{2\,\gamma^2} \cdot \int_0^\pi \cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\,\vartheta = \frac{k\,\alpha\,\beta}{\gamma^2}$$

Es soll nun das Dielectricum so schlecht leiten, dass die Ladung in T Tagen von 1 auf $\frac{1}{e}$ sinkt ($e = 2{,}718\cdots$). Dann ist:

$$\frac{4\pi\,C}{k} = \frac{1}{24\cdot 60\cdot 60\,T\,\mathrm{sec}}, \quad C = \frac{k}{10^6\,T\,\mathrm{sec}}.$$

Ferner soll jede der geladenen Kugeln R cm Radius haben und zu Anfang mit 30000 V Volt geladen worden sein. Ein Volt ist in elektromagnetischem Maasse das Potential:

$$\frac{10^8\sqrt{\mathrm{gr\,cm^3}}}{\mathrm{sec^2}};$$

in elektrostatischem Maasse:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{gr\,cm}}}{300\,\mathrm{sec}}.$$

Da das Potential einer Kugel gleich der Elektricitätsmenge dividiert durch den Kugelradius ist, so ist die auf jeder der Kugeln vorhandene Elektricitätsmenge in statischem Maasse gemessen:

$$\varepsilon = \frac{100\,R\sqrt{\mathrm{gr\,cm^3}}}{\mathrm{sec}}\,V.$$

Die Kraft, mit welcher sich die Kugeln abstossen, ist $X = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}$, und vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werte von X, so folgt:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} = \frac{100}{\text{sec}} V R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}}, \text{ also:}$$

$$\Omega = 10^8 V \cdot T \cdot R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}};$$

$$m = \frac{10^8}{4\pi} V \cdot T \cdot R \sqrt{k \cdot \text{gr cm}^3}.$$

Setzen wir die Dichte des Aethers 10^{16+2h} mal kleiner als die des Wassers, also:

$$k = 10^{-16-2h} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot 4\pi, \text{ so folgt:}$$

$$\Omega = \frac{10^h}{\sqrt{4\pi}} V T R \,\text{cm}^3; \quad m = \frac{10^{-h}}{\sqrt{4\pi}} V T R \,\text{gr}.$$

Thomson fand als untere Grenze für die Dichte des Aethers 156.10^{-18}grcm. Wäre dieselbe wirklich gleich dieser unteren Grenze, so hätte man h etwa $= 2, 1$, $m = \frac{VTR}{440}$ gr. Wäre für das Medium, in welchem sich die angenommene Kugel von einem cm-radius befindet, $R = 1$, $T = 1$, d. h. die Ladung würde in einem Tage auf den 2,718^ten^ Teil herabsinken, so müsste für $V = 1$, d. h. bei einer Ladung mit 30 000 Volt, bereits eine Aethermasse von $\frac{1}{440}$ gr in sie hinein, oder aus ihr herausgeschafft werden. Nun giebt es unzweifelhaft Media, wo T weit grösser ist, sodass m noch grösser ausfiele. Allein man muss bedenken, dass für die enorme von uns angenommene Ladung die Elektricitätsleitung und -Verbreitung wesentlich complicierteren Gesetzen folgt, sodass die Anwendbarkeit der einfachen linearen Gleichungen

Maxwell's fraglich wird. Wenn daher diese Zahl auch jedenfalls an der Grenze des möglichen liegt, so kann doch meiner Ansicht nach gerade nicht behauptet werden, dass die vorliegende mechanische Analogie in quantitativer Hinsicht heute auf einen völligen Widerspruch stosse.

Behufs weiterer Versinnlichung unserer mechanischen Analogie betrachten wir dasselbe Dielectricum (Luft) wie im vorigen. Es sollen jedoch darinnen sich verschiedene Körper befinden, in welchen k und C andere Werte haben. In der Luft und in allen Körpern, worin C klein von derselben Grössenordnung ist, werden φ, χ, ψ sehr lange endlich bleiben, dagegen werden, weil alles fast stationär wird, deren Differentialquotienten nach der Zeit, sowie p, q, r und u, v, w bald sehr klein werden. Daher wird gemäss der Gleichung 12):

$$\frac{a}{\mu} dx + \frac{b}{\mu} dy + \frac{c}{\mu} dz$$

ein vollständiges Differential dW, d. h. die magnetischen Kräfte haben ein Potential. Aus Gleichung 2) folgt ferner:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{dW}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{dW}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dW}{dz}\right) = 0.$$

Da W und μ überall stetig und die erstere Grösse im Unendlichen gleich Null ist, so folgt hieraus:

$$W = a = b = c = 0.$$

Obige Gleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass:

$$\iiint \mu \, dx \, dy \, dz \left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

ein Minimum ist, was nur für $W = 0$ zutrifft.

Man sieht daher durch diese Darstellung den Grund ein, weshalb die Magnetisierung so geschieht, dass die magnetische Energie, d. h. die Summe der mit μ multiplicierten

Quadrate der magnetischen Momente der Volumenelemente ein Minimum wird, sowie anderer ähnlicher Minimumsätze. (Vergl. Stefan, Wien. Sitzungsber. Bd. 99 pag. 319, 1890.)

Wären in einzelnen Körpern Ampère'sche Molekularströme, so würde in diesen und an ihrer Oberfläche u, v, w nicht gleich Null. Man würde daher ein von Null verschiedenes magnetisches Potential bekommen. Sehr rasche Veränderungen desselben mit der Zeit (magnetische Ströme) würden elektrische Kräfte erregen, wie sie freilich noch nicht beobachtet wurden. Wir wollen jedoch hier solche Fälle ausschliessen und überall $a = b = c = 0$ setzen. Dann folgt aus den Gleichungen 2), dass:

$$\varphi\, dx + \chi\, dy + \psi\, dz$$

ebenfalls ein vollständiges Differential dV ist, dass daher auch die elektrischen Kräfte ein Potential haben. Die Trennungsfläche zweier Körper denken wir uns als eine sehr dünne, aber continuierliche Uebergangsschicht, in welcher dieselben Bedingungen erfüllt sind, die wir überall annehmen. Da die Gleichungen 2) auch im Innern dieser Uebergangsschicht erfüllt sein müssen, so findet man in bekannter Weise, indem man sie nach t differentiiert und die Normale zur Uebergangsschicht als Abscissenaxe wählt, dass der Differentialquotient von V nach einer Richtung tangential zur Uebergangsschicht zu beiden Seiten derselben den gleichen Wert haben muss. Die durch die Flächeneinheit $d\upsilon$ der Uebergangsschicht hindurchgehende Aethermasse ist:

$$\frac{k}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}$$

wenn die Richtung n normal zur Uebergangsschicht ist. Da dieselbe Aethermasse auf der anderen Seite austreten muss, so muss dieser Ausdruck zu beiden Seiten denselben Wert haben. Dies sind die alten bekannten Bedingungsgleichungen an der Trennungsfläche zweier Dielectrica.

Hat in einem Körper C einen grösseren Wert, so nimmt daselbst (cf. Gleichung 14)) V rascher ab (die elektrische Nachwirkung, elektrische Absorption). Hat C einen sehr grossen Wert, d. h. ist der Körper ein Leiter, so muss V bald constant werden. Die Aetherströmung umgiebt dann den betreffenden Körper wie Wasser einen eingetauchten festen Körper. Die dadurch entstandene Modification des Wertes von V nennt man die Elektrisierung des eingetauchten Körpers durch Influenz. Man kann diese Modification auch dadurch entstanden denken, dass sich zur Aetherbewegung, welche ohne Anwesenheit des Leiters stattfinden würde, noch ein Ausströmen von Aether von der positiv influenzierten Seite des Körpers, ein Einströmen von der negativen superponiert, von der Beschaffenheit, dass dadurch die Aetherbewegung überall tangential zur Oberfläche des Körpers gemacht wird. Im Körper selbst ist nur ein ganz schwacher Strom, welcher die langsame Abnahme der elektrischen Influenz bewirkt, die durch die allmähliche Zerstreuung der Elektricität an den ursprünglich geladenen Körpern bedingt ist. Dies wäre in allgemeinen Zügen das Bild der sogenannten Elektrostatik.

Um uns ein Bild von der Aetherbewegung beim stationären elektrischen Strome zu verschaffen, wollen wir einen unendlich langen geraden Kreiscylinder vom Radius ϱ betrachten, dessen Axe die Abscissenaxe ist und der in Richtung der positiven Abscissen vom positiven elektrischen Strome durchflossen wird. Das elektrostatische Potential, welches nötig ist, um einen solchen Strom zu treiben, wird in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe unendlich. In der alten Fernwirkungstheorie schadet dies wenig, da man die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen daselbst völlig getrennt betrachtet. Es muss eher als ein Vorzug der neuen Theorie betrachtet werden, dass dabei eine solche Trennung überhaupt nicht angeht.

Um das elektrostatische Potential endlich zu erhalten, können wir den Cylinder von einem coaxialen Hohlcylinder von sehr grossem Radius R umgeben denken, der zur Erde abgeleitet und ohne elektromotorische Kräfte ist. Sei $\frac{A}{C}$ die Stromdichte im massiven Cylinder, so muss daselbst F das Glied $-At$ enthalten. Da wir es mit einem Leiter zu thun haben, setzen wir $k=0$ und es folgt aus der Gleichung 80) meiner „Vorlesungen über Maxwell's Theorie“, welche ja auch leicht aus den hier entwickelten Gleichungen gewonnen werden kann:

$$F=-At-\pi\mu ACr^2, \quad G=H=0$$

wobei $r=\sqrt{y^2+z^2}$ die Distanz des betrachteten Punktes von der Axe des Cylinders vorstellt. Hieraus folgt im Innern des massiven Cylinders:

$$a=0; \quad b=-2\pi\mu ACz; \quad c=2\pi\mu ACy.$$

Zwischen dem massiven und dem Hohlkugelcylinder ist ein Dielectricum (Luft). Daselbst sollen μ, C, k die Werte μ', C', k' haben, wovon C' sehr klein ist. An der Trennungsfläche muss:

$$\left.\begin{aligned} a &= a' \\ \mu b &= \mu' b' \\ \mu C &= \mu' C' \\ F &= F' \\ C\frac{dG}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dG'}{dt} \\ C\frac{dH}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dH'}{dt} \end{aligned}\right\}$$

sein. Die soeben citierte Gleichung 80) liefert hier:

$$\Delta F=\Delta G=\Delta H=0.$$

Daher muss zunächst:

$$F=-A\left(\frac{t}{l\frac{\varrho}{R}}+2\pi\mu' C\varrho^2\right)l\frac{r}{R}+\pi AC\varrho^2\left(2\mu' l\frac{\varrho}{R}-\mu\right)$$

sein, wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da ferner a, b, c nicht ins Unendliche wachsen dürfen, weil dadurch unendliche Kräfte geweckt würden, so muss im Dielektricum der t enthaltende Teil von:

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz$$

ein vollständiges Differential sein, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} G &= -\frac{A\,t\,x\,y}{r^2\, l\frac{\varrho}{R}} \\ H &= -\frac{A\,t\,x\,z}{r^2\, l\frac{\varrho}{R}} \end{aligned}\right\}$$

Die Grösse:

$$\frac{g\,y + h\,z}{r=\varrho} = -\frac{k}{4\pi\,\varrho}\left(y\,\frac{d\,G}{d\,t} + z\,\frac{d\,H}{d\,t}\right) = \frac{k\,A\,x}{4\pi\,\varrho\, l\frac{\varrho}{R}}$$

ist das, was man die Flächendichte der freien Elektricität auf der Oberfläche des massiven Cylinders,

$$\int\left(\frac{d\,F}{d\,t}\,d\,x + \frac{d\,G}{d\,t}\,d\,y + \frac{d\,H}{d\,t}\,dz\right) = -\frac{A\,x}{l\frac{\varrho}{R}}\, l\frac{r}{R}$$

das, was man deren Potentialfunction nennt.

Für elektrostatisches Maass ist im Standardmedium $k=1$. Von R würde man unabhängig, wenn zwei gleichbeschaffene, in entgegengesetzter Richtung durchströmte Cylinder, für deren Axen $y=0$, $z=p$ und $z=-p$ ist, vorhanden wären, welche für $x=0$ das elektrostatische Potential Null haben. Sind dann:

$$r = \sqrt{y^2 + (z-p)^2} \text{ und } s = \sqrt{y^2 + (z+p)^2}$$

die Entfernungen eines Punktes von der ersten resp. zweiten Axe, und ist der Radius ϱ beider Cylinder klein gegen p, so ist im ersten Cylinder:

$$F = -A\,t - \pi\,\mu\,A\,C\,r^2; \quad G = H = 0;$$
$$a = 0; \quad b = -2\pi\,\mu\,A\,C\,(z-p); \quad c = 2\pi\,\mu\,A\,C\,y;$$

im zweiten Cylinder:

$$F = At + \pi \mu A C s^2; \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2\pi \mu A C (z + p); \quad c = 2\pi \mu A C y$$

und im umgebenden Dielektricum:

$$F = \left(-\frac{t}{l\frac{2p}{\varrho}} + 2\pi \mu' C \varrho^2\right) A l \frac{s}{r} - \pi A C \varrho^2 (2\mu' l \frac{2p}{\varrho} + u);$$

$$G = \frac{A t x y}{l\frac{2p}{\varrho}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right); \quad H = \frac{A t x}{l\frac{2p}{\varrho}} \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2}\right);$$

$$a = 0; \quad b = -2\pi \mu' C \varrho^2 \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2}\right);$$

$$c = 2\pi \mu' C \varrho^2 y \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\right).$$