Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Von Gustav Bauer.

(Eingelaufen 15. Januar.)

1. Ist f eine binäre Form n^{ten} Grads, ψ eine solche i^{ten} Grads

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n \tag{1}$$

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots + b_i x_2^i \quad (i \leqq n) \tag{2}$$

und man bildet aus $\psi(x_1, x_2)$ das Operationssymbol

$$\psi\left(\frac{\partial.}{\partial x_2}, -\frac{\partial.}{\partial x_1}\right)$$

und operirt hiemit auf f, so erhält man, wie bekannt, eine Covariante von f und ψ (Intermutante) vom Grade $n-i$

$$V = c_0 x_1^{n-i} + \binom{n-i}{1} c_1 x_1^{n-i-1} x_2 + \cdots, \tag{3}$$

deren Coefficienten c durch die Formel

$$c_k = a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} + \cdots \tag{4}$$

bestimmt sind. Ist speziell $i = n$, so reducirt sich V auf eine Invariante

$$V_0 = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n b_0.$$

Denkt man sich durch die Formen f und ψ n, resp. i, Punkte einer Geraden dargestellt, so ist die Covariante V geometrisch definirt als die gemischte Polare der i Punkte ψ in Bezug auf die n Punkte f. Sind nun die Coefficienten b von ψ so bestimmt, dass die sämmtlichen Coefficienten $c_0 \cdots c_1 \cdots c_{n-i}$ von V verschwinden, so kann man[1]), analog zu der Bezeichnung von Herrn Reye im ternären und quaternären Gebiet, die Form ψ als apolar zu f bezeichnen, und es gilt dann allgemein der Satz: Soll die Funktion f in eine Summe von i Potenzen zerlegt werden, in der Weise (5)

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \mu_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n$$

so müssen $x_1 - \alpha_1 x_2, x_1 - \alpha_2 x_2 \cdots$ Linearfaktoren einer zu f apolaren Form ψ sein.

Ist $i = \frac{n+1}{2}$ (n ungerade), so ist ν vom Grade $\frac{n-1}{2}$ mit $\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, und man hat mithin $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten b. Die apolare Function ψ ist dann vollkommen bestimmt und es gibt dann auch nur eine Zerlegung von f in $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Es ist die bekannte von Sylvester gegebene Zerlegung einer Form vom Grade $2m-1$ in die canonische Form einer Summe von m Potenzen.[2])

Ist $i = n$, so hat man nur eine Bedingungsgleichung für die b, nämlich $V_0 = 0$; man kann dann die b so bestimmen, dass ψ apolar wird zugleich zu n Formen $f_1 \cdots f_n$ n^{ten} Grads, welche sämmtlich mittelst der Linearfaktoren von ψ in Summen

1) Sturm, „Darstellung bin. Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journ. Bd. 86. S. 117.

2) Philos. Mag. 4. Ser. Vol. II. 1851. S. 391.

von n Potenzen zerlegt werden können, wie dies zuerst von Herrn Rosanes gezeigt worden.[1])

Liegt i zwischen diesen Grenzen, so hat man überhaupt nicht die genügende Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die Coefficienten f zu bestimmen; es gehen dann willkürliche Grössen in die Coefficienten von ψ ein; und folglich auch in die Entwicklung von f in ein Aggregat von Potenzen. Ist hingegen $i < \frac{n+1}{2}$, so hat man mehr Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von ψ als zu deren Bestimmung nöthig ist, und es müssen sodann $n-2i+1$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a von f bestehen, wenn eine Entwicklung von f in eine Summe von i Potenzen möglich sein soll.

In der oben angeführten Abhandlung „Ueber ein Princip etc." ist von Herrn Rosanes zuerst die Beziehung dargelegt worden, welche zwischen der Entwicklung binärer Formen in Potenzsummen und den apolaren Formen besteht und aus dieser Darlegung, sowie auch denen von Herrn Sturm lässt sich der obige allgemeine Satz über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen unschwer erschliessen. Auch die Analyse Sylvesters lässt sich mit leichter Modification dem allgemeinen Falle anpassen. Ich werde hier der letzteren zunächst folgend die Zerlegung einer binären Form n^{ten} Grads in i Potenzen betrachten, zu dem Zwecke, die erhaltenen Resultate anzuwenden auf die Entwicklung einer geraden Form $2n^{\text{ten}}$ Grads in eine Summe von $n+1$ Potenzen. Diese Zerlegung ergibt sich, nur von invarianten Formen

1) Crelle's Journ. Bd. 75. „Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen" u. besonders Bd. 76 „Ueber e. Princip der Zuordnung algebr. Formen". Herr Rosanes betrachtet nur den Fall $i=n$ und nennt in diesem Falle die Formen für f und ψ „conjugirt". — S. auch Sturm, a. a. O.

abhängig, in einer so einfachen und eleganten Gestalt, dass sie wohl mitgetheilt zu werden verdient.

2. Aus der Vergleichung der Coefficienten der Form

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots \tag{1}$$

mit den Coefficienten der Entwicklung

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n \tag{2}$$

ergeben sich sofort die $n+1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mu_1 \alpha_1^k + \mu_2 \alpha_2^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k = (-1)^k a_k \\ (k = 0, 1, \cdots n) \end{array}\right\} \tag{3}$$

Aus irgend i dieser Gleichung erhält man die Werthe der μ. Nehmen wir zuerst die i ersten dieser Gleichung um μ_1 zu berechnen, sodann die i Gleichungen von der 2^{ten} an u. s. f., schliesslich die i letzten Gleichungen des Systems, so haben wir $n+2-i$ Systeme von je i Gleichungen, aus welchen wir ebensoviele Werthe für μ_1 finden. Die Vergleichung dieser Werthe liefert $n+1-i$ Relationen zwischen den Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ und den Coefficienten a. Um diese zu berechnen, nehmen wir die i Gleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 \alpha_1^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k + (-1)^{k+1} a_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_1 \alpha_1^{k+i-1} + \cdots + \mu_i \alpha_i^{k+i-1} + (-1)^{k+i} a_{k+i-1} = 0 \end{array}\right\},$$

woraus sich ergibt

$$\Delta \mu_1 = \frac{(-1)^{k+i}}{\alpha_1^k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 & -a_k \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \alpha_i & +a_{k+1} \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots \alpha_i^2 & -a_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_2^{i-1} & \alpha_3^{i-1} & \cdots \alpha_i^{i-1} & (-1)^i a_{k+i-1} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

wo

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot\cdot & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot\cdot & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \cdot\cdot & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Setzen wir in (5) $k+1$ statt k, setzen sodann die beiden Werthe von μ_1 einander gleich und entwickeln die beiden Determinanten nach den Coefficienten a, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (a_k \delta_{0,1} + a_{k+1} \delta_{1,1} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,1}) \\ &\quad + a_{k+1} \delta_{0,1} + a_{k+2} \delta_{1,1} \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-2,1} + a_{k+i} \delta_{i-1,1} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

wenn man mit $\delta_{r,s}$ die Unterdeterminante von $\varDelta$ bezeichnet, welche man erhält, wenn man in $\varDelta$ die Reihe der r^{ten} Potenzen und die Vertikalreihe mit der Wurzel α_s streicht. Nun ergibt sich unschwer die Formel

$$\delta_{r,s} = \delta_{i-1,s} \cdot \pi^{(s)}_{i-1-r}, \tag{7}$$

wo $\pi^{(s)}_{i-1-r}$ die Summe der Combinationen aller Wurzeln α mit Auschluss von α_s zu je $i-r-1$ bezeichnet. Die Grösse $\delta_{i-1,s}$ aber ist, wie man aus ihrer Determinantenform sofort ersieht, das Product sämmtlicher Differenzen der Wurzeln α mit Ausschluss von α_s mit einem gewissen Zeichen behaftet, nämlich

$$(-1)^{i+s} \cdot \delta_{i-1,s} = \frac{\varDelta}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)} . \tag{8}$$

Ersetzt man nun in (6) die Grössen $\delta_{r,1}$ durch ihre Werthe aus (7), so verwandelt sie sich in folgende Gleichung

$$\begin{aligned} &a_k \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i + a_{k+1} \Sigma \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} + \cdots \\ &+ a_{k+i-1} \Sigma \alpha_1 + a_{k+1} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

wo die Σ symmetrische Funktionen sämmtlicher Wurzeln α (α_1 einbegriffen) sind. Die Symmetrie der Gleichung in Bezug auf sämmtliche Grössen α zeigt, dass wir immer dieselbe Gleichung erhalten würden, wenn wir zur Berechnung statt μ_1 irgend ein anderes μ benützen würden. Wir haben also nur diese Relation zwischen den a und den α; dieselbe zählt aber für $n+1-i$ Relationen, da sie für jedes k von $k=0$ bis $k=n-i$ gilt.

Ist

$$\psi = b_0\, x_1^i + \binom{i}{1} b_1\, x_1^{i-1} x_2 + \cdots = 0 \tag{10}$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ sind, so geht die Relation (9) über in

$$a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} - \cdots \pm a_{k+i} b_0 = 0 \tag{11}$$
$$(k=0, 1, \cdots n-i.)$$

Damit ist aber der Beweis geliefert, dass die Covariante V verschwinden, d. h. ψ zu f apolar sein muss.

Was nun aber die Coefficienten μ in der Entwicklung (2) betrifft, so ist μ_s durch die Gleichung (4) gegeben, wenn wir statt der Reihe der Potenzen von α_1 die Reihe der Potenzen von α_s weglassen und den Faktor $(-1)^{s-1}$ beifügen. Die Die Entwicklung der Determinanten liefert sodann

$$\Delta\, \mu_s = \frac{(-1)^{k+s-1}}{\alpha_s^k} (a_k \delta_{0,s} + a_{k+1} \delta_{1,s} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,s})$$

oder wenn wir die $\delta_{r,s}$ durch ihre Werthe aus (7) und (8) ersetzen,

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k} \cdot \frac{a_{k+i-1} + \pi_1^{(s)} a_{k+i-2} + \cdots + \pi_{i-1}^{(s)} a_k}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)} \tag{12}$$

Aus diesem Ausdruck für μ_s können wir aber alle α ausser α_s mit Hilfe der Funktion ψ entfernen. Denn es ist, wenn ψ' die Abgeleitete von $\psi(x)$ bezeichnet

$$\psi'(\alpha_s) = b_0 (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)$$

Setzen wir ferner (13)

$$\frac{\psi}{x_1 - \alpha_s x_2} = b_0 x_1^{i-1} + \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} x_1^{i-2} x_2 + \cdots + b_{i-1}^{(s)} x_2^{i-1},$$

so ist $\binom{i-1}{1}\frac{b_1^{(s)}}{b_0} = -\pi_1^{(s)}$ u. s. f. und der Ausdruck für μ_s nimmt die Form an

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k \cdot \psi'(\alpha_s)} \cdot \left(b_0 a_{k+i-1} - \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} a_{k+i-2} + - \cdots \pm b_{i-1}^{(s)} a_k\right) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-i+1).$$

Da die Coefficienten b nur von den a abhängen, aber die α nicht enthalten, so enthalten die $b^{(s)}$ nur die eine Wurzel α_s und man ersieht mithin, dass sich die Grössen μ immer so bestimmen lassen, dass der Coefficient μ_s, der in der Entwicklung nach Potenzen $(x_1 - \alpha_s x_2)^n$ multiplicirt, nur α_s enthält.[1])

3. Wenden wir nun diese allgemeinen Formeln an auf die Entwicklung einer Form vom Grade $2n$

$$f = a_0 x_1^{2n} + \binom{2n}{1} x_1^{2n-1} x_2 + \cdots + a_{2n} x_2^{2n} \quad (1)$$

in eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Die apolare Form

$$\psi = b_0 x_1^{n+1} + \binom{n+1}{1} b_1 x_1^n x_2 + \cdots \quad (2)$$

ist in diesem Falle nicht vollständig bestimmt, da das Gleichungsystem (11) $n^0 2$ nur $2n - (n+1) = n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Coefficienten b liefert. Wir könnten aus diesem System die b in der Form $p\lambda + q\lambda'$, $p_1\lambda + q_1\lambda'$,

1) Man ersieht übrigens auch, dass $\psi = 0$ keine gleichen Wurzeln enthalten darf, wenn die Entwicklung möglich sein soll.

u. s. f. berechnen, wo λ, λ' unbestimmte Grössen, und es bliebe sodann die willkürliche Grösse $\frac{\lambda}{\lambda'}$ in den Werthen der Wurzeln α und der Grössen μ. Oder auch, wir könnten zu dem System (11) noch eine beliebige lineäre Gleichung

$$a'_0 b_{n+1} + a'_1 b_n + \cdots a'_{n+1} b_0 = 0$$

hinzufügen. Sind hier die a' gegebene Zahlen, so bliebe nichts Unbestimmtes mehr in den b und wir würden eine spezielle Entwicklung erhalten. Lassen wir aber die a' unbestimmt, so würden diese in die b eingehen, ohne dass jedoch eine grössere Allgemeinheit in der Entwicklung dadurch erzielt würde, als im ersten Falle, wenn wir keine weitere Gleichung zu Hülfe nehmen. Zweckmässiger wird es jedoch bei dieser Unbestimmtheit der Coefficienten b sein, eine Wurzel α der Gleichung $\psi = 0$ als willkürlich gegeben anzusehen. Dann muss sich eine Gleichung aufstellen lassen, welche mittelst dieser Wurzel die n übrigen Wurzeln α bestimmt und mithin nur noch vom n^{ten} Grade ist. Diese Gleichung ergiebt sich auf folgende Weise.

Nach Gleichung (14) oder (12) haben wir für μ_s das System von Gleichungen

$$(-1)^{k+n} \cdot \alpha_s^k \psi'(\alpha_s) \mu_s = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + \pi_n^{(s)} a_k. \quad (3)$$
$$(k = 0, 1, \cdots n)$$

wo der Kürze wegen ψ statt $\frac{1}{b_0}\psi$ gesetzt ist, also

$$\psi'(\alpha_s) = (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_{s+1})(\alpha_s - \alpha_{s+1}) \cdots (\alpha_s - \alpha_n). \quad (4)$$

Die Elimination der n Grössen π aus diesem System liefert

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 \cdots a_n \\ a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \\ \cdots\cdots \\ a_n a_{n+1} \cdots a_{2n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} \cdot (-1)^n \psi'(\alpha_s) \mu_s = 0$$

Setzen wir

$$\begin{vmatrix} a_0 \, a_1 \cdots a_n \\ a_1 \, a_2 \cdots a_{n+1} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_n \, a_{n+i} \cdot a_{2n} \end{vmatrix} = J, \quad \begin{vmatrix} a_0 \, a_1 \cdots a_{n-1} & 1 \\ a_1 \, a_2 \cdots a_n & -\alpha \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ a_n \cdots \quad a_{2n-1} & \pm \alpha_s^n \end{vmatrix} = A_s \tag{5}$$

so ist mithin

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{A_s \psi'(\alpha_s)}. \tag{6}$$

Nun ist ferner $\psi' x = 0$ die Gleichung, welche die sämmtlichen α mit Ausnahme von α_s zu Wurzeln hat. Also ist

$$\psi'(x) = x^n - \pi_1^{(s)} x^{n-1} + \pi_2^{(s)} x^{n-2} - \cdots \pm \pi_n^{(s)} = 0 \tag{7}$$

die Gleichung dieser Wurzeln. Nehmen wir diese Gleichung, zu dem System (3) hinzu und eliminiren aus den $n+2$ Gleichungen zugleich die π und ψ', so erhält man die gesuchte Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & +x^2 & \cdots & \pm x^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} & \pm \alpha_s^n \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

welche, wenn α_s gegeben die n übrigen Wurzeln α gibt. Der Coefficient der höchsten Potenz x^n in dieser Gleichung ist A_s. Also ist diese Determinante in (8), wie aus (7) zu ersehen $= A_s \psi'(x)$. Der Nenner von μ_s in (6) ist also das, was diese Determinante wird, wenn man darin α_s statt x setzt. Also

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{H(\alpha_s)}, \tag{9}$$

wo

$$H(\alpha_s) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_s & +\alpha_s^2 & \cdot\cdot & \pm\alpha_s^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot\cdot & a_n & 1 \\ a_1 & a_1 & a_3 & \cdot\cdot & a_{n-1} & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdot\cdot & a_{2n} & \pm a_s^n \end{vmatrix} \tag{10}$$

und die Entwicklung von f ist mithin

$$(-1)^n \cdot f = \tag{11}$$

$$J \left\{ \frac{(x_1 - \alpha_1 x_2)^{2n}}{H(\alpha_1)} + \frac{(x_1 - \alpha_2 x_2)^{2n}}{H(\alpha_2)} + \cdots + \frac{(x_1 - \alpha_{n+1} x_2)^{2n}}{H(\alpha_{n+1})} \right\}$$

Die Determinanten die zu dieser Entwicklung dienen, sind bekannte Covarianten, resp. Invarianten von f. J ist die bekannte Invariante $n+1^{\text{ten}}$ Grads, welche symbolisch, wenn

$$f = b_x^{2n} = c_x^{2n} = \cdots = g_x^{2n} = h_x^{2n},$$

durch die Formel dargestellt wird,

$$J = (bc)^2 (bd)^2 \cdots (gh)^2. \tag{12}$$

H ist eine Covariante $C_{2n,n}$ von der Ordnung $2n$ und vom Grade n in den Coefficienten. Sie ist die Evektante der Invariante J_{n+1} und stellt sich mithin symbolisch in der Form dar

$$H = (cd)^2 \cdots (gh)^2 c_x^2 d_x^2 \cdots h_x^2 \tag{13}$$

Diese Covariante lässt sich auch schreiben, wenn C ein Zahlenfaktor,

$$H = C. \begin{vmatrix} \dfrac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-2}} & \dfrac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot\cdot & \dfrac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \dfrac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{dx^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} & \cdot & \cdot & \dfrac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Ist f eine biquadratische Form, so ist H die Hesse'sche Covariante.

Die Determinante (8), welche die Wurzeln α liefert, wenn a_s gegeben, ist eine Covariante vom n^{ten} Grad in den x, und in den α und auch vom n^{ten} Grad in den a. Sie ist, wie sich aus den folgenden n^0 4 ergeben wird, die apolare Form n^{ter} Ordnung von der Polaren von α in Bezug auf f, also geradezu die Sylvester'sche Canonisante dieser ungeraden Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads. Sie kann auch, wenn (α, f) die Polare von α bezeichnet, in der Form geschrieben werden

$$\left|\begin{matrix} \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{2n-2}} \cdot \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{d_1 x_1^{2n-3} dx_2} \cdot\cdot \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{d^{2n-2}\cdot(\alpha f)}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-2}} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_2^{2n-2}} \end{matrix}\right| \tag{15}$$

Der symbolische Ausdruck derselben ist

$$(cd)^2 \cdot\cdot\, (gh)^2\, c_\alpha\, d_\alpha \cdot\cdot\, h_\alpha \cdot c_x\, d_x \cdot\cdot\, h_x\,.$$

Hier mögen ein paar Beispiele einer solchen Entwicklung folgen:

1) Sei $f = (x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

$$a_0 = 1,\, a_1 = 0,\, a_2 = -\frac{1}{5},\, a_3 = 0,\, a_4 = +\frac{1}{5},\, a_5 = 0,\, a_6 = -1$$

Hiemit berechnet sich

$$J = \frac{4^2}{5^4}$$

Gleichung (8) wird

$$\frac{4}{5^3}\left\{(\alpha+\alpha^3)x^3 - (1+5\alpha^2)x^2 + (5\alpha+\alpha^3)x - (1+\alpha^2)\right\} = 0$$

Auf der linken Seite $x = \alpha$ gesetzt, gibt

$$H(\alpha) = \frac{4}{5^3}(\alpha^2 - 1)^3,$$

also H nur um einen constanten Faktor von f verschieden, analog wie bei biquadratischen Formen, wenn f ein vollständiges Quadrat. Die Zerlegung ist daher

$$-f = \frac{4}{5}\left\{\frac{(x-\alpha_1)^6}{(\alpha_1^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_2)^6}{(\alpha_2^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_3)^6}{(\alpha_3^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_4)^6}{(\alpha_4^2-1)^3}\right\}.$$

Die Wurzel der obigen Gleichung 3^{ten} Grads sind

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha},\ \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = \frac{2\,\alpha \pm (1-\alpha^2)\sqrt{-1}}{1+\alpha^2}.$$

Einfacher würde die Formel, wenn man $\alpha = \dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ setzt. Dann sind die 4 Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1+\beta}{1-\beta},\ \alpha_2 = \frac{1-\beta}{1+\beta},\ \alpha_3 = \frac{1+\beta\sqrt{-1}}{1-\beta\sqrt{-1}},\ \alpha_4 = \frac{1-\beta\sqrt{-1}}{1+\beta\sqrt{-1}},$$

wo nun β beliebig bleibt.

2) Sei $f = 6\,x\,y\,(x^4 + y^4)$.

$$a_1 = a_5 = 1,\ a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0, \text{ also } J = 1.$$

Die Gleichung (8) wird

$$\alpha + x + \alpha^3 x^2 + \alpha^2 x^3 = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha_2 = -\alpha$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-1}$, $\alpha_4 = -\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-1}$.

Die linke Seite der Gleichung gibt, wenn α statt x gesetzt wird,

$$H(\alpha) = 2\,\alpha\,(1 + \alpha^4).$$

Hiermit ist

$$-f = \frac{(x-\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)} - \frac{(x+\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)}$$

$$+ \frac{(\alpha x - \sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}} - \frac{(\alpha x + \sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}}$$

Hätten wir entsprechend der Bemerkung am Anfang von $n^0 3$ die apolare Form ψ vom 4^{ten} Grad berechnet, indem wir zu den drei Bedingungsgleichungen (11) $n^0 2$, welchen die Coefficienten b genügen müssen, noch eine Gleichung $a'_0 b_4 + \cdots + a'_4 b_0 = 0$ mit beliebigen Coefficienten a' hinzunehmen, so hätte man erhalten

$$\psi = -a'_2 - x^2(a'_4 - a'_0) + a'_2 x^2 = 0,$$

oder $\dfrac{a'_4 - a'_0}{a'_2} = k$ gesetzt, $x^4 - kx^2 - 1 = 0$, deren Wurzeln

$$x = \pm\sqrt{k \pm \sqrt{k^2+1}} \quad \text{(wo } k \text{ willkürlich).}$$

Irgend eine dieser Wurzeln statt α in Gleichung (8) eingesetzt, liefert die drei andern. Denn für

$$\alpha = +\sqrt{k + \sqrt{k^2+1}} \text{ ist } \alpha_2 = -\alpha, \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{k - \sqrt{k^2+1}}$$

$\pm\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-1}$, übereinstimmend mit obigem.

4. Herr **Sturm** hat in der angeführten Abhandlung[1]) den Satz gegeben: „Multiplicirt man eine Form V_i mit ihrer Polaren W_{n-i} bezüglich U_n, so erhält man, sobald $n-i$ ungerade ist, eine zu U_n apolare Form n^{ten} Grads." Dieser Satz ist indessen nur ein spezieller Fall von folgendem: Ist ψ_i apolar zu f_n und φ_k stellt k Punkte der apolaren Gruppe ψ_i dar, sodass $\psi_i = \varphi_k \cdot \psi_{i-k}$, wo ψ_{i-k} eine Form $(i-k)^{\text{ten}}$ Grades ist, so muss ψ_{i-k} apolar sein zu der Polaren von φ_k bezüglich

1) Crelle's Journ. 86. p. 119.

f_n, oder, nach der früher gebrauchten Bezeichnung, zu (φ_k, f_n). Dies folgt sofort aus der Theorie der Polaren oder der harmonischen Mittelpunkte.

Ist $i = n$, also $\psi_n = \varphi_k \cdot \psi_{n-k}$, so muss demnach ψ_{n-k} apolar sein zu (φ_k, f_n) und wenn $n - k$ ungerade, so kann man für ψ_{n-k} diese Polare (φ_k, f_n) selbst nehmen, da eine ungerade Form zu sich selbst apolar ist.[1]) Dies ist der Satz von Herrn Sturm.

Aus dem allgemeinen Satze ergiebt sich nun aber sofort, was oben (n^0 3) von der Determinante (8), aus welcher die Wurzeln α sich bestimmen, gesagt wurde. Denn ist ψ_{n+1} apolar zu f_{2n} und ψ_{n+1} zerlegt sich in $\varphi_1 \cdot \psi_n$, so muss ψ_n apolar sein zu der Polare $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$. Aber diese ungerade Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads hat nur eine apolare Form n^{ten} Grads, nämlich die „Canonisante" von Sylvester, und folglich muss ψ_n eben die Canonisante von $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$ sein; also auch die Determinante (8) nach dortiger Bezeichnung die Canonisante von (αf). Von diesen Betrachtungen ausgehend, hätte man direkt zu der Gleichung (8) gelangen können, hätte aber dabei nichts gewonnen für die Bestimmung der Coefficienten μ.

5. Es ist bekannt, dass wenn die Invariante J verschwindet, die Form f $2n^{\text{ten}}$ Grads sich in eine Summe von nur n Potenzen zerlegen lässt. In diesem Falle $J = 0$ verschwindet in der That in der Entwicklung (11) der Coefficient μ_s, welcher zu der beliebigen Wurzel α_s gehört. Die andern Coefficienten μ aber verschwinden im Allgemeinen nicht. Verschwindet nämlich μ_s, so wird das System der $(n+1)$ Gleichungen (3) n^0 3.

$$0 = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + \pi_n^{(s)} a_k,$$
$$(k = 0, 1 \cdots n)$$

---

1) Rosanes „Ueber ein Princip der Zuordnung etc." Crelle's Journ. 76.

deren Determinante $J = 0$ ist. Lässt man eine dieser Gleichungen, z. B. die letzte, als durch die andere bestimmt, weg und nimmt die Gleichung (7) hinzu, so erhält man für die Gleichung, welche die n übrigen α gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - x + x^2 \cdots \pm x^n \\ a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots a_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n-1}\, a_n \quad a_{n+1} \cdots a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{17}$$

Die willkürliche Grösse α_s hebt sich ganz aus der Potenzdarstellung heraus. Die Determinante in (17) ist aber nichts anderes als die mit A_s bezeichnete Determinante (5), wenn man darin α_s durch x ersetzt. Für jede der n Wurzeln α_i dieser Gleichung verschwindet mithin die Grösse A_i im Nenner des Ausdrucks für μ (6) und alle Coefficienten μ ausser μ_s, welches $= 0$ wird, nehmen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Dieselben müssen sodann aus den ursprünglichen Gleichungen direkt berechnet werden, aber die Einfachheit ihres Ausdrucks geht verloren.

6. Ist speziell f eine biquadratische Form

$$f = a_0 x_1^4 + 4\, a_1 x_1^3 x_2 + 6\, a_2 x_1^2 x_2^2 + 4\, a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 \tag{1}$$

und ψ die apolare 3ten Grads

$$\psi = b_0 x_1^3 + 3\, b_1 x_1^2 x_2 + 3\, b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3\,, \tag{2}$$

so hat man die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_3 - 3\, a_1 b_2 + 3\, a_2 b_1 - a_3 b_0 &= 0 \\ a_1 b_3 - 3\, a_2 b_2 + 3\, a_3 b_1 - a_4 b_0 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Ist nun φ eine zweite biquadratische Form

$$\varphi = a_0' x_1^4 + 4\, a_1' x_1^3 x_2 + \cdots \tag{4}$$

und soll dieselbe Form ψ auch apolar sein zu φ, so hat man die zwei weiteren Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a'_0 b_3 - 3a'_1 b_2 + 3a'_2 b_0 - a'_3 b_0 &= 0 \\ a'_1 b_3 - 3a'_2 b_2 + 3a'_3 b_0 - a'_4 b_0 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

und es ist mithin die Bedingung, dass die zwei Formen dieselbe apolare Form 3^{ten} Grads besitzen,

$$D_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Ist diese Bedingung[1]) erfüllt, so kann man zur Bildung der apolaren Form irgend drei der vier Gleichungen (3) und (5) benützen; also

$$\psi = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & -x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

und es werden dann die beiden Formen f und φ nach den Potenzen der Linearfaktoren von ψ entwickelt werden können und ebenso überhaupt alle Formen $f + \lambda\varphi$.

Um die Coefficienten μ der Entwicklung für die ein und die andere Form zu bestimmen, wird man auf die Formeln in $n^0\,2$ zurückgehen. Ist z. B. gegeben

$$f = (x_1 + x_2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$
$$\varphi = 4x_1^3 x_2 + 18x_1^2 x_2^2 + 12x_1 x_2^3 + 9x_2^4\,,$$

---

1) Die Combinante $D_{f,\varphi}$ lässt sich leicht in die symbolische Form überführen. Ist $f = a_x^4 = b_x^4$, $\varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^1$, so erhält man

$$4\,D_{f,\varphi} = (ab)^2 (\alpha\beta)^2 (a\alpha)(a\beta)(b\alpha)(b\beta).$$

so ist die Bedingungsgleichung (6) erfüllt, da $D_{f,\varphi} = 0$ wird. Die apolare Form (7) wird

$$\psi = 3x + x^3,$$

deren Wurzeln $\alpha_1 = 0$, $x_2 = +\sqrt{3}$, $\alpha_3 = -\sqrt{3}$.

Ferner wird für f die Gleichung (8) (n^0 3)

$$\frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{8}{3}\alpha x + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3}\right)x^2\right\} = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für α irgend eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$ ein, so liefert sie die beiden andern. Die Covariante H (hier die Hesse'sche Form) wird

$$H(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + 1)^2.$$

Da ferner $J_3 = \frac{8}{27}$, so erhält man für die speziellen Werthe der α die Entwicklung

$$18f = 16x^4 + (x - \sqrt{3})^4 + (x + \sqrt{3})^4.$$

Für φ aber ist $J_3 = 18$, die Gleichung (8) (n^0 3)

$$-6\alpha^2 + 18 - 3(\alpha^2 + 3\alpha)x - (\alpha^2 + 3\alpha + 6)x^2 = 0$$

Ist α eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$, so gibt die Gleichung die beiden andern. Hieraus (α statt x gesetzt)

$$H(\alpha) = -(\alpha^4 + 6\alpha^3 + 21\alpha^2 - 18);$$

also

$$H(0) = 18,\ H(\sqrt{3}) = -(3 + \sqrt{3}),\ H(-\sqrt{3}) = -18\,(3 - \sqrt{3})$$

und die Entwicklung wird

$$\varphi = -x^4 + \frac{(x - \sqrt{3})^4}{3 + \sqrt{3}} + \frac{(x + \sqrt{3})^4}{3 - \sqrt{3}}.$$

7. Eine biquadratische Form f und ihre Hesse'sche

Form $H(f)$ können jedoch nie nach denselben drei Potenzen enwickelt werden.

Denn ist

$$\varphi = H(f) = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x_1^4 + 2\,(a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_1^3 x_2 + \cdots$$

und bezeichnet man durch $a_0', a_1', \cdots$ die Coefficienten von H mit Binomialcoefficienten geschrieben, also

$$a_0' = a_0 a_2 - a_1^2,\; a_1' = \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2),\text{ u. s. f., so wird}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \end{vmatrix} = -\frac{1}{36}(I_2^3 - 27\, J_3^2) = -\frac{1}{36}\Delta,$$

wo I_2 die quadratische Invariante, J_3 die Invariante 3^{ten} Grads, nämlich

$$I_2 = a_0 a_4 - 4\, a_1 a_3 + 3\, a_2^2\;,\quad J_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

also Δ die Discriminante von f ist. Dies lässt sich leicht mittelst der canonischen Form von f verificiren. Das Verschwinden der Invariante $D_{f,\varphi}$ bedingt mithin, dass f eine Doppelwurzel hat. Der Doppelfaktor von f ist dann auch Doppelfaktor von H[1]. Berechnet man sodann die apolare Form ψ (7) von f und H, so ergibt sich, dass ψ geradezu die dritte Potenz desselben Faktors ist. Die Nenner der Coefficienten μ der Darstellung von f als Potenzsumme verschwinden in diesem Falle und die Entwicklung wird unmöglich.

1) Clebsch, „Binäre Formen" S. 162.