Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Zur
Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Im 15. Bande der Acta Mathematica[1]) theilt Herr Mittag-Leffler die folgende von Herrn Fredholm aufgefundene Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a^{\nu}\cdot x^{\nu^2} \quad (|\, a\,| < 1)$$

als erstes Beispiel einer Function mit, welche über einen gewissen Bereich (den Einheitskreis um den Nullpunkt) nicht analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. für keine Stelle auf der Grenze dieses Bereiches nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar ist, obschon sie daselbst mit sämmtlichen Ableitungen stetig ist.

Die Reihe ist in der That wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas principiell neues darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einiger-

1) „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm." A. a. O. p. 279.

maassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der Existenz derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.[1])

Die principielle Frage, um die es sich hierbei einzig und allein handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend einer einzigen Stelle endliche Differentialquotienten[2]) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an einer Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hilfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes[3]) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber im Gegensatz zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,[4]) dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

---

1) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister, parce que les fonctions elles mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontiére.

2) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach allen möglichen Richtungen, sondern nur nach einem Theil dieser Richtungen.

3) Math. Ann. Bd. XIX. p. 588.

4) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes, T. IX p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Leç. III. (Oeuvres compl. T. X. p. 72.)

$$f(x+h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^\nu$$

(und damit eo ipso auch die Convergenz der betreffenden Reihe) nach sich ziehe, Cauchy schon in seinen ersten „Leçons sur le Calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 ausdrücklich die Bemerkung gemacht,[1]) dass nicht einmal die Convergenz der Taylor'schen Reihe hinreiche, um daraus die Gültigkeit der obigen Beziehung zu folgern. Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte Beispiel gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), so ist doch die sachliche Richtigkeit jener Cauchy'schen Bemerkung, die sich auch in zahlreichen besseren Compendien der Differentialrechnung reproducirt findet,[2]) meines Wissens von neueren Mathematikern niemals bestritten worden,[3]) mag dieselbe auch diesem oder jenem mathematischen Schriftsteller vielleicht gänzlich entgangen sein.[4])

---

1) a. a. O. p. 152. Auch in den „Leçons sur le Calcul différentiel" vom Jahre 1826: p. 105, und den „Leçons sur le Calcul différentiel et intégral" von Cauchy-Moigno: T. I. p. 71.

2) z. B. Hermite, Cours d'Analyse, T. I. p. 203. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, T. I. p. 152. — Houël, Calcul infinitésimal, T. I. p. 286.

3) Nur der Vollständigkeit halber möchte ich als einzig mir bekannte Ausnahme ein Buch mit dem viel versprechenden Titel: „Le Calcul infinitésimal fondé sur des Principes rationnels" von P. H. Fleury (Paris 1879) anführen. Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit, soweit er sich gegen die besondere Form des Cauchy'schen Beispiels wendet. Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten.

4) z. B. Hankel, der in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Functionen (1870) gelegentlich noch ganz den Lagrange'schen Standpunkt vertritt: cf. Math. Ann. Bd. XX. p. 102.

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit lauter stetigen Differential-Quotienten schlechthin evident zu machen. Dies wird nun aber thatsächlich vollständig geleistet durch ein von Du Bois Reymond im Jahre 1876 publicirtes Beispiel einer Function,[1]) welche an einer gewissen Stelle endliche und stetige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt, während die mit diesen Differentialquotienten gebildete Taylor'sche Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu \frac{f^\nu(x)}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionen-Theorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differential-Gleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

---

1) In den Abh. der b. Akad. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 109 ff.

Da mir dies nun aber gerade wünschenswerth erschien, so habe ich vor allem versucht, die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der Ergänzung geradezu bedarf, in anderer der Erweiterung fähig ist, derartig zu vervollkommnen, dass es möglich wird, auf dem Wege einer zielbewussten Synthese völlig einwandfreie Beispiele von Functionen der gedachten Art zu erzeugen.

Zu diesem Behufe untersuche ich zunächst nochmals genau die Möglichkeiten, unter denen trotz der Endlichkeit aller Ableitungen von endlicher Ordnung die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen Reihe für eine bestimmte Stelle ausgeschlossen erscheint, und belege dieselben durch einfache, vermittelst directer Rechnung zu controlirende Beispiele (§ 1). Sodann werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, unter denen es möglich ist, derartige singuläre Stellen in unendlicher Anzahl beliebig zu condensiren, ohne fürchten zu müssen, dass dieselben sich etwa gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben könnten (§ 2). Auf Grund dieser Bedingungen werden darauf Reihen construirt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, auf dem Einheitskreise durchweg beliebig oft differenzirbar und daselbst dennoch nirgends entwickelbar zu sein.

Die auf diese Weise erzeugten Reihen sind natürlich minder einfach als die von Herrn Mittag-Leffler mitgetheilte, aber sie geben uns, wie gesagt, offenbar eine deutliche Vorstellung von einer der Möglichkeiten, wie derartige Singularitäten zu Stande kommen können.

Im übrigen aber bin ich auch, abgesehen von diesen Betrachtungen, im Stande, Reihen von ganz ähnlicher Einfachheit wie die des Herrn Fredholm anzugeben, bei denen sich die fragliche Eigenschaft ganz elementar beweisen lässt, indem man durch einfache Rechnung erkennen kann, dass die Taylor'sche Entwickelung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen auf dem Einheitskreise divergiren muss (§ 4).

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\Sigma f_\nu(x)$ bezw. $\Sigma f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transscendente Functionen bedeuten.

Auf der Begrenzung dieses Bereiches befinde sich eine Stelle a, für welche $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = a$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$f(x) = \mathfrak{P}(x-a) \tag{1}$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenz-Bezirkes von $\mathfrak{P}(x-a)$, welcher in den ursprünglichen Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-a)^\nu. \tag{2}$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte a gemachten Voraussetzungen zwei und nur zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ von der gedachten Beschaffenheit existiren kann, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ für $|x-a| < \varepsilon$ divergirt, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge,

2. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ zwar für irgend welche Umgebung der Stelle α convergirt, aber ihre Summe nicht den Werth $f(x)$ hat, dort, wo ihr Convergenz-Bezirk noch in den Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten bietet für unsere Vorstellung auch nicht die geringste Schwierigkeit dar. Da nämlich $f^{(n)}(\alpha)$, wenn auch für jedes endliche n endlich, mit unendlich wachsendem n geradezu in der Regel gleichfalls in's Unendliche wachsen wird[1]) (andernfalls würde ja die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-a)^n$ beständig convergiren, also ihre Summe eine ganze transscendente Function darstellen, was doch nur ein ganz specieller Fall wäre; das gleiche findet selbst dann noch statt, wenn $f^{(n)}(\alpha)$ mit n so unendlich wird, wie die n^{te} Potenz einer beliebig grossen endlichen Zahl), so liegt absolut keine Veranlassung dazu vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x=\alpha$ die Zunahme von $f^{(n)}(\alpha)$ für wachsende n so stark ist, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ für keinen noch so kleinen Werth von $|x-\alpha|$ convergirt.

---

1) Dieser Umstand ist thatsächlich von manchen mathematischen Autoren völlig übersehen worden, indem sie die für die Existenz der Taylor'schen Reihe nothwendige Bedingung von der „Endlichkeit sämmtlicher Ableitungen" dahin missverstanden, als müsse $f^n(\alpha)$ für jedes noch so grosse n unter einer festen endlichen Grenze bleiben. Auf diesem Missverständnisse beruht z. B. eine völlig irrthümliche Bemerkung des Herrn Mansion über den Rest der Taylor'schen Reihe und speciell über das oben erwähnte Beispiel von Du Bois Reymond. (Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse" Art. III. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Desgleichen ein unzulänglicher Beweis des Taylor'schen Satzes von F. König. (Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. Nouv. Annales, 2$^{\text{de}}$ Série, T. XIII p. 270.)

Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit hinreichende Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(\alpha)$ für $n = \infty$ aufstellen, welche die Convergenz der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle α definitiv ausschliessen.

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x - \alpha|$ convergiren kann, wenn für $\nu = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu - 1)!} : \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \right\} = \lim \left\{ \nu \cdot \left| \frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)} \right| \right\} = 0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| \succ \nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu \geqq n$ ab:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| = \nu \cdot \psi(\nu) \tag{3}$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch beliebig langsam in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x - \alpha)^\nu$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ε und für $\nu \geqq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \cdot \varepsilon^\nu \geqq 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \geqq (\psi(\nu))^\nu \tag{4}$$

welche, wegen $\nu! < \nu^\nu$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu \geqq n$:

$$(5) \qquad |f^{(\nu)}(\alpha)| \geq (\nu \cdot \psi(\nu))^{\nu}$$
$$> e^{\nu} \{lg\,\nu + \varphi(\nu)\}$$

wobei $\varphi(\nu) = lg\,\psi(\nu)$ gleichfalls eine mit ν beliebig langsam in's Unendliche wachsende positive Grösse bedeutet.

Ich will nun zunächst ein überaus einfaches und, wie ich glaube, in jeder Hinsicht tadelfreies Beispiel[1]) einer Function mit der eben besprochenen Eigenschaft angeben. Es werde gesetzt:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{a^{-\nu} + x}$$

wo a eine positive Zahl > 1 bedeutet. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für die ganze x-Ebene mit Ausschluss einer beliebig kleinen Umgebung der Stellen $x = -a^0, -a^{-1}, -a^{-2} \cdots$. Sie convergirt insbesondere auch noch für $x = 0$ und zwar gleichmässig für jeden

---

1) Bei der a. a. O. von Du Bois Reymond angegebenen Reihe die mit der hier betrachteten formal sehr verwandt ist, nämlich:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!} \frac{x^{2\nu}}{x^2 + a_\nu^2}$$

(wobei $a_\nu^2 > 0$, $\lim a_\nu = 0$) sind, wie man auf den ersten Blick erkennt, die Differential-Quotienten n^{ter} Ordnung so complicirt, dass ihre explicite Aufstellung äusserst umständlich erscheint. Diese wird nun a. a. O. in der That auch gar nicht geliefert, vielmehr wird nur gezeigt, dass $|f^{(n)}(x)|$ für jedes endliche n unter einer gewissen mit n endlich bleibenden Grenze liegt. Zur Bildung von $f^{(n)}(0)$ wird sodann die gliedweise Entwickelung der obigen Reihe nach Potenzen von x benützt, was einerseits eine unnöthige Weitläufigkeit der Rechnung zur Folge hat, andererseits aber auch den Nachtheil mit sich bringt, dass die Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ an der kritischen Stelle $x = 0$ wohl aus allgemeinen Principien geschlossen, aber nicht *ad oculos* demonstrirt werden kann, wie es doch bei einem derartigen Beispiele wünschenswerth erscheint.

Bereich, welcher den Punkt $x=0$ auf der Begrenzung enthält einschliesslich dieser Begrenzung, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $\overline{0\,(-1)}$ im Innern oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\dfrac{1}{a^{-\nu}+x}$ eine Grösse von der Form $\lambda \cdot a^{\nu}$ (wo λ endlich) nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch $n$malige Differentiation aus der obigen ergiebt, sodass also auch:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu}+x)^{n+1}} \tag{7}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x=0$:

$$(8)\quad \begin{cases} f(0) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \dfrac{1}{\nu!} a^{\nu} = e^{a} \\[2ex] f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n! \sum \dfrac{1}{\nu!} a^{\nu(n+1)} = (-1)^n \cdot n! \, e^{a^{n+1}} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} > (e^{n})^{n}$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum \dfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$ für jedes noch so kleine x divergirt, obschon $f(x)$ für $x=0$ mit sämmtlichen Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^0$, $-a^{-1}$,

$-a^{-2}\cdots$, welche die Häufungs-Stelle 0 haben, singuläre Stellen für die einzelnen Glieder sind. Verlegt man diese Stellen in die negative oder positive imaginäre Axe, indem man in (6) $a^{-\nu}$ durch $\pm a^{-\nu}i$ ersetzt, so kann man durch Vereinigung der conjugirten Glieder auch eine Function mit durchweg reellen Coefficienten herstellen, welche mit allen Ableitungen in der Umgebung der Nullstelle auf der reellen Axe vorwärts und rückwärts stetig ist, und für welche die Mac Laurin'sche Reihe dennoch divergirt. Man erhält auf diese Weise:

$$(9) \qquad f(x) = \frac{i}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!}\left\{\frac{1}{a^{-\nu}i+x} + \frac{1}{a^{-\nu}i-x}\right\}$$
$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!}\frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu}+x^2}$$

also:

$$(10) \quad f^{(n)}(x) = \frac{i}{2}n!\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{(-1)^n}{(a^{-\nu}i+x)^{n+1}} + \frac{1}{(a^{-\nu}i-x)^{n+1}}\right\}$$
$$= (-1)^n\cdot n!\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu!}\frac{g_n(x)}{(a^{-2\nu}+x^2)^{n+1}}$$

wo:

$$g_n(x) = \frac{1}{2i}\left\{(x+a^{-\nu}i)^{n+1} - (x-a^{-\nu}i)^{n+1}\right\}$$

Da hier:

$$(11) \quad |f^{(2m-1)}(0)| = 0 \qquad |f^{(2m)}(0)| = (2m)!\,(-1)^m e^{a^{2m+1}}$$

so erkennt man wiederum ganz direct (also ohne irgendwie functionentheoretische Gesichtspunkte zu Hülfe zu nehmen) dass die Mac Laurin'sche Reihe für jedes noch so kleine x divergirt, und es dürfte daher dieses Beispiel insbesondere geeignet sein, auch im Rahmen einer gewöhnlichen Vorlesung über Differential-Rechnung die Möglichkeit dieses Vorkommnisses zu illustriren.

Was nun die zweite der oben erwähnten Eventualitäten betrifft, dass nämlich die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ zwar convergiren, aber ihre Summe von $f(x)$ verschieden sein könne, so scheint man, soviel ich weiss, bis zum heutigen Tage nicht über das von Cauchy a. a. O. gegebene Beispiel:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

nicht hinausgekommen zu sein. Indessen fehlt demselben aus zwei Gründen die rechte Beweiskraft: einmal (was auch Du Bois Reymond in dem citirten Aufsatze ausdrücklich hervorhebt), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „eigentlich“ definirt sind, d. h. nicht durch directes Einsetzen von $x=0$ aus einer der Definitionen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}} \quad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden können, sondern lediglich als $\lim f(\pm\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ eine feste Bedeutung gewinnen;[1]) zweitens aber nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Werth Null hat, sodass von einer convergirenden Mac Laurin'schen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existirt — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht gehoben wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

1) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonnement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I. p. 203) nicht entkräftet.

$$(12)\quad f(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{a^{-\nu} + x} \quad \text{also: } f(0) = e^{-a}$$

woraus:

$$(13)\quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu} + x)^{n+1}}$$

$$\text{also: } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n e^{-a^{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{n+1}}$$

Hier erkennt man aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_\nu \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{\nu+1}} x^\nu$$

geradezu beständig convergirt. Dass sie aber nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, geht daraus hervor, dass $f(x)$ wegen der in unmittelbarer Nachbarschaft der Nullstelle sich häufenden singulären Stellen $x = -a^{-\nu}$ für keine noch so kleine Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelt werden kann (wie sich mit aller Strenge aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergiebt).

Will man statt der eben betrachteten Function, welche bei reell veränderlichen x an der Stelle $x = 0$ mit sämmtlichen Differentialquotienten nur vorwärts stetig ist, wiederum eine solche construiren, für welche das Gleiche sowohl vorwärts als rückwärts stattfindet, so braucht man nur in (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ zu ersetzen. Alsdann ergiebt sich:

$$(14)\quad f(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2} \quad \text{also: } f(0) = e^{-a}$$

und daraus:

$$(15)\quad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (2m)!\,(-1)^m \cdot e^{-a^{2m+1}}$$

Die Mac Laurin'sche Reihe würde auch hier wiederum beständig convergiren, stellt aber nicht die Function $f(x)$ dar. Bezeichnet man ihre Summe mit $S(x)$, sodass also:

$$(16) \qquad S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu}$$

so stimmt $S(x)$, $S^{(n)}(x)$ nur für $x = 0$ mit $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ überein. Bildet man daher:

$$(17) \quad F(x) = f(x) - S(x)$$
$$= \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{\nu!} \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2} - \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu} \right\}$$

so liefert dieselbe ein Beispiel — und, wie ich glaube, das erste bekannte Beispiel — einer Function, welche für alle endlichen reellen x incl. $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig und auch noch für $x = 0$ eigentlich definirt ist, dabei aber (gleichwie die für $x = 0$ nicht eigentlich definirte Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$) die Eigenschaft besitzt, in beliebiger Nähe der Nullstelle nicht zu verschwinden, obschon sie für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet. Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner Théorie des Fonctions[1]) geäusserte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth der Variablen mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet, identisch verschwinden müsse, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$$

1) Oeuvres complétes, T. IX, p. 63.

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ eine abzählbare Punktmenge bedeutet,[1]) welche (mindestens) einen nicht zur Menge gehörigen Grenzpunkt α besitzt: gerade dadurch, dass die Stelle $x = \alpha$ für kein einzelnes Glied der $f(x)$ definirenden Reihe eine sinläre ist, entsteht an der Stelle $x = \alpha$ für $f(x)$ jene besondere Singularität, welche $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endlich und nach allen Richtungen stetig sein lässt, in denen nicht unendlich viele Punkte der Menge (α_ν) liegen. Es fragt sich aber, ob auch wirklich in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich: denn wenn auch in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte α_ν liegen, welche für je ein Glied der obigen Reihe singuläre Stellen sind, so wäre es gerade wegen der Unbegrenztheit ihrer Anzahl möglich, dass sie sich zusammengenommen in ihrer Wirkung annulliren.[2])

---

1) Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeinen Form:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{m_\nu}}$$

wo die m_ν auch negativ gebrochene oder beliebige rationale positive Zahlen bedeuten.

2) Gerade in dieser Hinsicht enthält der oben erwähnte Versuch von Du Bois Reymond, durch Condensation eine Function der fraglichen Art herzustellen eine Beweislücke. Es wird nämlich eigentlich nur gezeigt, dass man eine Function bilden kann, welche die betreffende Singularität in einer beliebig grossen endlichen Anzahl (n) von Punkten eines gewissen Intervalles besitzt, und dass die Function auch noch für $n = \infty$ einen bestimmten Sinn behält. Alsdann aber heisst es (a. a. O. p. 617): „Es wäre freilich noch direct zu zeigen, dass die (bei dem eben erwähnten Grenzübergange resultirende) Function $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen." — Ich halte es für sehr zweifelhaft, ob sich das hier überhaupt auf dem Wege blosser Rechnung erweisen lässt.

Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (α_ν) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt α (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\Sigma |c_\nu|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine innerhalb C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' auf der Curve C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes α. Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (α_ν) angehören, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existiert stets eine gewisse Umgebung von x', innerhalb deren kein Punkt der Menge (α_ν) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x = \alpha$ zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass allemal, wenn man den Punkt α durch einen der Menge selbst angehörigen Punkt — etwa α_0 — ersetzt, dieser sicher eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss (gleichgültig, ob α_0 ein Grenzpunkt der Menge ist oder nicht). Man erkennt dies, wie Herr Goursat gezeigt hat,[1]) indem man die obige Reihe folgendermassen in drei Partien zerlegt:

$$f(x) = \frac{c_0}{\alpha_0 - x} + \sum_1^n{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

wo n so fixirt sein soll, dass $\sum_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot c_0 \quad (\vartheta < 1)$ wird, was in Folge der Convergenz von $\Sigma |c_\nu|$ stets möglich ist.

1) Sur les Fonctions à Espaces lacunaires. Bulletin des Sciences mathématiques, 1887. 2ième Série, T. XI. p. 109.

Alsdann ist $f_2(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der Stelle α_0, während $f_1(x)$ in α_0 eine singuläre Stelle besitzt, welche durch $f_3(x)$, wie mit Hülfe der Bedingung:

$\sum_{n+1}^{\infty}|c_\nu| = \vartheta \cdot c_0$ leicht zu ersehen ist, nicht annullirt werden kann.

Tritt sodann an die Stelle des einen Punktes α_0 eine unendliche Anzahl solcher Punkte, welche auf der Curve C oder irgendwelchen Bögen derselben überall dicht liegen, so lässt sich weiter folgern, dass jeder solche Bogen eine singuläre Linie für $f(x)$ sein muss, sodass also für keinen Punkt α' eines solchen Bogens eine Reihe $\mathfrak{P}(x-\alpha')$ existirt, welche innerhalb C mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die obige Schlussweise beruht nun aber wesentlich darauf, dass der Term $\frac{c_0}{x-\alpha_0}$ wirklich in $f(x)$ vorkommt, während in dem hier zu betrachtenden Falle die Existenz eines Gliedes von der Form $\frac{c}{x-\alpha}$ gerade ausgeschlossen ist, da ja α der Menge der α_ν nicht angehören sollte.

Es lässt sich indessen zeigen, dass auch in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ ist, sofern man nur die Menge (α_ν) der einzigen Beschränkung unterwirft, dass in jeder Nähe von α solche α_ν vorhanden sind, die höchstens in Linien (aber nicht in Flächentheilen) oder überhaupt nicht überall dicht liegen.[1])

Angenommen nämlich $f(x)$ wäre für die Stelle α regulär, so müsste das Gleiche für alle Stellen innerhalb eines

1) Damit ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil der Menge (α_ν) in der Nähe von α auch in Flächentheilen überall dicht liegt. Der Beweis behält sogar noch seine Gültigkeit, wenn die Menge (α_ν) in der Nähe von α ausschliesslich aus Punkten besteht, welche in Flächentheilen überall dicht liegen, sofern nur irgendwo auf der Begrenzung derselben in jeder Nähe von α stets auch Punkte α_ν (nicht bloss Grenzpunkte) liegen.

gewissen um a zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der a_ν gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes a eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte a_ν in der Umgebung jedes solchen Punktes a der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte a der durchweg **ausserhalb** des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (a_ν), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x} \qquad \left(\text{wo } \sum_0^\infty {}^\nu |c_\nu| \text{ convergent}\right)$$

jeder Punkt a ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C, auf dem Punkte a überall dicht liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes a stets Punkte a_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmengen sind:

$$a_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \qquad a_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, 3 \ldots \\ \mu = 1, 2, 3 \ldots \end{pmatrix}$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ (z. B. $p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}$, $p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu}$, $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.), während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, aber keine Einheitswurzel sein soll, also $\varepsilon = e^{2s\pi i}$, wo s eine Irrationalzahl bedeutet. Die Punkte ε^ν ($\nu = 0, 1, 2 \cdots$ liegen dann auf dem Einheitskreise überall dicht, während die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$, $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon^\nu$ durchweg ausserhalb des Einheitskreises liegen, aber alle Punkte desselben zu Grenzpunkten haben. Dabei nähern sich mit wachsendem ν die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$ in spiralartiger Anordnung dem Einheitskreise und liegen nirgends (auch auf keiner Linie) überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon_\nu$ auf allen um den Nullpunkt concentrischen Kreisen mit den Radien p_μ ($\mu = 0, 1, 2 \cdots$), aber nicht in irgendwelchen Flächentheilen überall dicht liegen.

§ 3.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung sind wir nunmehr im Stande, Reihen zu construiren, welche im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches — etwa des Einheitskreises um den Nullpunkt — durchweg endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch in beliebig vielen, auch unendlich vielen auf dem Kreise überall dicht liegenden Punkten α nicht nach Potenzen von $(x - \alpha)$ entwickelbar sind, also in dem zuletzt genannten Falle eine analytische Fortsetzung über den Einheitskreis hinaus nicht zulassen.

Es seien also ausserhalb des Einheitskreises unendlich viele Punkte α_ν gegeben, welche auf der Peripherie desselben beliebig viele Grenzpunkte α besitzen sollen. Man hat alsdann für jedes endliche ν: $|\alpha_\nu| > 1$, während für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim |\alpha_\nu| = 1$ ist oder wenigstens die untere Unbestimmtheitsgrenze von α_ν den Werth 1 haben muss (mit anderen Worten: es können die Punkte α_ν auch noch ausserhalb des Einheitskreises beliebig viele Grenzpunkte besitzen).

In der Umgebung jedes auf dem Einheitskreise gelegenen Grenzpunktes α sollen die α_ν der in dem Satze des vorigen Paragraphen statuirten Bedingung genügen. Bedeutet dann $\Sigma\,|\,c_\nu\,|$ eine convergirende Reihe, so ist die Reihe:

$$(1)\qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

zunächst innerhalb des Einheitskreises gleichmässig convergent und kann für diesen Bereich in die ebendaselbst convergirende Potenzreihe:

$$(2)\qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda A_\lambda x^\lambda \quad \text{wo: } A_\lambda = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden. Man kann nun aber durch eine passende Wahl der c_ν leicht erzielen, dass die Reihe (1), wie auch die Potenzreihe (2) auch noch auf der Peripherie des Einheitskreises unbedingt und gleichmässig convergiren. Da nämlich für $|\,x\,| \leqq 1$ die Beziehung besteht:

$$|\,\alpha_\nu - x\,| \geqq |\,\alpha_\nu\,| - |\,x\,| \geqq |\,\alpha_\nu\,| - 1$$

so hat man insbesondere für alle Punkte x auf der Peripherie:

$$\left|\frac{|\,\alpha_\nu\,| - 1}{\alpha_\nu - x}\right| \leqq 1$$

und n wird daher die Reihe (1) noch auf dem genannten Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren, falls die Reihe $\sum \frac{|\,c_\nu\,|}{|\,\alpha_\nu\,| - x}$ convergirt, also für:

$$c_\nu = (|\,\alpha_\nu\,| - 1)\cdot c'_\nu$$

wo c'_ν das Glied einer absolut convergirenden Reihe bedeutet. Zugleich erkennt man, dass dann auch die Potenzreihe (2) auf dem Einheitskreise noch unbedingt und gleichmässig convergirt, denn man hat:

$$\sum_0^\infty{}^\lambda |A_\lambda x^\lambda|_{|x|=1} = \sum_0^\infty{}^\lambda \left| \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}} \right|$$

$$\leqq \sum_0^\infty{}^\nu |c_\nu| \sum_0^\infty{}^\lambda \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{\lambda+1} = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|-1}$$

Ferner folgt aus (1) und (2) durch n malige Differentiation:

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}} \tag{3}$$

$$= \sum_n^\infty{}^\nu \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) A_\lambda x^{\lambda-n}$$

zunächst wieder für das Innere des Einheitskreises. Es werden aber auch diese beiden Reihen für ein bestimmtes n (und dann *a fortiori* für jedes kleinere n) noch auf dem Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren und demgemäss dort auch noch die n^{te} Ableitung von $f(x)$ darstellen, wenn die c_ν so gewählt werden, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^{n+1}}$$

convergirt, was man offenbar wiederum erzielen kann, wenn man setzt:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^{n+1} \cdot c'_\nu \quad \text{wo } \Sigma |c'_\nu| \text{ convergirt.}$$

Daraus folgt nämlich zunächst wieder ohne weiteres die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum^\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$ für alle Punkte der Peripherie, während das Gleiche für die entsprechende Potenzreihe erkannt wird aus der Beziehung:

$$\sum_n^\infty{}^\lambda \lambda\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\,|A_\lambda|$$

$$\leq \sum_n^\infty{}^\lambda \lambda\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|^{\lambda+1}}$$

$$\leq \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu\cdot\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{n+1}\sum_0^\infty{}^\lambda (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^\lambda$$

$$= n!\sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^{n+1}}$$

Nun lassen sich aber die c_ν geradezu so fixiren, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m}$$

nicht nur für irgend ein bestimmtes (und dann eo ipso für jedes kleinere) m, sondern geradezu für jedes noch so grosse m (ohne obere Grenze) convergirt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4)\qquad \frac{1}{|\alpha_\nu|-1}=q_\nu \quad \text{d. h. } |\alpha_\nu|=1+\frac{1}{q_\nu}$$

wo also q_ν wesentlich positiv und für $\nu=\infty$: $\lim q_\nu=\infty$ oder die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_ν unendlich wird, so hat man identisch:

$$(5)\qquad \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m}=|c_\nu|\cdot q_\nu^m=|c_\nu\cdot r_\nu|\cdot\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$$

und wenn daher r_ν positiv und so gewählt wird, dass für jedes noch so grosse:

$$(6)\qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{q_\nu^m}{r_\nu}=\lim\frac{(e^m)^{\lg q_\nu}}{r_\nu}=0$$

wird — was z. B. für $\lim q_\nu = \infty$ stets der Fall ist, wenn man setzt:[1])

(7) $$r_\nu = b^{-q_\nu} \qquad (b < 1)$$

oder auch:

(8) $r_\nu = [lg\, q_\nu]!$ (wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl)

so genügt es nach Gleichung (5) für den gewünschten Zweck in jedem Falle, wenn sodann:

(9) $$|c_\nu| \cdot r_\nu = |c'_\nu| \qquad \text{also:} \quad c_\nu = \frac{c'_\nu}{r_\nu}$$

genommen wird, wo $|c^1_\nu|$ das Glied einer convergenten Reihe bedeutet. Wenn aber hierbei schon $\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$ für jedes noch so grosse m das Glied einer convergenten Reihe bildet, was z. B. stets der Fall ist für $q_\nu \lesssim \nu$ und $r_\nu = b^{-q_\nu}$, ebenso für $q_\nu \lesssim a^\nu\, (a > 1)$ und $r_\nu = \nu!$), so reicht es schon hin, wenn man setzt:

(10) $$|c_\nu|\, r_\nu = 1 \qquad \text{also:} \quad |c_\nu| = \frac{1}{r_\nu}$$

Hiernach ergiebt sich aber in Verbindung mit dem Satze des § 2 das folgende Resultat:

Besitzt die durchweg ausserhalb des Einheitskreises gelegene abzählbare Menge (α_ν) auf dem

---

1) Wäre nur die obere Unbestimmtheitsgrenze von $q_\nu = \infty$ so würde man der Forderung beispielsweise genügen können, indem man setzt:

$$r_\nu = b^{-\nu \cdot q_\nu}$$

oder:

$$r_\nu = \nu . [lg\, q_\nu]!$$

Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_ν stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \qquad f^{(n)}(x) = n! \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch **auf der Peripherie** unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_{n}^{\infty}{}^{\nu} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+)\cdot x^{\lambda-n} \end{aligned}\right\} \text{ wo: } A_\lambda = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_ν von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α, die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_ν) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen jeder endlichen Ordnung dort noch endlich und stetig ist.

Der Vollständigheit halber sei hierzu noch bemerkt, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in Folge der den Punkten α_ν auferlegten Beschränkung mit dem Einheitskreise noch nicht erschöpft sein wird, sondern je nach der Wahl der α_ν noch aus einem oder mehreren (eventuell auch unendlich vielen) Stücken ausserhalb des Einheitskreises bestehen muss. Alsdann stellt also auf Grund der von Herrn Weierstrass gegebenen Begriffsbestimmung der analytische Ausdruck $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Function dar.

Um mit Hülfe des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes bestimmte Beispiele von Functionen zu construiren, die trotz der Endlichkeit der Ableitungen über den Einheitskreis nicht fortgesetzt werden können, mögen etwa die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Punktmengen benützt werden. Sei also:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad (\text{wo } \varepsilon = e^{2s\pi i},\ s \text{ eine Irrationalzahl})$$
$$p_\nu > 1, \ \lim p_\nu = 1$$

so kann man setzen:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\frac{1}{p_\nu - 1}}}{p_\nu \varepsilon^\nu - x} \qquad (b < 1)$$

Setzt man speciell:

$$p_\nu = 1 + \tfrac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

so wird:

$$f(x)=\sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\varepsilon^\nu - x}=\sum_1^\infty{}^\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda=\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{\nu}{\varepsilon^\nu(\nu+1)}\right)^{\lambda+1} b^\nu$$

Nimmt man $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$, also $\frac{1}{p_\nu - 1} \sim \nu$, so ergiebt sich, wenn man für ε seinen Werth einsetzt:

$$f(x)=\sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{e^{\frac{1}{\nu}+2\nu s\pi i}-x}=\sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda=\sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{e^{\left(\frac{1}{\nu}+2\nu s\pi i\right)(\lambda+1)}}.$$

Diese Reihen convergiren dann auch noch gleichmässig für das ganze Gebiet ausserhalb des Einheitskreises mit Ausschluss der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\alpha_\nu = p_\nu\,\varepsilon^\nu$, welche ausserhalb des Einheitskreises keine weiteren Grenzpunkte besitzen. Zwischen den Werthen der Reihen $f(x)$ im Innern und ausserhalb des Einheitskreises existirt jedoch kein „analytischer" Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu\,\varepsilon^\nu$$

wo etwa wiederum $p_\mu = 1+\frac{1}{\mu}$ oder $p_\mu = e^{\frac{1}{\mu}}$ $(p=1,2,3\cdots)$ und ε gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man alsdann:

$$f(x)=\sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{c_{\mu,\nu}}{p_\mu\,\varepsilon^\nu - x}$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmässige Convergenz von $f'(x)$ und $f^{(n)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

$$c_{\mu,\nu} = b^{\mu+\nu}$$

Alsdann ergiebt sich:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{p_\mu \varepsilon^\nu - x} = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda x^\lambda$$

wo:

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{(p_\mu \varepsilon^\nu)^{\lambda+1}} = \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{\varepsilon^{(\lambda+1)\nu}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{\lambda+1} - b} \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}}$$

Der Convergenz-Bereich von $f(x)$ besteht hier — abgesehen von dem Innern des Einheitskreises — aus dem ganzen Ebenenstücke ausserhalb des Kreises mit dem Radius p_1 (wobei für die oben getroffene specielle Wahl $p_1 = 2$ bez. $p_1 = e$ ist), sodann aus unendlich vielen concentrischen Ringen, welche begrenzt werden von Kreisen mit den Radien p_μ und $p_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, 3 \cdots$). Auf allen diesen Kreisen liegen die Punkte $\alpha_{\mu,\nu}$ überall dicht, sodass also die Reihe $f(x)$ in diesen sämmtlichen Stücken ihres Convergenzbereiches lauter verschiedene analytische Functionen darstellt. Jedoch besitzt sie nur auf dem Einheitskreise die Eigenschaft mit allen Ableitungen endlicher Ordnung endlich und stetig zu sein, während sie auf den sämmtlichen übrigen Begrenzungen divergirt.

Will man Functionen construiren, welche in der einen Halbebene — z. B. der oberen — einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen stetig und dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind, so braucht man nur das Innere des Einheitskreises mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{z - i}{z + i}$$

auf die obere z-Halbebene abzubilden.

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obschon dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, **warum** die Entwickelbarkeit auf jener Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.

Es werde gesetzt:

$$\psi(t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i} = \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu \tag{1}$$

wo a eine positive ganze Zahl ≥ 2, $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergenzbereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\begin{aligned} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} &= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^\nu (a-1) t i} \\ &= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^\nu (a-1) . \tau_2} \cdot e^{a^\nu (a-1) \tau_1 i} \end{aligned}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right| = \lim \frac{e^{-a^\nu (a-1) . \tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \tau_2 \geq 0 \\ = \infty, \text{ wenn } \tau_1 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen

Halbebene einschliesslich der reellen Axe. Das Gleiche gilt auch für sämmtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

$$(2) \qquad \psi^{(n)}(t) = i^n \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i}$$

und daher insbesondere für reelle t:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \left| \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i} \right| = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absosut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2\varkappa\pi$ $(\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$, so folgt:

$$|\psi^{(n)}(2\varkappa\pi)| = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2\varkappa + 1)\pi$:

$$|\psi^{(n)}((2\varkappa + 1)\pi)| = e^{a^n} \text{ bezw. } = e^{a^n} - 2 \text{ (ersteres, wenn } a \text{ ungerade, letzteres, wenn } a \text{ gerade).}$$

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für sämmtliche Stellen $t = \mu\pi$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\psi^{(n)}(t) = i^n . \sum_0^{p-1} \nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n . \sum_p^{\infty} \nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$
$$= i^n . \sum_0^{p-1} \nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n . \sum_0^{\infty} \nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}$$

so ergiebt sich zunächst für $t = \frac{2\varkappa\pi}{a^p}$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2 \cdots)$:

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) = i^n . \sum_0^{p-1} \nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^{\nu-p} . 2\varkappa\pi i} + i^n . \sum_0^{\infty} \nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} \tag{3}$$
$$= i^n \left\{ C_{p,n} + e^{a^n} \right\}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1} \nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \left\{ e^{a^{\nu-p} . 2\varkappa\pi i} - 1 \right\}$$

Nun ist aber:

$$|C_{p,n}| < 2 \cdot \sum_0^{p-1} \nu \, a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn} \tag{4}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $|C_{p,n}|$; dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n > p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) \cong e^{a^n} \tag{5}$$

wird, und das Nämliche ergiebt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2\varkappa+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren, wie gross man auch p nehmen mag, und da diese Stellen auf der reellen Axe überall dicht liegen, so ergiebt sich in der That, dass $\psi(t)$ für keinen einzigen reellen Werth t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ entwickelt werden kann.

Die Reihe (1) ist aber auch noch in einer weiteren Beziehung lehrreich, insofern man daran erkennen kann, dass auch die zweite der beiden in § 1 erörterten Möglichkeiten, nämlich die Convergenz der Taylor'schen Reihe

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t - t_0)^\nu$$

aber ohne die Gültigkeit der Beziehung

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t - t_0)^\nu = \psi(t)$$

geradezu in unendlich vielen Punkten jedes noch so kleinen Intervalles stattfinden kann.

Angenommen nämlich, es sei jetzt speciell a eine ungerade Zahl von der Form $4k + 3$ $(k = 0, 1, 2 \cdots)$. Alsdann bemerke man zunächst, dass alle ungeraden Potenzen von a gleichfalls von der Form $4k + 3$, dagegen alle geraden von der Form $4k + 1$ sind, sodass also:

$$e^{\frac{1}{2}a^{2\nu-1}\pi i} = -i \qquad e^{\frac{1}{2}a^{2\nu}\pi i} = +i$$

wird. Setzt man daher in (2) $t = (m + \frac{1}{2})\pi$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}((m + \tfrac{1}{2})\pi) &= i^n \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{ma^\nu \pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}a^\nu \cdot \pi i} \\ &= (-1)^m \cdot i^{n+1} \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a^{n\nu}}{\nu!}\end{aligned}$$

also:

$$(6) \qquad |\psi^{(n)}((m + \tfrac{1}{2})\pi)| = e^{-a^n}$$

sodass die Taylor'sche Reihe zunächst an allen Stellen $t_0 = (m + \frac{1}{2})\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ für jedes noch so grosse $(t - t_0)$ convergirt.

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (3), dass

$$(7) \qquad \left| \psi^{(n)}\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{a^p}\pi\right)\right| < C'_{p,n} + e^{-a^n}$$

wo:

$$(8) \qquad C'_{p,n} < a^{pn}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!}\left\{a^{pn} + e^{-a^n}\right\} r^n$ für jedes noch so grosse r convergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$ für alle Stellen $t_0 = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe convergirt und zwar sogar beständig convergirt. Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe divergirt, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles convergirte oder genauer gesagt, ein Convergenz-Intervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimmte?

Diese Frage ist aber zu verneinen. Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} \cdot r^\nu$$

für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ und $r \leqq r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta\varrho)}{n!} \cdot \varrho^n = 0 \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

$$(10) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{n-1} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta h)}{n!} h^n$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h \leqq \varrho$ mit unendlich wachsenden n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

$$(11) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu \quad \text{für } h \leqq \varrho.$$

Damit ist also bewiesen, dass die Taylor'sche Reihe nicht für alle Stellen eines beliebigen kleinen Intervalles einen Convergenzbereich von angebbarer Grösse besitzen kann, ohne dort auch die betreffende Function darzustellen. Mithin gilt der Satz:

Wenn die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu$ für irgend einen bestimmten Werth t_0 der reellen Variablen t und für $h \leqq \varrho$ convergirt, ohne die Summe $\psi(t_0 + h)$ zu besitzen, so müssen entweder in jeder beliebigen Nähe von t_0 Stellen t' existiren, sodass $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt, oder es muss zum mindesten die untere Grenze für die Convergenzradien aller möglichen Reihen: $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ für Werthe t in der Nähe von t_0 den Werth Null haben.[1])

1) Da der Convergenzradius von $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ in dem vorliegen-

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t. Denn man kann die Gesammtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$\psi(t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i} \tag{1}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenz-Radius der Taylor'schen Reihe unendlich gross ist (nämlich für $t = \frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{a^p}$), und ebenfalls solche, für welche dieselbe gleich Null ist (nämlich für $t = \frac{m\pi}{a^p}$).

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$\psi(-t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{-a^\nu t i} \tag{12}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben können), die Reihen:

$$\psi_1(t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{\cos a^\nu t}{\nu!} \qquad \psi_2(t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{\sin a^\nu t}{\nu!} \tag{13}$$

---

den Falle offenbar eine unstetige Function von t ist, so brauchte in der That keine bestimmte Stelle t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird.

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämmtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{ti} = x$, so folgt, dass die Function:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} x^{a^{\nu}} \tag{14}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Anleitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} c_{\nu} \cdot x^{m_{\nu}} \tag{15}$$

wo die m_{ν} positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von m_{ν}, $m_{\nu+1}, m_{\nu+2}, \cdots$ mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_{ν} so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum{}^{\nu} c_{\nu} m_{\nu}^{n} = S_n$$

für jedes endliche n zwar convergirt, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum{}^{n} \frac{S_n}{n!} \varrho^{n}$$

für jeden noch so kteinen Werth ϱ divergirt.