

Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu München.

Band XXIII. Jahrgang 1893.



München.
Verlag der K. Akademie.
1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Beziehung der Aequipotentiallinien und der magnetischen Kraftlinien.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 6. Mai.)

§ 1. In zwei Abhandlungen (diese Sitzungsberichte Bd. 22 Seite 371, 1892 und Bd. 23 Seite 103, 1893) hat Herr Professor v. Lommel eine äusserst interessante Methode angegeben, die Aequipotentiallinien in durchströmten Platten sichtbar zu machen und meines Wissens auch zum ersten Male die wichtige Frage nach ihrer Beziehung zu den Magnetkraftlinien angeregt. Dass diese beiden Curvenscharen im Allgemeinen einen ähnlichen Verlauf nehmen, zeigt Herr v. Lommel in folgender Weise: Die Aequipotentiallinien oder in durchströmten Körpern die Aequipotentialflächen stehen immer senkrecht zu den Stromlinien. Die magnetischen Kraftlinien umkreisen jeden Stromfaden in einer Fläche, die denselben senkrecht durchschneidet. An der Oberfläche eines Leiters wird die gesammte magnetische Kraft die Resultirende aller Magnetkraftlinien sein, die alle Stromfäden umkreisen. Da hiebei die in der unmittelbaren Nachbarschaft liegenden Stromfäden das Meiste zur Summe beitragen und zu ihrer eigenen Richtung senkrechte Magnetkraftlinien liefern, so werden auch die resultirenden Magnetkraftlinien

gewissermassen eine Tendenz haben an der Oberfläche senkrecht zu den Stromlinien zu stehen, also sich der Richtung der Durchschnittslinien der Aequipotentialflächen mit der Körperoberfläche anzuschliessen. Da aber zu den Magnetkraftlinien auch die entfernten Stromfäden, über deren Richtung man im Allgemeinen nichts weiss, beitragen, so werden die resultirenden Magnetkraftlinien im Allgemeinen aus den Aequipotentialflächen heraustreten können. Nach Maxwell's Theorie wird freilich der magnetische Zustand in jedem Punkte nur durch die Zustände der unmittelbaren Umgebung bedingt; man könnte daher meinen, die Magnetkraftlinien müssten an jeder Stelle durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden allein schon bestimmt sein. Allein das wäre ein Irrthum, da durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden bloss eine Differenzialgleichung für die Magnetkraft bestimmt ist, diese selbst aber noch von Grenzbedingungen abhängt, die für Magnetkraftlinien und Aequipotentialflächen ganz verschiedene sind.

Betrachten wir zuerst einen Punkt einer durchströmten Fläche: Die $x y$ Ebene sei Tangentialebene derselben im betrachteten Punkte, die x Richtung sei die Stromrichtung. Für die Componenten α, β, γ der magnetischen Induktion, welche in unmagnetisirbaren Substanzen mit denen der magnetischen Kraft zusammenfallen, haben wir dann:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

u ist die Stromdichte, v und w verschwinden. Da α, β und γ , wenn die Platte dünn ist, in der z Richtung viel rascher als in den darauf senkrechten variiren, so erhalten wir:

$$\beta_0 - \beta_1 = 4\pi \int u dz, \quad \alpha_0 = \alpha_1$$

wozu noch kommt

$$\gamma_0 = \gamma_1,$$

was aus der Gleichung

$$\frac{d(\mu \alpha)}{dx} + \frac{d(\mu \beta)}{dy} + \frac{d(\mu \gamma)}{dz} = 0$$

folgt, wo μ die constant angenommene Magnetisirungszahl ist. Der Index Null bezieht sich dabei auf die eine, der Index 1 auf die andere Plattenseite. Bei jeder von Elektrizität durchströmten Fläche ist daher die Differenz der magnetischen Kraft auf der einen und andern Seite endlich und senkrecht auf der Strömungsrichtung. Hätte man daher einen Nordpol auf der einen und einen gleich starken Südpol auf der andern Seite fest verbunden, so dass sie miteinander längs der Fläche beweglich wären, so würde die gesammte auf beide zusammenwirkende Kraft D überall senkrecht auf den Stromlinien sein. Addirt man hiez zu noch die Kraft S , welche 2 gleich starke, gleich verbundene und gleich gelegene Nordpole erfahren würden, so erhält man die Kraft $M = D + S$, welche ein doppelt so starker nur auf der einen Seite befindlicher Pol erfährt. Die letztere Kraft ist daher immer senkrecht zu den Stromlinien, wenn die Kraft S es ist. Es folgt diess auch ohne Rechnung daraus, dass zu D nur die den Polen unmittelbar benachbarten Stromtheile beitragen, welche man als parallel in einer Ebene strömend betrachten kann. S könnte auch bezeichnet werden als die Kraft, welche an der betreffenden Stelle auf einen mitten in der Platte befindlichen Nordpol von doppelter Stärke wirkt. Ist die Platte eben, so ist S immer senkrecht auf der Platte, daher auch auf den Stromlinien und daher fallen auf der Oberfläche die Kraftlinien, d. h. die Linien, welche überall die Richtung der zu diesen parallelen Componente der magnetischen Kraft angeben, mit den Aequipotentiallinien zusammen. Natürlich stören auch Zuleitungsdrähte nicht, die in derselben Ebene liegen.

Hat man in einer Ebene einen Magnetpol und im Raume

2 Stromelemente, die vollkommen symmetrisch bezüglich dieser Ebene liegen, so steht die resultirende Kraft, die sie auf den Magnetpol ausüben, stets senkrecht auf dieser Ebene, wie man am besten sieht, wenn man diese Ebene als $y\ z$ Ebene wählt, darin die z Axe durch den Magnetpol legt, die $x\ y$ Ebene aber durch beide Stromelemente und in deren Richtung legt, so dass beide zur y Axe symmetrisch liegen. Ist die Stromrichtung der y - oder z -Richtung parallel, so hat die Magnetkraft die x Richtung, ist die Stromrichtung der x Richtung parallel, so ist die magnetische Kraft Null. Daraus folgt, dass, wenn die durchströmte Fläche an einer Stelle eben ist, an andern aber sich in 2 zu dieser Ebene symmetrische Theile theilt, die auch symmetrisch durchflossen werden, in dem ebenen Theile die Kraft S immer senkrecht zu dessen Ebene ist und die magnetischen Kraftlinien nicht aufhören Aequipotentiallinien zu sein.

Wollte man daher nach Herrn v. Lommel's Methode die Aequipotentiallinien auf einer Platte in einem Falle zeigen, wo sich die Elektroden nicht am Rande befinden, so könnte man 2 gleich beschaffene bezüglich der Plattenebene symmetrische Elektrodendrähte benutzen. Aus dem Gesagten folgt weiter: Wenn eine durchströmte Fläche oder ein Körper eine Symmetrieebene haben, bezüglich deren auch die Stromlinien symmetrisch sind, so muss dieselbe im Körper Stromfläche sein und die magnetischen Kraftlinien müssen darauf senkrecht stehen. Die Thatsache, dass die Kraft, die auf einen Magnetpol wirkt, der sich mitten im Innern eines durchströmten ebenen Blechs befindet, immer senkrecht auf dem Bleche steht, ist hievon eigentlich nur ein specieller Fall. Ein anderer bezieht sich auf eine Rotationsfläche, in der die Stromlinien Meridiankurven sind, oder einen Rotationskörper, in dem die Stromflächen Rotationsflächen von gleicher Axe sind; die magnetischen Kraftlinien sind dann Parallelkreise.

Die Zahl der allgemeinen Bedingungen, unter denen die

magnetischen Kraftlinien senkrecht zu den Stromlinien sind, liesse sich sicher noch vermehren; doch zeigt schon das gesagte, dass in allen von Herrn v. Lommel untersuchten Fällen mit Ausnahme des letzten in der 2. Abhandlung pag. 109 angeführten und in Fig. 3 dargestellten die Magnetkraftlinien mit den Aequipotentiallinien zusammenfallen und zwar liefert es hiefür meines Wissens den ersten strengen Beweis.

Doch sind natürlich auch Fälle möglich, wo dies nicht stattfindet. Ein Blech A habe z. B. die Form der Mantelfläche eines halben geraden Kreiscylinders; daran seien 2 andere halbkreisförmige Bleche B und C gelötet, welche Basis und Gegenfläche des Halbcylinders bilden. Die Mittelpunkte der letztern seien die beiden Elektroden. Wäre nur die Strömung im Bleche B vorhanden, so wären die magnetischen Kraftlinien diesem concentrische Kreise. Die in der Mantelfläche A fliessenden Ströme aber üben auf einen Magnetpol, der nahe dem Durchmesser d liegt, der das Blech B begrenzt, eine Kraft aus, die eine d parallele Componente hat. Die Kraftlinien werden also den Durchmesser d nicht mehr senkrecht treffen, sondern auf der Aussenseite der Platte B Kreisstücken ähneln, die grösser als Halbkreise sind, deren Mittelpunkt also innerhalb des Blechs B liegt. Auf der der Innenseite des hohlen Halbcylinders zugewandten Seite des Bleches B aber werden sie Kreisstücken gleichen, die kleiner sind als Halbkreise, daher ihren Mittelpunkt ausserhalb des Bleches B haben. Auf beiden Seiten weichen sie daher im entgegengesetzten Sinne von den Aequipotentiallinien ab.

Ich habe einen sehr langen überall gleich breiten Blechstreifen in eine Form biegen lassen, wo die Abweichung zwischen Stromlinien und Magnetkraftlinien noch drastischer hervortritt, nämlich so, dass ein Theil des Blechstreifens eben ist und in geringer Distanz davon etwas unterhalb ein anderer Theil desselben Blechstreifens vorüberläuft. Die Ebenen der



genannten beiden Theile des Streifens sind, wo der eine gerade unter dem andern vorüberläuft, parallel. Die Mittellinien der beiden Streifentheile aber aufeinander senkrecht. In grösserer Entfernung kann der Streifen, wie man will, gebogen sein. Die beiden ebenfalls in grösserer Entfernung befindlichen Enden können wieder gegen einander gebogen und beliebig mit je einer Elektrode verbunden werden. Durch die Verbiegung des Streifens ändern sich bekanntlich weder die Stromlinien noch die Aequipotentiallinien im Innern und an der Oberfläche des Streifens. Letztere sind in einiger Entfernung von den Elektroden, wo der Streifen eben ist, zur Mittellinie senkrechte Geraden. Die magnetischen Kraftlinien aber werden dort, wo sehr nahe unterhalb der andere Theil des Streifens vorüberläuft, fast um 45 Grad gedreht. Die Definition der Aequipotentiallinien ist dabei folgende: Von 2 Galvanometerdrähten setze man den einen an einem beliebigen Punkt der Oberfläche eines leitenden durchströmten Körpers auf; der Inbegriff aller Punkte, wo der 2. aufzusetzen ist, damit das Galvanometer stromlos bleibt, ist eine Aequipotentiallinie. Da der Werth des Potentials selbst an der Oberfläche keinen Sprung macht, müssen die Aequipotentialflächen unmittelbar an der Oberfläche im Innern und ausserhalb des Leiters gleich verlaufen, ihr Verlauf unmittelbar an der Oberfläche kann daher durch den in einiger Entfernung unten vorbeigehenden Theil des Streifens nicht geändert werden.

§ 2. Bezüglich der, wie alle auf einer neuen Idee beruhenden Verknüpfungen zweier Phänomene, äusserst interessanten Versinnlichung des Hallphänomens, welche Herr v. Lommel in der 1. Abhandlung gibt, möchte ich folgendes bemerken: So gut als wir die Stromrichtung der positiven Elektrizität ins Auge fassen, können wir auch auf die der negativen unser Augenmerk richten, dann würden in der Fig. 3 von Herrn v. Lommel's

1. Abhandlung pag. 374 die den Pfeilen bei *A* und *B* entgegengesetzten die Stromrichtung der negativen Elektrizität andeuten; auch in den Ampère'schen Strömen des Magnetfeldes würden wir die Stromrichtung der negativen Elektrizität durch einen dem gekrümmten Pfeile entgegengesetzten auszudrücken haben. Die Molekularströme der Platte würden einen resultirenden Strom geben, in dem die negative Elektrizität wieder den gefiederten Pfeilen entgegengesetzt fließt. Die Molekularströme sind also wie bei Herrn v. Lommel längs *ab* dem Primärstrom entgegen, längs *cd* aber gleichgerichtet. So gut wie der Strom der positiven wird also auch der der negativen Elektrizität längs *ab* vermindert, längs *cd* verstärkt. Man würde daher auch, wenn man die Strömung der negativen Elektrizität verfolgt, zu dem Resultate kommen, dass im Punkte *D* ein höheres Potential (eine höhere die jetzt negative Elektrizität treibende Kraft) als im Punkte *C* herrscht und folgerichtig jetzt schliessen, dass auch die negative Elektrizität von *D* durch das Galvanometer nach *C* fließt, dass also im Hallstrome positive und negative Elektrizität in derselben Richtung fließen oder wenigstens würde man, wenn es zufällig üblich wäre, statt der positiven die negative Elektrizität zu verfolgen, in der Halleitung für die negativen dieselbe Stromrichtung finden, wie sie Herr v. Lommel für die positive findet. Natürlich würde man dieser Konsequenz vom unitarischen Standpunkt oder auch, wenn man positive und negative Elektrizität als nicht gleichberechtigt betrachtet, entgehen, dann aber für den Hallstrom den entgegengesetzten Sinn finden, je nachdem man die positive oder die negative Elektrizität als die allein existirende betrachtet.

§ 3. Aus der Erfahrung und Theorie übereinstimmend folgt (vergl. meine Theorie des Hallphänomens, Sitzungsber. der Wien. Akad. Bd. 94 S. 644, 1886, unmittelbar nach Gleich-

ung 12), dass die elektromotorische Kraft des Hallstroms

$$\varepsilon = \frac{CMJ}{d}$$

ist, wo C eine Constante des Materials, J die

Stärke des Primärstroms, M die Intensität des Magnetfeldes und d die Plattendicke ist. Diese elektromotorische Kraft ist die Potentialdifferenz, welche an 2 vor Wirkung des Magnets äquipotentialen Stellen des Plattenrandes durch das Magnetfeld erzeugt wird, wenn diese durch keinen Nebenschluss (Halleitung) verbunden sind; also auch wenn dieser Nebenschluss zwar vorhanden, aber darein eine elektromotorische Kraft $-\varepsilon$ eingefügt wäre. Wird diese dann entfernt, so tritt in der Halleitung genau dieselbe Stromintensität i auf, in der Platte aber zum Primärstrom hinzu, welche allein aufträte, wenn der Primärstrom ganz hinweggenommen würde und bloss in der Halleitung die elektromotorische Kraft $+\varepsilon$ thätig wäre. Ist also r der Widerstand der Galvanometerleitung zwischen den beiden Punkten, wo sie die Platte berührt, R der Widerstand der Platte zwischen denselben Punkten, so ist:

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}.$$

Dies ist richtig, ob r gross oder klein gegen R ist, was auch schon experimentell bestätigt wurde.¹⁾ Nur wenn gleichzeitig r nicht gross gegen R und C sehr gross wären, könnten Abweichungen eintreten; es würde dann die Intensität des Hallstroms nicht klein gegen die des primären und daher durch den ersteren selbst wieder ein Hallstrom 2. Ordnung erzeugt, der dem Primärstrom entgegenwirken würde. Dass zum Gelingen des Hallversuches die Bedingung erfordert würde, dass r klein gegen R sei, scheint mir ein Missverständniss zu sein, welches offenbar durch den Um-

1) Vergl. Ettingshausen und Nernst, über das Hall'sche Phänomen, Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 94, pag. 579, 1886.

stand hervorgerufen wurde, dass bei Gold, wo C klein ist, r nicht allzugross gegen R sein darf, da ja dieses dem Widerstande der Batterie, jenes dem äussern Widerstand vergleichbar ist und der günstigste Effekt bekanntlich immer eintritt, wenn diese beiden Widerstände nicht allzu verschieden sind oder, wenn man diese Analogie nicht gelten lassen will, da der Halleffekt nur der Breite der Platte und der Dichte des Primärstroms proportional ist, letztere aber nur bei dünnen Platten genügend gross gemacht werden kann. Deshalb wurden aus einem so gut leitenden Materiale wie Gold äusserst dünne Platten gewählt. Es entspricht der Erfahrung, wenn H. v. Lommel die elektromotorische Kraft des Hallstroms proportional JM und verkehrt proportional d findet, dass er sie aber auch verkehrt proportional r dem Galvanometerwiderstand, dagegen die Klemmspannung der Galvanometerleitung von r unabhängig findet, scheint mir ein Räthsel.

§ 4. Bezüglich der Ableitung der Strömung in der Kugel durch H. v. Lommel bemerke ich nur, dass mir erstens der Beweis, dass die 2 Kugelsysteme, die sich rechtwinklig durchschneiden, wirklich als Aequipotentiale und dazu gehörige Stromflächen betrachtet werden können sowie, dass hiebei die Strömung in einer Kugelschale von überall gleicher Dicke gefunden wird, noch der Ergänzung zu bedürfen scheint.