

**Sitzungsberichte**  
der  
**mathematisch-physikalischen Classe**  
der  
**k. b. Akademie der Wissenschaften**  
zu **München.**

---

**Band XIX. Jahrgang 1889.**

---

**München.**  
Verlag der K. Akademie.  
1890.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 1. Juni 1889.

1. Herr AUREL VOSS spricht über: „die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst“.

2. Herr LUDWIG RADLKOFER macht Mittheilungen: a) „über Nothochilus, eine neue Scrophularineen-Gattung aus Brasilien“, b) „über Theophrasta und Clavija“.

3. Herr GUSTAV BAUER legt eine von dem correspondirenden Mitgliede der Classe, Herrn M. NÖTHER in Erlangen eingesandte Abhandlung: „zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung“ vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr RICHARD HERTWIG hält einen Vortrag „über die Conjugation der Infusorien“. Die Abhandlung wird in die Denkschriften aufgenommen werden.

## Ueber die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

Von A. VOSS.

(Eingelaufen 7. Juni)

Die folgenden Mittheilungen beziehen sich auf das Problem der Transformation einer bilinearen Form in sich selbst durch zu einander conjugirte lineare Substitutionen. Jede Form  $S$  von nicht verschwindender Determinante lässt solche Transformationen zu, die nur dann identisch sind,

wenn  $S$  in Bezug auf contragrediente Transformationen irreducibel ist. Die sämmtlichen Substitutionen  $U$  dieser Art zerfallen in zwei Classen, je nachdem sie mit  $S$  oder  $S^2$  vertauschbar sind. Die Substitutionen der ersten Classe sind in § 2 vollständig behandelt; für die der zweiten ist in § 3 im wesentlichen nur die Reduction auf den einfachsten Fall angegeben; doch muss die genaue Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen Gruppen der hier möglichen Substitutionen einer ausführlicheren Darlegung vorbehalten bleiben.

Bei allen diesen Fragen tritt eine lineare Gleichung, deren symbolische Form

$$S X + X S = 0$$

ist, auf, die mit der Theorie der conjugirten Transformationen überhaupt in engem Zusammenhange steht.

Von besonderem Interesse schien mir die Frage, ob das Problem der conjugirten Transformation ebenso wie das der congruenten (cogredienten) Transformation solche Lösungen besitzen kann, die durch rationale Operationen gefunden werden können. Dies ist in der That immer der Fall, sobald die beiden Determinanten

$$S - E\varrho, |S + E\varrho|$$

nicht theilerfremd sind, und die Ermittlung aller Substitutionen  $U$ , für die wenigstens eine der Determinanten

$$U + E, U - E$$

nicht verschwindet, sowie der aus diesen herleitbaren Grenzfälle, lässt sich durch die Betrachtung des eben bemerkten Systemes von linearen Gleichungen, dessen Determinante der Coefficienten eine symmetrische verschwindende Determinante sein muss, in ähnlicher Weise wie bei der congruenten Transformation erledigen.

§ 1.

Die conjugirte Transformation einer bilinearen Form  
in sich selbst.

Soll die bilineare Form von  $n$  Variabelnpaaren  $x, y$

$$S = \sum a_{ik} x_i y_k,$$

deren Determinante, wo nicht das Gegentheil besonders angegeben wird, als nicht verschwindend vorausgesetzt werden soll, durch die beiden zu einander conjugirten linearen Substitutionen<sup>1)</sup>

$$x_i = \sum c_{im} \xi_m,$$

$$y_k = \sum c_{nk} \eta_n,$$

in sich selbst übergehen, so hat man diejenigen Systeme der  $n^2$  Substitutionscoefficienten  $c_{ik}$  zu bestimmen, welche die  $n^2$  quadratischen Gleichungen

$$1) \quad \sum_{i,k} a_{ik} c_{im} c_{nk} = a_{mn}$$

befriedigen. Die Determinante der  $c_{ik}$ , die Transformationsdeterminante, darf dabei nicht verschwinden. Bezeichnet man sie mit  $\varepsilon$ , so ist nach 1)

$$\varepsilon^2 = 1.$$

Die Substitution heisse auch hier eine eigentliche, resp. uneigentliche, je nachdem  $\varepsilon$  gleich  $+1$  oder gleich  $-1$  ist.

Man kann, wenn die zu der Substitution gehörige bilineare Form

$$\sum c_{ik} x_i y_k$$

durch  $U$  bezeichnet wird, die Gesamtheit der Gleichungen 1) in der symbolischen Gleichung

$$2) \quad USU = S,^2)$$

1) Ueber die Bezeichnung vergl. Kronecker, Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsb. d. Berl. Academie 1874, S. 397.

2)  $U$  soll dabei der Kürze halber die Substitution heissen, welche die Form  $S$  in sich transformirt.

zusammenfassen, wobei nach Herrn Frobenius der Multiplikationsprocess

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i}$$

nicht commutativ, wohl aber associativ und distributiv ist. Bezeichnet man die Form

$$\sum x_i y_i$$

durch  $E$ , so gilt die Gleichung

$$AE = EA = A;$$

versteht man ferner unter  $A^{-1}$  diejenige Form  $X$ , welche der Gleichung

$$AX = E$$

genügt, so ist

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E;$$

und überhaupt

$$(AB \dots C)^{-1} = C^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}.$$

Ist insbesondere eine Form  $A$  zerlegbar in eine Summe von Formen  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ , von denen je zwei kein Variabelnpaar gemeinsam haben, so ist<sup>1)</sup>

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_k)^{-1} = A_1^{-1} + A_2^{-1} + \dots + A_k^{-1}.$$

Hieraus ergeben sich sofort einige Eigenschaften der conjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

1) Aus der Identität

$$S(U - \varrho E) = U^{-1}(E - \varrho U)S,$$

folgt:

$$|U - \varrho E| = (-\varrho)^n \varepsilon |U - \varrho^1 E|;$$

wobei unter  $|A|$  die Determinante der Form  $A$  verstanden und  $\varrho^1 = \frac{1}{\varrho}$  gesetzt ist.

1) Die grundlegende Arbeit von Frobenius „Ueber bilineare Formen und lineare Substitutionen“, Journal von Borchardt, Bd. 84, S. 1 u. fl., werde ich im folgenden mit F. bezeichnen.

Bezeichnet man als charakteristische Function einer Form  $A$  die Determinante<sup>1)</sup>

$$|A - qE|$$

so folgt:

Die charakteristische Function jeder Substitution  $U$ , welche die Form  $S$  in sich transformirt, hat ausser den Wurzeln  $q = \pm 1$  nur Paare zu einander reciproker Wurzeln, und zwar gehören zu der von  $\pm 1$  verschiedenen Wurzel  $q$  dieselben Elementarteiler wie zur Wurzel  $q^{-1}$ .

Bei ungeradem  $n$  und eigentlicher (uneigentlicher) Transformation ist  $q = +1$  ( $q = -1$ ) eine Wurzel der charakteristischen Function. Bei geradem  $n$  und uneigentlicher Transformation sind  $q = \pm 1$  Wurzeln der charakteristischen Function.

2) Sind zwei Formen  $S$  und  $T$  ähnlich, so werden sie durch ähnliche Substitutionen in sich transformirt.

Da nämlich  $S$  und  $T$  ähnlich sind, so ist<sup>1)</sup>

$$T = WS W^{-1},$$

und zugleich folgt aus der Gleichung 2) durch Multiplication mit  $W$  und  $W^{-1}$

$$WU W^{-1} \cdot WS W^{-1} \cdot WU W^{-1} = WS W^{-1},$$

oder, wenn  $V = WU W^{-1}$  gesetzt wird,

$$VT V = T.$$

3) Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} USU &= S, \\ US^{-1}U &= S^{-1}, \end{aligned}$$

folgt

$$U(S + qS^{-1})U = S + qS^{-1};$$

1) F, S. 10. Gelegentlich sind im folgenden auch Determinanten wie  $|S - qA|$  als charakteristische Functionen bezeichnet.

2) F, S. 21.

d. h.: Jede Substitution, welche eine Form  $S$  von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, transformirt auch die ganze aus reciproken Grundformen gebildete lineare Schaar  $S + \varrho S^{-1}$  in sich.

4) Es ist ferner

$$US^2 = (US)S = SU^{-1}S = S(U^{-1}S) = S^2U;$$

d. h. Jede Form  $U$  die  $S$  in sich transformirt, ist mit  $S^2$  vertauschbar.

Die Aufgabe, alle Formen  $U$ , zu finden, hommt daher auf die Ermittlung der mit  $S^2$  vertauschbaren, also von einer bekannten Zahl von linearen Parametern abhängigen Formen hinaus, welche die Gleichung 2) befriedigen.<sup>1)</sup>

Es ist aber leicht zu zeigen, dass im allgemeinen jede Form  $U$ , welche mit  $S^2$  vertauschbar ist, auch schon mit  $S$  selbst vertauschbar sein muss. Hiernach scheint es angezeigt, die sämtlichen Lösungen  $U$  in zwei Classen zu sondern, je nachdem nämlich  $U$  bereits mit  $S$  vertauschbar ist oder nicht.

Ich bemerke endlich noch, dass durch die Substitution

$$US = V,$$

die Gleichung 2) auf die Gestalt

$$3) \quad V^2 = S^2$$

oder in nicht symbolischer Form, wenn man die Coefficienten der Form  $V$  durch  $v_{ik}$  bezeichnet, auf das System

$$3) \quad \sum_k v_{ik} v_{kl} = \sum_k a_{ik} a_{kl}; \quad i, l = 1, 2 \dots n;$$

gebracht wird, welches sich für die directe algebraische Be-

1) Ueber das Problem der vertauschbaren Formen vergl. man die Bemerkungen von Herrn Frobenius F. S. 28, und die Dissertation des Herrn Maurer, zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

handlung geeigneter erweist, als das System der  $n^2$  Gleichungen 1).

## § 2.

### Die mit $S$ vertauschbaren Substitutionen.

Ich beweise zuerst den folgenden Satz:

Wenn eine beliebige Form  $U$  mit  $S^2$  vertauschbar ist, so ist  $U$  auch mit  $S$  vertauschbar, falls die charakteristischen Functionen von  $S$  und  $-S$  theilerfremd sind.

Führt man nämlich unter der Voraussetzung

$$US^2 = S^2 U,$$

die Bezeichnung ein:

$$US - SU = X,$$

so ist

$$SUS - S^2 U = SX.$$

Da aber

$$SUS - S^2 U = SUS - US^2 = (SU - US)S = -XS,$$

wird, so erhält man

$$SX + XS = 0.$$

Hieraus folgt aber  $X = 0$ . Denn nach Herrn Frobenius gilt der Satz:<sup>1)</sup>

Wenn die Gleichung

$$AX = XB$$

besteht und die charakteristischen Functionen von  $A$  und  $B$  theilerfremd sind, so ist  $X = 0$ .

Im folgenden mag vorausgesetzt werden, dass die Gleichung

$$|S - \varrho E| = 0$$

1) F, S. 28.



keine Wurzeln von entgegengesetzt gleichem Werthe besitzt, so dass also nothwendig  $US = SU$  ist.

Aus der Gleichung 1) § 1 folgt nunmehr

$$(U^2 - E) S = 0.$$

oder  $U^2 = E$ . Und umgekehrt hat auch jede Substitution, welche  $S$  in sich transformirt und der Gleichung  $U^2 = E$  genügt, die Eigenschaft, dass

$$(U^2 - E) S U = U S - S U = 0$$

wird, d. h. sie ist mit  $S$  vertauschbar. Zugleich sieht man, dass jede der Gleichung  $U^2 - E = 0$  genügende Form jede mit  $U$  vertauschbare Form  $S$  in sich selbst transformirt.

Die Aufgabe ist damit reducirt auf die folgende: Alle Formen  $U$  zu finden, die mit  $S$  vertauschbar sind, und zugleich der Relation

$$1) \quad U^2 = E = \sum x_i y_i$$

genügen. Unter diesen befinden sich, so lange nicht die Determinanten

$$|U + E| \text{ und } |U - E|$$

gleichzeitig verschwinden, nur die beiden selbstverständlichen Lösungen  $U = \pm E$ .

Denn aus

$$U^2 - E = (U - E)(U + E) = 0$$

folgt stets, sobald die Determinante des einen Factors nicht verschwindet, das identische Verschwinden des andern.<sup>1)</sup>

Ich löse nun die Gleichungen 3) § 1 zuerst in einigen speciellen Fällen.

1) Alle Wurzeln der charakteristischen Function von  $S$  sind von einander verschieden.

Bezeichnet man dieselben durch  $q_1, q_2 \dots q_i \dots q_n$ , so ge-

1) F, S. 5.

hört zu jeder Wurzel  $q_l$  ein und nur ein System von Werthen

$$\xi_1^l, \xi_2^l, \dots, \xi_n^l,$$

welches die Gleichungen.

$$2) \sum_j a_{kj} = q_l \xi_k^l, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

befriedigt. Multiplicirt man mit  $a_{ik}$  und summirt nach  $k$ , so folgt

$$3) \sum_j a_{kj} a_{ik} = q_l^2 \xi_i^l,$$

oder

$$4) \sum_j v_{ik} v_{kj} = q_l^2 \xi_i^l.$$

Multiplicirt man 4) mit  $v_{hi}$ , summirt nach  $i$ , so folgt, wenn

$$5) \sum_j v_{kj} = \eta_k^l,$$

gesetzt wird,

$$\sum_j v_{ij} v_{kj} = q_l^2 \eta_i^l \text{ oder}$$

$$6) \sum_j a_{ik} a_{kj} = q_l^2 \eta_i^l;$$

also wenn man die Gleichungen 3) und 6) mit einander vergleicht,

$$\eta_i^l = \lambda_i \xi_i^l,$$

wo der Factor  $\lambda_i$  noch zu bestimmen ist. Ferner hat man aus 5) und 4)

$$7) \sum_j v_{kj} v_{ik} = \lambda_i^2 \xi_i^l = q_l^2 \xi_i^l,$$

also

$$\lambda_i^2 = q_l^2, \quad \lambda_i = \pm q_l.$$

Aus den Gleichungen 5)

$$8) \sum_j v_{kj} = \lambda_i \xi_k^l,$$

ergeben sich nun, da die Determinante der  $\xi_j^l$  bekanntlich nicht verschwindet, die Werthe der Substitutionscoefficienten  $v_{ik}$ . Zugleich folgt aus

$$\sum_i v_{hi} a_{ik} = \lambda_i q_l \xi_i^l,$$

$$\sum_i a_{hi} v_{ik} = \lambda_i q_l \xi_i^l,$$

dass

$$\sum \xi_i^{(1)} (v_{hi} a_{lh} - a_{hi} v_{lh}) = 0,$$

oder

$$\sum_h (a_{lh} v_{hi} - v_{lh} a_{hi}) = 0$$

ist; d. h. die Formen  $V$  und  $S$  sind vertauschbar.

Da ferner aus 3) und 7) folgt

$$\sum \xi_i^{(2)} (v_{ik} v_{kj} - a_{ik} a_{kj}) = 0,$$

so ist auch das System der Gleichungen 3) § 1 erfüllt.

Multiplicirt man die Determinante der  $v_{ik}$  mit der Determinante der  $\xi_i^{(1)}$ , so ergibt sich zufolge der Gleichungen 8)

$$|v_{ik}| |\xi_m^{(1)}| = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) |\xi_m^{(1)}|$$

oder

$$|V| = \pm e_1 e_2 \dots e_n.$$

Da endlich  $e_1 e_2 \dots e_n = S$  ist, so wird in der That

$$|V| = \pm |S|$$

und man sieht, dass es sowohl eigentliche als uneigentliche Transformationen giebt, je nachdem nämlich eine gerade oder ungerade Anzahl von Werthen  $\lambda_i$  gleich  $-e_i$  gewählt wird. Die Gesamtzahl aller Transformationen ist offenbar gleich<sup>1)</sup>  $2^n$ .

2) Die ersten Unterdeterminanten der Determinante  $(S - Ee)$  verschwinden nicht sämmtlich für irgend eine ihrer Wurzeln, oder zu jeder Wurzel der charakteristischen Function gehört nur ein einziger Elementartheiler.

Setzt man in diesem Falle

$$|Ee - S| = a_0 + a_1 e + \dots + e^n = F(e),$$

so ist bekanntlich

---

1) Ebenso einfach lässt sich in den folgenden Fällen die Mannigfaltigkeit der Transformationen angeben. Es ist daher im Text diese Frage nicht weiter verfolgt worden.

$$\alpha_0 S^0 + \alpha_1 S^1 + \alpha_2 S^2 + \dots + S^n = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, <sup>1)</sup> die zwischen den Potenzen der Form  $S$  besteht, und die linearen Functionen der  $n$  von einander linear unabhängigen Formen

$$S^0, S^1, S^2, \dots S^{n-1},$$

sind die einzigen, die mit  $S$  vertauschbar sind. <sup>2)</sup> Es kann also auch  $U$  nur von der Form

$$U = \alpha_0 S^0 + \alpha_1 S^1 + \dots \alpha_{n-1} S^{n-1}$$

sein und muss zufolge der Gleichung 1) der Bedingung

$$(\alpha_0 S^0 + \alpha_1 S^1 + \dots \alpha_{n-1} S^{n-1})^2 = 1$$

genügen. Setzt man nun

$$\alpha_0 + \alpha_1 \varrho + \dots \alpha_{n-1} \varrho^{n-1} = \varphi(\varrho),$$

so muss, wie man leicht bemerkt <sup>3)</sup>, die Function  $\varphi$  der Gleichung

$$(\varphi + 1)(\varphi - 1) = F.M,$$

genügen, wo  $M$  ein beliebiger Factor vom Grade  $n - 2$  in  $\varrho$  ist. Da die beiden Factoren  $\varphi + 1$ ,  $\varphi - 1$  keine Wurzel gemeinsam haben können, so zerlege man  $F(\varrho)$  auf irgend eine Art in zwei zu einander prime Factoren  $P$  und  $Q$ , deren Grade  $k$  und  $l$  sind ( $k + l = n$ ). Dann ist

$$\varphi + 1 = P m_1,$$

$$\varphi - 1 = Q m_2,$$

oder

$$2 = P m_1 - Q m_2.$$

Umgekehrt kann man aber bei gegebenem  $P$  und  $Q$  immer zwei Polynome  $m_1$  und  $m_2$  vom Grade  $l - 1$  und  $k - 1$  finden, welche dieser letzten Gleichung genügen, sobald nur  $P$  und  $Q$  prim zu einander sind. Der Gleichung

1) F, S. 12.

2) F, S. 28.

3) Vgl. F. a. a. O.

$$P m_1 - 1 = Q m_2 + 1 = q$$

zufolge ergibt sich aus jeder solchen Zerlegung eine Bestimmung der Form  $U$ .

Hat insbesondere  $|S - E q|$  nur den Elementartheiler  $(q - q_1)^n$ , oder ist  $S$  irreducibel in Bezug auf contragrediente Transformationen, so existirt ausser den evidenten Lösungen  $U = \pm E$  keine andere.

3) Die charakteristische Function von  $S$  hat nur einfache Elementartheiler.

Da

$$S^2 - q^2 E = (S - q E) (S + q E)$$

so folgt leicht: Die Elementartheiler von  $S^2 - s E$  haben dieselben Exponenten wie die Elementartheiler von  $S - q E$ . Uebrigens kann man, um diesen Satz, der überhaupt nur das Nichtvorhandensein entgegengesetzt gleicher Wurzeln voraussetzt, direct zu beweisen, die Determinante von  $S - q_1 E$  gerändert mit beliebigen  $k$  Grössenreihen, mit der nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante von  $S + q_1 E$  multipliciren. In der That, multiplicirt man die geränderte Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - q_1 a_{12} \dots a_{1n} & u_1^1 \dots u_1^k \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} - q_1 u_n^1 \dots u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 \dots v_n^1 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ v_1^k & v_2^k \dots v_n^k & 0 \dots 0 \end{vmatrix}$$

horizontal mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} + q_1 a_{21} \dots a_{n1} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ a_{1n} a_{2n} \dots a_{nn} + q_1 \end{vmatrix}$$

so ergibt sich die wieder mit völlig willkürlichen Grössen-

reihen geränderte Determinante von  $S^2 - q_i^2 E$  woraus unmittelbar die Gleichheit der genannten Exponenten folgt.

Ist nun  $q_i$  eine  $l_i$ -fache Wurzel der charakteristischen Function vom  $S$ , so hat das Gleichungssystem

$$9) \quad \sum \xi_m a_{im} = q_i \xi_i,$$

$l_i$  von einander linear unabhängige Lösungen

$$\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^{l_i};$$

und dieselben bilden zugleich das vollständige System der Lösungen des Systemes

$$10) \quad \sum x_m a_{im} a_{ki} = q_i^2 x_k.$$

Setzt man nun, wie im Falle 1)

$$\sum x_m v_{im} = \eta_i,$$

so ergibt sich in analoger Weise

$$11) \quad \sum \eta_m a_{im} a_{ik} = q_i^2 \eta_k,$$

oder

$$12) \quad \eta_k = \sum \xi_k^{l_i} \beta_{lr},$$

wo die Coefficienten  $\beta$  noch zu bestimmen bleiben. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum \xi_m^{l_1} v_{im} &= \sum \xi_i^{l_i} \beta_{lr1}, \\ \sum \xi_m^{l_2} v_{im} &= \sum \xi_i^{l_i} \beta_{lr2}, \\ &\vdots \\ \sum \xi_m^{l_r} v_{im} &= \sum \xi_i^{l_i} \beta_{lrlr}; \end{aligned}$$

und also auch die folgenden

$$\begin{aligned} \sum \xi_m^{l_r} a_{im} a_{hi} &= q_i^2 \xi_k^{l_r}, \\ \sum \xi_m^{l_r} v_{im} v_{ki} &= \sum \xi_k^{l_m} \beta_{lmks} \beta_{lsir}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 3) § 1 lassen sich daher wegen der Unabhängigkeit der  $\xi_i^{l_r}$  nur dadurch befriedigen, dass, wenn

$$\beta_{lrls} = \eta_{lr}^l q_l,$$

gesetzt wird, die Coefficienten  $u_{sr}^i$  die Relationen

$$\sum u_{ms}^i u_{sr}^i = (mr)^1)$$

befriedigen müssen, oder wenn man die zu den  $u_{rs}^i$  gehörige bilineare Form mit  $W_i$  bezeichnet, die Gleichung

$$W_i^2 = E_i^2)$$

stattfindet, womit die sämtlichen Lösungen bestimmt sind.

4) Der allgemeine Fall, in welchem die Elementartheiler der charakteristischen Function von  $S$  ganz beliebig vertheilt sind, erledigt sich endlich auf folgendem Wege.

Die sämtlichen Lösungen  $U$  der Gleichung 1)

$$U^2 = E,$$

sind so beschaffen, dass die charakteristische Function von  $U$  nur einfache Elementartheiler von der Form  $q \pm 1$  besitzt<sup>3)</sup>. Zerlegt man daher die Form

$$E = \sum x_i y_i,$$

in irgend einer Weise in zwei Formen

$$E_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k,$$

$$E_2 = x_{k+1} y_{k+1} + \dots + x_n y_n,$$

so ist

$$U = E_1 - E_2$$

eine Form, zu der die  $k$  einfachen Elementartheiler  $q - 1$  und die  $n - k$  einfachen Elementartheiler  $q + 1$  gehören. Jede andere Form  $V$ , welche der Gleichung 1) genügt, ist aber einer von diesen ähnlich, so dass also

$$U = E_1 - E_2,$$

$$V = P U P^{-1},$$

1) Das Symbol  $(ik)$  bedeutet wie gewöhnlich die Einheit für  $i=k$ , und Null für  $i < k$ .

2) Die Lösung dieser Gleichung ist in No. 4 gegeben.

3) F. S. 15.

zu setzen ist, wobei die Determinante von  $P$  nicht verschwindet. Da  $V^2 = E$  ist, so bleibt nur noch die Gleichung

$$VS = SV$$

oder 
$$PU P^{-1} S = S P U P^{-1},$$

zu erfüllen. Schreibt man dieselbe in der Form

$$P^{-1} S^{-1} P U = U P^{-1} S^{-1} P,$$

so muss demnach die Form

$$P^{-1} S^{-1} P = X$$

mit  $U = E_1 - E_2$  vertauschbar sein. Aber alle Formen, welche der Gleichung

$$13) \quad X(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2) X,$$

genügen, sind durch die Gleichung

$$X = A_1 + A_2$$

gegeben, in welcher  $A_1$  und  $A_2$  zwei beliebige Formen von den Veränderlichen  $x_1 y_1, \dots, x_k y_k; x_{k+1} y_{k+1}, \dots, x_n y_n$  sind. Aus 13) folgt nämlich

$$E_1 X E_1 - E_1 X E_2 = E_1 X = E_1 X E_1 + E_1 X E_2;$$

$$E_1 X E_1 + E_2 X E_1 = X E_1 = E_1 X E_1 - E_2 X E_1;$$

oder 
$$E_2 X E_1 = 0,$$

$$E_1 X E_2 = 0.$$

Demnach wird

$$X = (E_1 + E_2) X (E_1 + E_2) = E_1 X E_1 + E_2 X E_2,$$

also gleich der Summe zweier ebenso wie  $E$  in  $E_1 + E_2$  zerlegbarer Formen  $X_1 + X_2$ . Ist umgekehrt  $X$  ebenso wie  $E$  in die Summe  $A_1 + A_2$  zerlegbar, so wird auch selbstverständlich die Gleichung 13) erfüllt sein. Daraus folgt also, dass die Gleichung

$$P^{-1} S^{-1} P = A_1 + A_2$$



stattfinden, oder die Form  $S$  der zerlegbaren Form

$$A_1^{-1} + A_2^{-1} = B_1 + B_2$$

ähnlich sein muss, wobei die Determinanten von  $B_1$  und  $B_2$  nicht verschwinden dürfen. Nun bezeichne man die Elementartheiler der charakteristischen Function von  $S$  in irgend einer Reihenfolge durch

$$(q - a)^\alpha, (q - b)^\beta \dots$$

wobei die  $a, b, \dots$  nicht verschieden zu sein brauchen, dann ist bekanntlich  $S$  der Form

$$\begin{aligned} \Sigma = & a (x_1 y_1 + \dots x_a y_a) + x_1 y_2 + \dots x_{a-1} y_a \\ & + b (x_{a+1} y_{a+1} + \dots x_{a+\beta} y_{a+\beta}) + x_{a+1} y_{a+2} + \dots \\ & + x_{a+\beta-1} y_{a+\beta} + \dots \end{aligned}$$

ähnlich. Zerlegt man also  $\Sigma$  in irgend zwei Gruppen  $B_1 + B_2$  die kein Variabelnpaar gemeinsam haben und bezeichnet mit  $E_1$  und  $E_2$  die entsprechenden Formen  $E$ , so ist

$$14) \quad P^{-1} S P = B_1 + B_2$$

also auch umgekehrt

$$V = P(E_1 - E_2) P^{-1}.$$

In der That wird dann

$$\begin{aligned} V S V &= P(E_1 - E_2) P^{-1} S P(E_1 - E_2) P^{-1}, \\ &= P(E_1 - E_2)(B_1 + B_2)(E_1 - E_2) P^{-1}, \\ &= P(B_1 + B_2) P^{-1} = S. \end{aligned}$$

Dabei hat man unter  $P$  die vollständige Lösung der Gleichung 14) zu verstehen. Nun findet man bekanntlich durch das Weierstrass'sche Verfahren eine bestimmte Form  $p$ , welche der Gleichung

$$p^{-1} S p = \Sigma$$

genügt. Ist nun auch die Gleichung 14) erfüllt, so folgt

$$p^{-1} S p = P^{-1} S P$$

oder

$$P p^{-1} S = S P p^{-1},$$

d. h. es ist  $P p^{-1}$  mit  $S$  vertauschbar. Bezeichnet man daher die Gesamtheit der mit  $S$  vertauschbaren Formen durch  $M$ , zu deren Bestimmung es nur der Lösung linearer Gleichungen bedarf, so ist

$$P = M p$$

also schliesslich

$$V = M p (E_1 - E_2) p^{-1} M^{-1}.$$

Die Lösungen zerfallen demnach in Gruppen, insofern jede in derselben Weise aus den Hauptlösungen

$$p (E_1 - E_2) p^{-1}$$

hergeleitet wird. In Bezug hierauf möge noch folgendes angeführt werden:

Sind  $V$  und  $W$  zwei Substitutionen, welche mit  $S$  vertauschbar sind und  $S$  in sich transformiren, und haben die charakteristischen Functionen von  $V S$  und  $W S$  dieselben Elementartheiler, so haben auch die von  $V$  und  $W$  dieselben Elementartheiler und es ist

$$W = Z^{-1} V Z$$

wo  $Z$  eine mit  $S$  vertauschbare Form ist. Aus der Voraussetzung folgt nämlich

$$W S = Z^{-1} V S Z$$

oder, wenn man beiderseits zum Quadrat erhebt und associativ multiplicirt,

$$S^2 = Z^{-1} S^2 Z.$$

Hieraus folgt aber

$$Z S = S Z,$$

und nunmehr auch

$$(W - Z^{-1} V Z) S = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist. Lässt man die diesem § zu Grunde liegende Voraussetzung über  $S$  fallen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Formen  $VS$  und  $WS$  nur, dass

$$WS = Z^{-1} VS Z,$$

wo  $Z$  eine beliebige mit  $S^2$  vertauschbare Form von nicht verschwindender Determinante ist. Vgl. § 3.

### § 3.

**Substitutionen, die nicht mit  $S$  vertauschbar sind.**

Die vorstehenden Betrachtungen enthalten überhaupt die vollständige Bestimmung aller derjenigen Substitutionen  $U$ , deren Vertauschbarkeit mit  $S$  vorausgesetzt wird. Wenn aber die charakteristischen Functionen von  $S$  und  $-S$  gemeinsame Theiler haben, so gibt es ausser diesen Substitutionen noch andere, welche mit  $S^2$ , nicht aber mit  $S$  vertauschbar sind.

Setzt man

$$1) \quad US - SU = X,$$

so folgt wie früher die Gleichung

$$2) \quad SX + XS = 0.$$

Jede Form  $U$ , welche der Gleichung 1) genügt, während  $X$  eine nicht verschwindende Lösung von 2) ist, ist mit  $S^2$ , nicht aber mit  $S$  vertauschbar.

Denn es ist

$$S^2 U = S(US - X) = (SU + X)S,$$

oder, da nach 1)  $SU + X = US$ ,

$$S^2 U = US^2.$$

Es bleiben demnach die in  $U$  enthaltenen linearen Parameter so zu bestimmen, dass die Gleichung  $USU = S$  erfüllt wird. Aber diese Aufgabe lässt sich, wie ich jetzt

zeigen will, auf den Fall reduciren, wo die charakteristische Function von  $S$  nur zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln enthält.

Nach 2) § 1 genügt es, das Transformationsproblem für eine mit  $S$  ähnliche Form  $\sigma$  zu lösen. Ist nun

$$S = v \sigma v^{-1},$$

$$u = v U v^{-1},$$

so hat man

$$3) \quad u \sigma u = \sigma,$$

und für

$$v X v^{-1} = x,$$

$$4) \quad u \sigma - \sigma u = x,$$

$$5) \quad \sigma x + x \sigma = 0.$$

Es sei nun  $\sigma$  zerlegbar in  $\sigma_1 + \sigma_2$ , welchen Formen die Formen  $E_1$  und  $E_2$  correspondiren mögen.

Setzt man jetzt

$$E_1 x E_2 = \eta_1, \quad E_2 x E_1 = \eta_2;$$

$$E_1 x E_1 = x_1, \quad E_2 x E_2 = x_2;$$

so folgt aus 5) durch Multiplication mit  $E_1$  und  $E_2$

$$x_1 \sigma_1 + \sigma_1 x_1 = 0,$$

$$x_2 \sigma_2 + \sigma_2 x_2 = 0,$$

$$\eta_2 \sigma_1 + \sigma_2 \eta_2 = 0,$$

$$\eta_1 \sigma_1 + \sigma_2 \eta_1 = 0.$$

Sind nun die charakteristischen Functionen von  $\sigma_1$  und  $-\sigma_2$  theilerfremd, so ist  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ . Wird ferner vorausgesetzt, dass gleiches für die charakteristischen Functionen von  $\sigma_2$  und  $-\sigma_1$  gilt, so ist auch  $x_2 = 0$ . Dies kommt darauf hinaus, dass  $\sigma_1$  derjenige Theil von  $\sigma$  ist, der zu den Elementartheilern gehört, die aus entgegengesetzt gleichen Wurzeln herrühren.

Demnach tritt an Stelle der Gleichung 4) die folgende  $u(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)u = x = (E_1 + E_2)x(E_1 + E_2)$ ;

oder

$$6) \quad u(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)u = x_1.$$

Setzt man nun weiter

$$E_1 u E_1 = u_1, \quad E_2 u E_2 = u_2,$$

$$E_1 u E_2 = v_1, \quad E_2 u E_1 = v_2,$$

so erhält man auf analogem Wege aus 6)

$$7) \quad u_1 \sigma_1 - \sigma_1 u_1 = \xi_1,$$

$$u_2 \sigma_2 - \sigma_2 u_2 = 0,$$

$$v_1 \sigma_2 - \sigma_1 v_1 = 0,$$

$$v_2 \sigma_1 - \sigma_2 v_2 = 0.$$

Haben demnach die charakteristischen Functionen von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auch keine gemeinsamen Theiler, was mit der oben angegebenen Festsetzung verträglich ist, so folgt weiter

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0.$$

also auch

$$u = u_1 + u_2,$$

wenn nach 7)  $u_2$  eine mit  $\sigma_2$  vertauschbare Form ist. Endlich folgt aber aus der Transformationsgleichung

$$(u_1 + u_2)(\sigma_1 + \sigma_2)(u_1 + u_2) = \sigma_1 + \sigma_2$$

da die Formen mit verschiedenem Index kein Variabelnpaar gemeinsam haben,

$$u_1 \sigma_1 u_1 = \sigma_1; \quad u_2 \sigma_2 u_2 = \sigma_2,$$

so dass nach § 2 alle Formen  $u_2$  unmittelbar gefunden werden können. Man kann daher von vornherein voraussetzen, dass die Function  $|S - qE|$  nur Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln enthält, denen jedoch für sich beliebige Elementartheiler zugehören können.

Aber auch diese Formen  $\sigma_1$  lassen sich noch weiter reduciren. Zerlegt man nämlich wieder  $\sigma_1$  in zwei Theile  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  von der Beschaffenheit, dass die charakteristischen

Functionen weder gemeinsame Theiler noch solche Wurzelfactoren enthalten, die zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören, so erkennt man auf demselben Wege, dass dem entsprechend  $u_1$  in zwei Formen  $u_{11} + u_{22}$ , und ebenso  $\xi_1$  in  $\xi_{11} + \xi_{22}$  zerlegbar sein muss, welche den Bedingungen genügen müssen

$$\begin{aligned} u_{11} \Sigma_1 u_{11} &= \Sigma_1, \\ u_{22} \Sigma_2 u_{22} &= \Sigma_2, \\ u_{11} \Sigma_1 - \Sigma_1 u_{11} &= \xi_{11}, \\ u_{22} \Sigma_2 - \Sigma_2 u_{22} &= \xi_{22}. \end{aligned}$$

Die Transformation reducirt sich demnach schliesslich auf die einer Anzahl von Formen  $s$ , deren charakteristische Functionen je nur ein einziges Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln enthalten. Zur Lösung dieses letzten Problems kann man sich der am Eingange dieses § gemachten Bemerkungen bedienen.

In dem Falle, wo  $S$  nur einfache Elementartheiler hat, die jedoch zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören können, können die sämtlichen Substitutionen  $U$  auch gleich direct gefunden werden. Selbstverständlich wird dann auch die charakteristische Function von  $S^2$  nur einfache El.-Theiler enthalten.

Gehören nun zu der Wurzel  $q_i$  die Werthsysteme

$$\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^r; \quad i = 1, 2 \dots n;$$

als Lösungen der Gleichungen

$$\Sigma \xi_m a_{im} = q_i \xi_i; \quad i = 1, 2 \dots n;$$

und zu  $q_\lambda = -q_i$  die Werthsysteme

$$\eta_i^{\lambda 1}, \eta_i^{\lambda 2}, \dots, \eta_i^{\lambda k}; \quad i = 1, 2 \dots n;$$

und versteht man unter

$$x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m; \quad i = 1, 2 \dots n;$$

(wo  $m = r + k$ ) die sämtlichen Werthe  $\xi$  und  $\eta$ ; setzt man ferner, um die Gleichung

$$V^2 = S^2,$$

zu lösen,

$$8) \quad \sum x_i^h v_{it} = y_i^h,$$

so ergibt sich wie in No. 3. § 2

$$y_i^h = \sum x_i^p u_{ph}.$$

Demnach ist

$$\sum x_i^h v_{it} = \sum x_i^p u_{ph}, \text{ und}$$

$$9) \quad \sum x_i^h v_{it} v_{ki} = \sum x_k^p u_{kp} u_{ph}.$$

Da aber auch

$$10) \quad \sum x_i^h a_{it} u_{hi} = e_i^2 x_k^h,$$

ist, so sind wieder nur die Gleichungen

$$\sum u_{sp}^1 u_{ph}^1 = (sh),$$

zu erfüllen, wenn

$$u_{sp}^1 = \pm e_i u_{sp}$$

gesetzt wird. Die Bestimmung der  $v_{ik}$  erfolgt dann, da die  $x_i^h$  linear von einander unabhängig sind, aus den Gleichungen 8), und aus der Vergleichung von 9) und 10) erkennt man, dass auch die Transformationsbedingungen erfüllt sind.

#### § 4.

Die Gleichung  $SX + XS = o$ .

Diese in den Coefficienten der  $X$  lineare Gleichung steht mit dem Problem der conjugirten Substitutionen in einem weiter gehenden Zusammenhange, der namentlich im § 6 hervortreten wird. Die Determinante des linearen Systems von  $n^2$  Unbekannten  $x_{ik}$  der Form  $X$

$$1) \quad SX + XS = o$$

ist, wie man leicht sieht, eine symmetrische Determinante in den Coefficienten von  $S$ , welche verschwinden muss, wenn eine von Null verschiedene Lösung für  $X$  vorhanden sein soll.

Es sei hier ausgeführt,<sup>1)</sup> dass die analoge Gleichung

$$2) \quad SX - XS = 0,$$

auf die das Problem der mit  $S$  vertauschbaren Formen hinauskommt, eine schiefe Determinante vom Grade  $n^2$  liefert; ein Umstand, der in den bisherigen Untersuchungen über dieses Gleichungssystem nicht bemerkt worden zu sein scheint. Bei geradem (ungeradem)  $n$  verschwindet sie daher immer mit einer ungeraden (geraden) Anzahl von Unterdeterminantensystemen. Es geht hieraus unmittelbar der Satz hervor:

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen  $X$ , welche mit einer Form  $S$  vertauschbar sind, ist stets von der Form

$$n + 2k,$$

was übrigens durch die von Herrn Frobenius angegebene Formel für diese Zahl bestätigt wird.<sup>2)</sup>

Das Verhalten jener beiden Determinanten von  $n^2$  Reihen wird man indess wohl kaum discutiren können, ohne auf die Untersuchung der charakteristischen Function von  $S$  einzugehen. Beide Gleichungen 1) und 2) gestatten aber sofort auf dem im vorigen § angedeuteten Wege eine Reduction

1) Ich erwähne den allgemeinen Satz: Die Determinante der Coefficienten des Systems der  $n^2$  linearen Gleichungen

$$SX + \varrho XS = 0$$

ist die Determinante einer linearen Schaar  $W + \varrho W^1$  aus conjugirten Grundformen mit  $n^2$  Variablen, aus denen die beiden Bemerkungen des Textes hervorgehen.

2) F. S. 29.



auf ganz einfache Fälle, in denen die Lösungen direct hingeschrieben werden können.

Ohne auf diese Reduction hier einzutreten, behandle ich den etwas allgemeineren Fall der Gleichung

$$3) \quad A X = X B$$

in den 1) übergeht, wenn  $A = -B = S$  gesetzt wird. Da zufolge der Gleichung

$$|A| |X| = |X| |B|$$

die Determinante von  $X$  verschwinden muss, falls nicht gleichzeitig entweder die Determinanten von  $A$  und  $B$  verschwinden, oder einander gleich sind, welcher Fall hier übrigens nicht ausgeschlossen sein soll, möge angenommen werden, dass für die Form  $X$  noch alle Unterdeterminanten vom  $m + 1$ . Grade Null sind, die vom  $m$ . Grade aber nicht sämmtlich verschwinden. Setzt man nun

$$E = E_1 + E_2,$$

$$\text{wo } E_1 = x_1 y_1 + \dots x_m y_m,$$

$$E_2 = x_{m+1} y_{m+1} + \dots x_n y_n,$$

so gibt es zwei Formen  $U$  und  $V$  von nicht verschwindender Determinante, vermöge welcher

$$U X V = E_1$$

ist. Demgemäss ist

$$U A U^{-1} E_1 = E_1 V^{-1} B V.$$

Setzt man nun

$$U A U^{-1} = A_0, \quad V^{-1} B V = B_0,$$

so ist

$$A_0 E_1 = E_1 B_0.$$

Hieraus geht hervor, dass die Form

$$M = E_1 A_0 E_1 = E_1 B_0 E_1$$

nur die Variabelnpaare von  $E_1$  enthält. Ferner ist

$$E_2 A_0 E_1 = 0, \quad E_1 B_0 E_2 = 0.$$

Setzt man endlich

$$\begin{aligned} E_1 A_0 E_2 &= M_1, \quad E_2 A_0 E_2 = N, \\ E_2 B_0 E_1 &= M_2, \quad E_2 B_0 E_2 = P, \end{aligned}$$

wo die Formen  $N$  und  $P$  nur von den in  $E_2$  vorkommenden Variablen abhängen, so wird

$$\begin{aligned} U(A - qE)U^{-1} &= M - qE_1 + N - qE_2 + M_1, \\ V^{-1}(B - qE)V &= M - qE_1 + P - qE_2 + M_2. \end{aligned}$$

Zum Bestehen der Gleichung 3) ist demnach nothwendig, wie schon Herr Frobenius angegeben hat (F. S. 28.), dass die charakteristischen Functionen von  $A$  und  $B$  mindestens einen gemeinsamen Theiler  $m$ -Grades haben.

Dies ist aber auch hinreichend, denn die Determinante der Gleichungen 3) ist die Resultante der charakteristischen Functionen von  $A$  und  $B$ .

Nicht hinreichend ist dagegen die Existenz eines gemeinsamen Theilers vom  $m$ -Grade, wenn die Unterdeterminanten  $m$ -Grades von  $X$  nicht mehr sämmtlich verschwinden sollen. Denn wenn z. B.  $|M - qE_1|$  für eine Wurzel  $q = q_1$  in allen  $k$ -Unterdeterminanten den Factor  $(q - q_1) l_k$  enthält, muss auch bei den charakteristischen Functionen von  $A$  und  $B$  derselbe Factor mindestens in der Potenz  $l_k$  in allen  $k$ -Unterdeterminanten auftreten. Und wenn diese Wurzel  $q_1$  nicht in den Determinanten  $|N - qE_2|$  und  $|P - qE_2|$  enthalten ist, müssen sogar alle Elementartheiler, die zu  $q = q_1$  gehören, jenen Functionen von  $A$  und  $B$  gemeinsam sein, denn alsdann enthalten, wie leicht zu sehen, die  $k$ -Unterdeterminanten auch nur die  $l_k$ -Potenz von  $q - q_1$  und keine höhere.

Haben andererseits die charakteristischen Functionen von  $A$  und  $B$  überhaupt Elementartheiler mit der Exponenten-

summe  $m$  gemeinsam, so gibt es auch solche  $X$ , deren Unterdeterminanten  $m$ -Grades nicht sämmtlich verschwinden, während die vom  $m + 1$ . noch alle Null sind.

Man kann nämlich zunächst  $B$  durch eine contragrediente Substitution  $V$  in seine Normalform  $B_1$  überführen. An Stelle der Gleichung 3) tritt dann, wenn

$$VBV^{-1} = B_1, \quad VA V^{-1} = A_1, \\ VX V^{-1} = X_1$$

gesetzt wird

$$A_1 X_1 = X_1 B_1.$$

Sondert man nun aus der charakteristischen Function von  $B_1$  Elementartheiler mit der Exponentensumme  $m$  aus, welche gleichzeitig in der von  $A$ , also auch in der von  $A_1$  vorkommen, so sei

$$B_1 = M + P, \\ WA_1 W^{-1} = M + Q,$$

wo  $M$  eine Form der  $m$ -Variabelnpaare  $x_1 y_1 \dots x_m y_m$  ist. Bezeichnet man dann irgend eine mit  $M$  vertauschbare, nur von denselben Variabeln abhängige Form durch  $H$ , so ist

$$B_1 H = H M = H W A_1 W^{-1},$$

oder

$$V^{-1} B_1 V V^{-1} H W V = V^{-1} H W V V^{-1} A_1 V,$$

also

$$B V^{-1} H W V = V^{-1} H W V A,$$

mithin

$$X = V^{-1} H W V;$$

und dieser Ausdruck stellt wirklich Formen vor, welche der Gleichung 3) genügen und deren Unterdeterminanten  $m$ -Grades nicht sämmtlich Null sind, während die vom  $m + 1$ . noch alle verschwinden, falls die Determinante von  $H$  nicht verschwindet, was sich immer erreichen lässt.

Nur in dem Falle, wo die beiden Formen  $A$  und  $B$  ähnlich sind, gibt es Lösungen  $X$ , deren Determinante nicht verschwindet.

Insbesondere ist also zum Bestehen der Gleichung 1)

nothwendig und hinreichend, dass die charakteristischen Functionen

$$|S - \varrho E|, |S + \varrho E|$$

einen gemeinsamen Theiler besitzen, und die Anzahl der unabhängigen Lösungen von nicht verschwindender Determinante ist in dem Falle, wo beiden sämtliche Elementartheiler gemeinsam sind, gleich der Anzahl der mit  $S$  vertauschbaren Formen.

Zufolge der Gleichung

$$S(X + \varrho E) + (X - \varrho E)S = 0$$

hat jede Lösung  $X$  die Eigenschaft, dass die charakteristischen Functionen

$$|X + \varrho E|, |X - \varrho E|$$

die nämlichen Elementartheiler besitzen.

## § 5.

### Ueber alternirende und symmetrische Formen.

Zum Bestehen der Gleichung 1) § 4 hat sich im vorigen insbesondere als hinreichend erwiesen, dass — in etwas anderer Ausdrucksweise —  $S$  einer Form  $s_1 + s_2$  ähnlich ist, in welcher die Functionen  $|s_1 - \varrho E_1|$ ,  $|s_1 + \varrho E_1|$  dieselben Elementartheiler besitzen, und natürlich  $|s_1|$  nicht verschwindet. Es ist leicht zu zeigen, dass eine solche Form  $s_1$  einer alternirenden Form ähnlich ist.

Ist nämlich  $A = \sum a_{ik} x_i y_k$  eine alternirende Form, und bezeichnet man nach Herrn Frobenius<sup>1)</sup> die conjugirte Form von  $A$ , nämlich  $\sum a_{ki} x_i y_k$  durch  $A^1$ , so ist wegen

$$A^1 = -A.$$

Da nun die charakteristischen Functionen conjugirter Formen<sup>2)</sup> dieselben Elementartheiler haben, so haben auch

1) F. S. 4.

2) F. S. 21.

die beiden Functionen

$$|A - rE| \text{ und } |A + rE|$$

dieselben Elementartheiler. Verschwindet die Determinante von  $A$ , so sind überdies die Elementartheiler von der Form  $r^{2k}$  stets paarweise vorhanden.<sup>1)</sup> Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

Haben die beiden Functionen  $|S + rE|$  und  $|S - rE|$  die nämlichen Elementartheiler und sind überdies die Elementartheiler von der Form  $r^{2k}$  paarweise vorhanden (falls die Determinante von  $S$  verschwindet), so ist  $S$  einer alternirenden Form ähnlich.

Den Beweis desselben kann man auf folgendem Wege führen.

Ist eine Form  $S$  einer alternirenden  $A$  ähnlich, so gibt es eine Form  $V$  von nicht verschwindender Determinante, so dass

$$V S V^{-1} = A$$

wird. Geht man auf beiden Seiten zu den conjugirten Formen über, so ist auch<sup>2)</sup>

$$(V^1)^{-1} S^1 V^1 = -A,$$

oder

$$V S V^{-1} + (V^1)^{-1} S^1 V^1 = 0;$$

also auch

$$V^1 V S V^{-1} (V^1)^{-1} = -S^1.$$

Setzt man nun  $V^1 V = W$ , so ist  $W = W^1$ , also  $W^3$ ) eine symmetrische Form, mithin

$$W S W^{-1} = -S^1,$$

$$\text{oder } W S = -S^1 W^1 = -(W S)^1,$$

also die Form  $W S$  selbst eine alternirende Form. Man hat zunächst:

1) Kronecker, Berl. Monatsb. 1874, S. 442.

2) F. S. 4, Satz IV.

3) Ebenda.

Ist  $S$  einer alternirenden Form ähnlich, so ist

$$S = W^{-1} A,$$

wo  $W$  eine symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante,  $A$  eine alternirende Form ist.<sup>1)</sup>

Ist umgekehrt

$$WS = A$$

und  $W$  eine symmetrische Form,  $A$  eine alternirende Form, so ist  $S$  einer alternirenden Form ähnlich, sobald die Determinante von  $W$  nicht verschwindet.

Denn man kann durch eine congruente Transformation  $Z$  von nicht verschwindender Determinante bewirken, dass

$$Z^1 W Z = E_q$$

wo  $E_q$  nur die Variabeln  $x_1 y_1, x_2 y_2 \dots x_q y_q$ , enthält.

Setzt man nun

$$(Z^1)^{-1} E_q Z^{-1} S = A,$$

$$S^1 (Z^1)^{-1} E_q Z^{-1} = -A,$$

so wird

$$E_q Z^{-1} S Z = -Z^1 S^1 (Z^1)^{-1} E_q.$$

Setzt man also

$$M = E_q Z^{-1} S Z,$$

so ist

$$M = -M^1,$$

also  $M$  eine alternirende Form, woraus der zu beweisende Satz folgt, sobald die Determinante von  $W$  nicht Null ist, da in diesem Falle  $E_q = E$  wird.

Es sei nun umgekehrt  $S$  so beschaffen, dass die charakteristische Function von  $S$  nur paarweise Elementartheiler hat, die zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören und

1) Aus  $S = W^{-1} A$  folgt  $S = W^{-1} A W^{-1} W = B W$ , wo auch  $B$  eine alternirende Form,  $W$  symmetrisch ist.

dass die Elementartheiler von der Form  $\varrho^{2k}$  ebenfalls paarweise vorhanden sind. Setzt man

$$\varrho = \frac{s+1}{s-1},$$

so hat die Function

$$[S(s-1) + E(s+1)]$$

nur reciproke Wurzeln, zu denen gleiche Elementartheiler gehören, und die Elementartheiler von der Form  $(s+1)^{2k}$  sind paarweise vorhanden. Unter diesen Voraussetzungen ist aber die Schaar

$$S(s-1) + E(s+1)$$

nach einer Bemerkung des Herrn Frobenius<sup>1)</sup> einer aus conjugirten Grundformen  $As + A^1$  gebildeten Schaar ähnlich. Man hat also

$$P(S+E)Q = A,$$

$$P(E-S)Q = A^1,$$

woraus

$$2PQ = A + A^1,$$

$$2PSQ = A - A^1,$$

und die Determinante von  $A + A^1$  kann natürlich nicht verschwinden. Demnach wird

$$2Q = P^{-1}(A + A^1),$$

$$PSP^{-1} = (A - A^1)(A + A^1)^{-1};$$

oder auch nach dem zuvor bewiesenen Satze  $PSP^{-1}$ , also auch  $S$  selbst, einer alternirenden Form ähnlich.

Man hat daher auch folgenden Satz:

Ist die Form  $S$  (von nicht verschwindender Determinante) einer alternirenden Form ähnlich, so sind auch die Lösungen der Gleichung

$$SX + XS = 0$$

1) F, S. 22.

deren Determinante nicht verschwindet, einer alternirenden Form ähnlich.

Der Vollständigkeit halber führe ich noch den analogen Satz über symmetrische Formen an.

Ist eine Form einer symmetrischen ähnlich, so ist sie das Product zweier symmetrischer Formen, von denen wenigstens eine eine nicht verschwindende Determinante hat.

Denn wenn die Gleichung besteht

$$VS V^{-1} = (V^1)^{-1} S^1 V^1,$$

welche ausdrückt, dass  $S$  einer symmetrischen Form ähnlich ist, so folgt

$$V^1 VS V^{-1} (V^1)^{-1} = S^1$$

oder für

$$V^1 V = W$$

$$WS = S^1 W = (WS)^1.$$

Demnach ist  $WS$  eine symmetrische Form  $W_1$ , also

$$S = W^{-1} W_1.$$

Dass dies auch umgekehrt zur Aehnlichkeit genügt, erkennt man wie vorhin.

## § 6.

**Zurückführung des Problems der conjugirten Transformation einer Form in sich selbst auf rationale Operationen.**

Zur Bestimmung der Formen  $U$ , wie sie in § 2) ausgeführt ist, scheint die Ermittlung der Wurzeln der charakteristischen Function von  $S$  unerlässlich. Dagegen ist das Problem der cogredienten (congruenten) Transformation  $U$  einer Form  $S$  in sich selbst, wie ich an einem anderen Orte zeige,<sup>1)</sup> solange nur eine der Determinanten  $|U + E|$ ,  $|U - E|$

1) Es sei mir gestattet, hier auf eine in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit zu verweisen.



von Null verschieden ist, stets auf die Lösung des linearen Systemes von Gleichungen

$$XS + X^1 S^1 = 0$$

zurückführbar, und für den Fall der eigentlichen Substitutionen kann man sogar in gewissen Fällen alle Formen  $U$  auf diesem Wege erhalten<sup>2)</sup>. Für das hier vorliegende Problem der conjugirten Transformation bestehen zum Theil ähnliche Verhältnisse, insoferne auch hier jede Lösung  $U$ , die der soeben angegebenen Voraussetzung genügt, linear ermittelt werden kann.

Setzt man

$$1) \quad X_q = (E - qU)(E + qU)^{-1},$$

$$\text{so wird} \quad X_q S = (E - qU)(S^{-1} + qS^{-1}U)^{-1},$$

$$\text{oder wegen} \quad S^{-1}U = U^{-1}S^{-1},$$

$$US = SU^{-1},$$

$$\begin{aligned} X_q S &= (E - qU)S(E + qU^{-1})^{-1} = S(E - qU^{-1})(E + qU^{-1})^{-1} \\ &= -S(E - q^1U)(E + q^1U^{-1}), \end{aligned}$$

d. h. es besteht die Gleichung

$$2) \quad X_q S = -S X_{q^1},$$

falls wie oben  $q^1 q = 1$  gesetzt wird.

Nimmt man nun  $q = \pm 1$  an, so entsteht aus 2) wieder die Gleichung

$$3) \quad XS + SX = 0,$$

falls

$$X = (E \mp U)(E \pm U)^{-1},$$

oder

$$4) \quad U = \pm \frac{E - X}{E + X}$$

gesetzt wird, wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je

1) Vgl. F. S. 42 ff., wo der Fall der congruenten Transformation der symmetrischen Formen behandelt ist.

nachdem  $q = +1$  oder gleich  $-1$  genommen wurde. Das heisst:

Jede Substitution  $U$ , die eine Form  $S$  von nicht verschwindender Determinante in sich transformiert und für die wenigstens eine der beiden Determinanten  $|U + E|$ ,  $|U - E|$  nicht verschwindet, kann auf eine einzige Art in eine der Formen

$$U = \pm \frac{E - X}{E + X}$$

gebracht werden, wo  $X$  der Gleichung 3) genügt und die Determinante von  $E \pm X$  ist dabei nicht Null.<sup>1)</sup>

Aber dieser Satz kann auch umgekehrt werden und zwar in folgender Weise:

Die Form

$$U = \pm \frac{E - X}{E + X}$$

ist eine Substitution, welche jede Form  $S$ , deren Determinante auch Null sein kann, in sich selbst transformiert, sobald die Form  $X$  der Gleichung 3) genügt, und die Determinanten von  $E + X$  (und  $E - X$ ), was jederzeit für die homogenen Coefficienten von  $X$  erreichbar ist,<sup>2)</sup> nicht verschwinden.

1) Ist nämlich  $|U + E|$  nicht Null, so ist

$$X = (E - U)(E + U)^{-1} = 2(E + U)^{-1} - E$$

also

$$X + E = 2(E + U)^{-1};$$

ist dagegen  $|U - E|$  von Null verschieden, so ist

$$X = (E + U)(E - U)^{-1}$$

$$\text{d. h. } X + E = 2(E - U)^{-1}.$$

Ausserdem ist

$$(X + E)S + S(X - E) = 0,$$

also ist auch  $|E - X|$  nicht Null.

2) Wenn  $|S|$  nicht Null ist, können die Determinanten  $X + E$  und  $|X - E|$  nur gleichzeitig verschwinden.

In der That wird

$$USU = (E - X)(E + X)^{-1}S(E - X)(E + X)^{-1}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen

$$(X + E)S + S(X - E) = 0,$$

$$S(X + E) + (X - E)S = 0,$$

die eine unmittelbare Folge von 3) sind, für die rechte Seite der vorstehenden Gleichung der Ausdruck

$$(E - X)(E + X)^{-1}(E + X)S(E + X)^{-1}$$

$$\text{oder} \quad (E - X)S(E + X)^{-1} = S,$$

womit die Gleichung

$$USU = S$$

bewiesen ist.

Je nachdem das obere oder untere Vorzeichen in 4) gewählt wird, ist

$$U \pm E = \pm 2E(E + X)^{-1}$$

$$U \mp E = \mp 2X(E + X)^{-1}$$

ferner wird

$$\begin{aligned} 5) \quad US - SU &= \pm 4(E + X)^{-1}SX(E + X)^{-1} \\ &= \pm 4SX(E - X^2)^{-1}. \end{aligned}$$

So lange nun die etwaigen Parameter in  $X$  endlich sind, d. h. diese Form selbst eine endliche ist, kann  $U$  mit  $S$  nur vertauschbar werden, wenn  $X = 0$  ist, d. h. für die identische Transformation  $U = +E$ . Legt man andererseits den linearen Parametern in  $X$  beständig wachsende Werthe bei, so erhält man im Grenzfalle, falls  $U$  eine endliche Form bleibt, solche Substitutionen, für welche die Determinanten  $|U + E|$  und  $|U - E|$  gleichzeitig verschwinden können. Dabei kann auch, wie die Formel 5) zeigt,  $U$  mit  $S$  vertauschbar werden, doch können sich Formen dieser Gattung nur vermöge jener Grenzprocesse ergeben.

Indess wird man im allgemeinen keineswegs alle Sub-

stitutionen auf diesem Wege erhalten. Von den hierher gehörigen Betrachtungen hebe ich die folgende besonders einfache hervor.

Es seien zunächst diejenigen Substitutionen bestimmt, für welche  $|U + E|$  nicht Null ist.<sup>1)</sup> Dieselben sind von der Form

$$U = (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Ich behaupte nun: Alle eigentlichen Substitutionen, für die  $|U + E|$  verschwindet, aber nicht gleichzeitig  $|U - E|$  Null ist, lassen sich aus den eben angegebenen erhalten, indem man einen geeigneten Grenzübergang vornimmt, falls die Form  $S$  einer alternirenden Form ähnlich ist.

Sei nämlich  $W$  irgend eine Form, welche  $S$  in sich transformiert, und  $|W - E|$  nicht Null, während  $|W + E|$  verschwinden mag. Dann ist

$$W = - \frac{E - X}{E + X}$$

wo nun die Determinante von  $X$  im allgemeinen verschwinden muss. Da aber die Transformation eine eigentliche ist, so muss  $n$  eine gerade Zahl sein, und daher existirt auch eine Form von nicht verschwindender Determinante  $Z$ , welche der Gleichung

$$SZ + ZS = 0$$

genügt. Bezeichnet man mit  $h$  einen beliebigen Parameter, so ist auch

$$S(Zh + X) + (X + hZ)S = 0$$

1) Zur Bestimmung der Coefficienten der Form  $X$  kann man natürlich auch ähnliche nicht rationale Operationen wie in § 2 anwenden. Sind z. B. alle Wurzeln von  $|S - \varrho E|$  von einander verschieden und paarweise entgegengesetzt gleich, so hängen diese Coefficienten bei geradem  $n$  von  $n$  homogenen Parametern ab. Für ungerades  $n = 2p + 1$  ist dagegen, wenn je zwei Wurzeln bis auf eine entgegengesetzt gleich und verschieden sind, diese Anzahl gleich  $2p$ .

In der That wird

$$USU = (E - X)(E + X)^{-1}S(E - X)(E + X)^{-1}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen

$$(X + E)S + S(X - E) = o,$$

$$S(X + E) + (X - E)S = o,$$

die eine unmittelbare Folge von 3) sind, für die rechte Seite der vorstehenden Gleichung der Ausdruck

$$(E - X)(E + X)^{-1}(E + X)S(E + X)^{-1}$$

oder  $(E - X)S(E + X)^{-1} = S,$

womit die Gleichung

$$USU = S$$

bewiesen ist.

Je nachdem das obere oder untere Vorzeichen in 4) gewählt wird, ist

$$U \pm E = \pm 2E(E + X)^{-1}$$

$$U \mp E = \mp 2X(E + X)^{-1}$$

ferner wird

$$\begin{aligned} 5) \quad US - SU &= \pm 4(E + X)^{-1}SX(E + X)^{-1} \\ &= \pm 4SX(E - X^2)^{-1}. \end{aligned}$$

So lange nun die etwaigen Parameter in  $X$  endlich sind, d. h. diese Form selbst eine endliche ist, kann  $U$  mit  $S$  nur vertauschbar werden, wenn  $X = o$  ist, d. h. für die identische Transformation  $U = \pm E$ . Legt man andererseits den linearen Parametern in  $X$  beständig wachsende Werthe bei, so erhält man im Grenzfalle, falls  $U$  eine endliche Form bleibt, solche Substitutionen, für welche die Determinanten  $|U + E|$  und  $|U - E|$  gleichzeitig verschwinden können. Dabei kann auch, wie die Formel 5) zeigt,  $U$  mit  $S$  vertauschbar werden, doch können sich Formen dieser Gattung nur vermöge jener Grenzprocesse ergeben.

Indess wird man im allgemeinen keineswegs alle Sub-

stitutionen auf diesem Wege erhalten. Von den hierher gehörigen Betrachtungen hebe ich die folgende besonders einfache hervor.

Es seien zunächst diejenigen Substitutionen bestimmt, für welche  $|U + E|$  nicht Null ist.<sup>1)</sup> Dieselben sind von der Form

$$U = (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Ich behaupte nun: Alle eigentlichen Substitutionen, für die  $|U + E|$  verschwindet, aber nicht gleichzeitig  $|U - E|$  Null ist, lassen sich aus den eben angegebenen erhalten, indem man einen geeigneten Grenzübergang vornimmt, falls die Form  $S$  einer alternirenden Form ähnlich ist.

Sei nämlich  $W$  irgend eine Form, welche  $S$  in sich transformirt, und  $|W - E|$  nicht Null, während  $|W + E|$  verschwinden mag. Dann ist

$$W = - \frac{E - X}{E + X}$$

wo nun die Determinante von  $X$  im allgemeinen verschwinden muss. Da aber die Transformation eine eigentliche ist, so muss  $n$  eine gerade Zahl sein, und daher existirt auch eine Form von nicht verschwindender Determinante  $Z$ , welche der Gleichung

$$SZ + ZS = 0$$

genügt. Bezeichnet man mit  $h$  einen beliebigen Parameter, so ist auch

$$S(Zh + X) + (X + hZ)S = 0$$

1) Zur Bestimmung der Coefficienten der Form  $X$  kann man natürlich auch ähnliche nicht rationale Operationen wie in § 2 anwenden. Sind z. B. alle Wurzeln von  $|S - \varrho E|$  von einander verschieden und paarweise entgegengesetzt gleich, so hängen diese Coefficienten bei geradem  $n$  von  $n$  homogenen Parametern ab. Für ungerades  $n = 2p + 1$  ist dagegen, wenn je zwei Wurzeln bis auf eine entgegengesetzt gleich und verschieden sind, diese Anzahl gleich  $2p$ .

und die Determinante von  $X + hZ$  verschwindet nicht für beliebige Werthe von  $h$ . Nun ist aber auch

$$X_1 = (X + hZ)^{-1}$$

eine Lösung der Gleichung  $XS + SX = 0$ , demnach

$$U_h = \frac{E - X_1}{E + X_1},$$

eine Form, für welche  $|U_h + E|$  nicht Null ist. Da endlich

$$U_h = -\frac{E - (X + hZ)}{E + (X + hZ)},$$

so folgt für  $h = 0$

$$\lim U_h = W = \lim \frac{E - X_1}{E + X_1},$$

wie zu zeigen war.

Die Substitutionen, welche sich für ein  $X$  von nicht verschwindender Determinante ergeben, zeichnen sich überhaupt durch besondere Eigenschaften aus, von denen die folgenden zwei noch erwähnt sein mögen.

1) Ist  $X$  einer alternirenden Form ähnlich, so ist die Substitution  $U$  einer orthogonalen Form ähnlich.

Ist nämlich  $Y$  selbst eine alternirende Form, so ist

$$O = \frac{E - Y}{E + Y},$$

eine orthogonale Form,<sup>1)</sup> wie aus den Gleichungen

$$O^1 = \frac{E + Y}{E - Y},$$

oder

$$O O^1 = E,$$

hervorgeht. Ist nun  $X = VYV^{-1}$ , so ist auch

$$V^{-1}UV = O;$$

mithin  $U$  der orthogonalen Form  $O$  ähnlich. Solche Sub-

<sup>\*)</sup> F. S. 48 u. ff.

stitutionen entsprechen also dem Falle, wo  $S$  selbst einer alternirenden Form ähnlich ist.

2) Ist  $X$  eine Form von nicht verschwindender Determinante, so sind die Formen

$$S U, S U^{-1} U S^{-1}, S^{-1} U$$

alternirenden Formen ähnlich.

Denn nach 5) ist

$$U S - S U = Y$$

wo  $Y$  eine Form ist, deren Determinante nicht verschwindet, und die nach § 3, 1 der Gleichung

$$S Y + Y S = 0$$

selbst genügt. Nun ist ferner

$$U Y = U^2 S - S = (U^2 - E) S;$$

$$Y U = S - S U^2 = S(E - U^2),$$

also, da  $U$  mit  $S^2$  vertauschbar ist,

$$U Y S + S Y U = 0.$$

Hieraus folgt aber leicht, da auch  $Y$  mit  $S^2$  vertauschbar ist,

$$(U S) (S^{-1} Y S^2) + (S^{-1} Y S^2) (U S) = 0,$$

$$(S U) (Y S) + (Y S) (S U) = 0,$$

$$(U S^{-1}) (S Y) + (S Y) (U S^{-1}) = 0;$$

$$(S^{-1} U) (Y S) + (Y S) (S^{-1} U) = 0;$$

d. h. es haben die charakteristischen Functionen  $|T - \varrho E|$  und  $|T + \varrho E|$  dieselben Elementartheiler, wo  $T$  jede der vier genannten Formen bedeuten kann.