Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band I. Jahrgang 1871.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1871.

In Commission bei G. Franz.

Herr Bauernfeind sprach:

„Ueber eine mechanische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe."

Die Aufgabe, um deren Lösung auf mechanischem Wege es sich hier handelt, hat die Bestimmung der Lage eines Punktes D aus der bekannten Lage dreier anderen Punkte A, B, C zum Gegenstande, wesshalb sie auch das „Rückwärtseinschneiden des Punktes D auf drei gegebene Punkte" genannt wird. Diese Aufgabe ist eine der wichtigsten in der praktischen Geometrie und hat seit ihrer Erfindung durch Snellius (1614) und ihrer Bearbeitung durch Pothenot (1692) eine beträchtliche Literatur hervorgerufen. Am meisten beschäftigten sich die Geodäten mit der graphischen Lösung der Aufgabe oder mit der Bestimmung eines Vierecks a b c d auf dem Messtische, welches dem Viereck A B C D in der Natur geometrisch ähnlich ist.

Die einfachste graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe geht aus der Betrachtung hervor, dass der Punkt D durch die zwei Sehwinkel u und v, unter welchen die Seiten A B und B C des Dreiecks A B C von ihm aus erscheinen, charakterisirt ist: kein anderer Punkt gibt gleichzeitig dieselben zwei Sehwinkel, wenn man den seltenen Fall ausschliesst, dass D mit A, B, C in einem Kreise oder in einer Geraden liegt. Man wird daher einen geometrischen Ort des Punktes d auf dem Messtische erhalten, wenn man über a b als Sehne einen Kreis beschreibt, der den Peripheriewinkel u fasst; ein zweiter geometrischer Ort des Punktes d ist ein Kreis über b c, welcher durch den Peripheriewinkel v bedingt ist: da nun der Punkt d auf diesen beiden Kreisen liegen muss, so kann er sich nur in ihrem Durchschnitte befinden, und er lässt sich folglich finden, wenn man auf dem Felde erst die Winkel u, v misst und dann die beiden Kreise a b d und b c d construirt.

Dieses einfache direkte Verfahren, den Punkt d zu bestimmen, wenden aber die praktischen Geometer nicht an, weil sie auf dem Messtische keine geometrischen Constructionen ausführen wollen und auch der Fall eintreten kann, dass der Mittelpunkt eines Kreises über das Messtischblatt hinaus fällt, wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Man gibt gewöhnlich dem indirekten Verfahren von Lehmann, welches den gesuchten Bildpunkt d durch systematisches Probiren liefert, den Vorzug, obgleich es in der Regel mühsam auszuführen ist.

Ich habe nun versucht, das eben beschriebene direkte Verfahren zur Geltung zu bringen, indem ich eine Vorrichtung ersann, womit man die geometrischen Oerter von d ohne jede Construction sofort zeichnen und folglich auch deren Durchschnitt d selbst bestimmen kann. Diese Vorrichtung hat das Aussehen eines Zirkels, uud da sie vorzugsweise zum Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte dient, so will ich sie „Einschneidezirkel“ nennen.

Dieser Zirkel unterscheidet sich von dem gewöhnlichen dadurch, dass er keine Spitzen hat und nicht wie dieser in vertikaler Stellung, sondern in horizontaler, dem Messtischblatte paralleler Lage zum Beschreiben von Kreisen gebraucht wird. Ausserdem ist an jedem Schenkel ein Diopter angebracht, dessen gemeinsames Ocular die in eine Spitze auslaufende Axe des Zirkelgewinds ist: mit diesen Diopten werden die Winkel u und v gemessen und mit den unter diesen Winkeln gegen einander gestellten Zirkelschenkeln die vorhin genannten Kreise beschrieben. Hat man nämlich die Zirkelschenkel unter dem Winkel u festgestellt und führt dieselben an zwei äusserst feinen Nadeln, welche in den Punkten a und b des Dreiecks a b c stecken, gleitend hin, so beschreibt der Winkelscheitel (hier die untere Axenspitze) den Kreis a b d; wird dagegen der Zirkel auf den Winkel v eingestellt und an den Nadeln in b und c hingeführt, so beschreibt er den Kreis b c d, dessen Schnitt mit dem ersteren der gesuchte Punkt d ist.

Mit dem Einschneidezirkel lässt sich auch sofort durch drei gegebene Punkte ein Kreis legen. Befinden sich nämlich in zwei Punkten a, b feine Nadeln und bringt man, während die Axenspitze den dritten Punkt d einnimmt, die noch beweglichen Zirkelschenkel mit diesen Nadeln zur Berührung und stellt sie unter den Winkel a d b fest, so beschreibt die genannte Spitze bei dem Gleiten der Schenkel an den Nadeln a, b einen Kreis, der durch die drei Punkte a, b, d geht. Ergäbe sich bei der Lösung der Pothenot'schen Aufgabe, dass dieser Kreis auch durch den Punkt c ginge, so wäre damit der Beweis geliefert, dass das Bild-Viereck a b c d und folglich auch das in der Natur gegebene A B C D auf einem Kreise läge und folglich der oben erwähnte Ausnahmsfall stattfände, in welchem die Bestimmung der Lage des Punktes D aus den drei gegebenen Punkten A, B, C nicht mehr möglich ist. Es ist ohne Zweifel ein Vorzug des Einschneidezirkels gegenüber dem Lehmann'schen Verfahren, dass er auf diesen Ausnahmsfall sofort aufmerksam macht und auch hier, wie in allen anderen Fällen, zeitsparend wirkt, ohne an Genauigkeit etwas vermissen zu lassen.

Schliesslich habe ich noch einer weiteren Verwendung meines Zirkels zu erwähnen. Derselbe dient nämlich, wenn, wie hier, seine Schenkel von der Axe aus nach irgend einer Einheit, z. B. Centimeter, gleich getheilt sind, auch zur Centrirung und Orientirung des Messtisches. Ist nämlich auf dem Felde die Gerade M N und auf dem Messtische ihr Bild m n gegeben, das seitwärts von der Drehaxe des Tischblattes liegt, und soll der Messtisch so aufgestellt werden, dass m in das Loth von M und m n in die Vertikalebene M N kommt, so kann dieser Forderung entweder durch eine beiläufige Aufstellung des Tisches nach dem Augenmasse und successives Verbessern dieser Aufstellung, oder auch durch ein systematisches Vorgehen entsprochen werden, wenn man zunächst auf dem Blatte dessen Durchschnittspunkt p mit der Drehaxe des Messtisches sucht, dann den Winkel p m n = w und die Länge des Schenkels m p = l misst und hierauf am Boden den Winkel w von M aus an die Gerade M N legt, wodurch sich mit Hilfe von l der Punkt P ergibt, über dem der Drehpunkt p lothrecht aufzustellen ist. Hat man diese Aufstellung und die Horizontalstellung des Tisches zu Stande gebracht, so kann derselbe ohne jede Verschiebung, lediglich durch grobes und feines Drehen, nicht bloss in Bezug auf m centrirt, sondern auch in Bezug auf m n orientirt werden, wie leicht einzusehen ist.

Eine ausführlichere Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs meines Einschneidzirkels wird demnächst in dem XI. Bande der Abhandlungen der math. phys. Classe der k. Akademie der Wissenschaften erscheinen.